F 789 - Turma A
Aula de exercício 7 - Carlos Galdino

UNICAMP, 13 de junho de 2018

Exercício 7.2 adaptado do livro do Sakurai. No exercício, ele trabalha com N partículas, aqui vamos lidar apenas com duas.

2 partículas idênticas de spin 1/2 estão sujeitas a um potencial de um oscilador harmônico unidimensional simples. Ignore qualquer interação mútua entre partículas.

a) Sem considerar o spin das partículas, qual é o autoestado e a autoenergia do estado fundamental?
b) O autoestado encontrado no item a, é simétrico?
c) Considerando o spin das partículas, qual é o autoestado e a autoenergia do estado fundamental?
d) Considerando o spin das partículas, qual é o autoestado e a autoenergia do primeiro estado excitado?

Resposta:
a) Primeiro vamos lembrar que o hamiltoniano do oscilador harmônico é dado por

$$H = \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$$

e a energia de um estado n pode ser dado como,

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

Dessa forma, desconsiderando o grau de liberdade de spin, a função de onda espacial das duas partículas será

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_1 = 1, n_2 = 0\rangle - |n_1 = 0, n_2 = 1\rangle)$$

e a energia é $2\hbar\omega$.

b) Se você inverter as partículas (partícula 1 no lugar da partícula 2) o estado muda de sinal, então o estado é antissimétrico. Nesse caso o estado deve ser antissimétrico, pois estamos trabalhando com férmions.

c) Para o caso de considerarmos os spin das partículas temos que,

$$|\Psi\rangle = |\psi_{space}\rangle \otimes |\psi_{spin}\rangle$$

As partículas são férmions, logo o autoestado deve ser antissimétrico. A função de onda de spin pode ser dada por,

$$|\psi_{spin}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_1 = +, n_2 = -\rangle - |n_1 = -, n_2 = +\rangle)$$

Perceba que esse estado é antissimétrico. Isso nos da a liberdade de ter $|\psi_{space}\rangle$ simétrico, dessa forma,

$$|\Psi\rangle = |n_1 = 0, n_2 = 0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_1 = +, n_2 = -\rangle - |n_1 = -, n_2 = +\rangle)$$

e a energia é $\hbar\omega$.

d) Para o primeiro estado excitado temos o estado antissimétrico,

$$|\psi_{\text{space}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_1 = 1, n_2 = 0\rangle - |n_1 = 0, n_2 = 1\rangle)$$

ou o estado simétrico,

$$|\psi_{\text{space}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_1 = 1, n_2 = 0\rangle + |n_1 = 0, n_2 = 1\rangle)$$

O estado de spin pode ser dada pelo estado antissimétrico,

$$|\psi_{spin}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_1 = +, n_2 = -\rangle - |n_1 = -, n_2 = +\rangle)$$

ou o estado simétrico,

$$|\psi_{spin}\rangle = A\,|n_1 = +, n_2 = +\rangle + \frac{B}{\sqrt{2}}(|n_1 = +, n_2 = -\rangle + |n_1 = -, n_2 = +\rangle) + C\,|n_1 = -, n_2 = -\rangle$$

Onde A, B e C são constantes dada pela condição de normalização. As partículas são férmions, logo o autoestado final deve ser antissimétrico, dessa forma temos o primeiro autoestado excitado degenerado,

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_1 = 1, n_2 = 0\rangle - |n_1 = 0, n_2 = +1\rangle)\otimes$$
$$\left[A\,|n_1 = +, n_2 = +\rangle + \frac{B}{\sqrt{2}}(|n_1 = +, n_2 = -\rangle + |n_1 = -, n_2 = +\rangle) + C\,|n_1 = -, n_2 = -\rangle\right]$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_1 = 1, n_2 = 0\rangle + |n_1 = 0, n_2 = +1\rangle)\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}(|n_1 = +, n_2 = -\rangle - |n_1 = -, n_2 = +\rangle)$$

e a energia é $2\hbar\omega$.