AULA 7 - PARTÍCULAS IDÊNTICAS

Probabilidade de medida no autoestado de um dado observável

Considere um sistema composto de duas partículas indênticas descritas pelo estado

$$|\psi;\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\epsilon P_{21}\right)|1:\psi;2:\phi\rangle\,, \tag{1}$$

onde P_{21} é o operador de permutação cuja ação é definida como

$$P_{21}\,|1:\psi;2:\phi\rangle = |1:\phi;2:\psi\rangle\,, \tag{2}$$

e ϵ é o sinal da permutação tal que

$$\epsilon = \begin{cases} +1, & bosons \\ -1, & fermions \end{cases}. \tag{3}$$

Dado o operador A cujos autovalores e autovetores denotamos por

$$A\,|a_n\rangle = a_n\,|a_n\rangle\,, \tag{4}$$

determine a probabilidade de encontrarmos uma partícula com autovalor a_n e outra com autovalor a_m.

Sabemos que para determinarmos a probabilidade de encontrarmos uma partícula com autovalor a_n e outra com autovalor a_m, devemos projetar o estado (1) na base dos autovetores correpondentes a esses autovalores, porém, como estamos tratando um sistema de duas partículas idênticas temos que o autovetor correspondente a esses autovalores é dado por

$$|a_n;a_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\epsilon P_{21}\right)|1:a_n;2:a_m\rangle\,, \tag{5}$$

com isso, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle a_n;a_m|\psi;\phi\rangle &= \frac{1}{2}\left\langle 1:a_n;2:a_m\right|\left(1+\epsilon P_{21}\right)^\dagger\left(1+\epsilon P_{21}\right)\left|1:\psi;2:\phi\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\langle 1:a_n;2:a_m\right|\left(1+2\epsilon P_{21}+\epsilon^2 P_{21}^2\right)\left|1:\psi;2:\phi\right\rangle \\
&= \langle 1:a_n;2:a_m|\left(1+\epsilon P_{21}\right)|1:\psi;2:\phi\rangle \\
&= \langle 1:a_n;2:a_m|1:\psi;2:\phi\rangle + \epsilon\,\langle 1:a_n;2:a_m|1:\phi;2:\psi\rangle \\
&= \langle a_n|\psi\rangle\,\langle a_m|\phi\rangle + \epsilon\,\langle a_n|\phi\rangle\,\langle a_m|\psi\rangle\,,
\end{aligned} \tag{6}$$

e portanto, a probabilidade é dada por

$$
\begin{aligned}
P\left(a_n, a_m\right) &= \left|\left\langle a_n ; a_m \middle| \psi ; \phi\right\rangle\right|^2 \\
&= \left|\left\langle a_n \middle| \psi\right\rangle\left\langle a_m \middle| \phi\right\rangle+\epsilon\left\langle a_n \middle| \phi\right\rangle\left\langle a_m \middle| \psi\right\rangle\right|^2 . \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Discuta o mesmo problema no caso em que as partículas são distinguíveis.

Densidade de probabilidade de duas partículas idênticas

Considere um sistema composto de duas partículas idênticas uma no estado $|\varphi\rangle$ e a outra no estado $|\chi\rangle$. Determine a probabilidade de encontrarmos uma delas no volume d^3r centrado em $\vec{r}$ e a outra no volume d^3r' centrado em $\vec{r}'$.

Como o sistema é composto de duas partículas idênticas, o estado que descreve esse sistema é dado por

$$
|\varphi ; \chi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\epsilon P_{21}\right)|1: \varphi ; 2: \chi\rangle . \qquad (8)
$$

Além disso, o ket de posição $\left|\vec{r} ; \vec{r}'\right\rangle$ é escrito como

$$
\left|\vec{r} ; \vec{r}'\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\epsilon P_{21}\right)\left|1: \vec{r} ; 2: \vec{r}'\right\rangle . \qquad (9)
$$

Usando (9), podemos expressar o ket (8) na representação de coordenadas como

$$
\begin{aligned}
\left\langle\vec{r} ; \vec{r}' \middle| \varphi ; \chi\right\rangle &= \frac{1}{2}\left\langle 1: \vec{r} ; 2: \vec{r}'\right|\left(1+\epsilon P_{21}\right)^{\dagger}\left(1+\epsilon P_{21}\right)|1: \varphi ; 2: \chi\rangle \\
&= \left\langle 1: \vec{r} ; 2: \vec{r}'\right|\left(1+\epsilon P_{21}\right)|1: \varphi ; 2: \chi\rangle \\
&= \left\langle 1: \vec{r} ; 2: \vec{r}' \middle| 1: \varphi ; 2: \chi\right\rangle+\epsilon\left\langle 1: \vec{r} ; 2: \vec{r}' \middle| 1: \chi ; 2: \varphi\right\rangle \\
&= \varphi(\vec{r}) \chi\left(\vec{r}'\right)+\epsilon \varphi\left(\vec{r}'\right) \chi(\vec{r}) . \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Uma vez que determinamos (10), a densidade de probabilidade $\rho\left(\vec{r}, \vec{r}'\right)$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\rho\left(\vec{r}, \vec{r}'\right) &= \left|\left\langle\vec{r} ; \vec{r}' \middle| \varphi ; \chi\right\rangle\right|^2 \\
&= \left|\varphi(\vec{r}) \chi\left(\vec{r}'\right)+\epsilon \varphi\left(\vec{r}'\right) \chi(\vec{r})\right|^2 \\
&= |\varphi(\vec{r})|^2\left|\chi\left(\vec{r}'\right)\right|^2+\left|\varphi\left(\vec{r}'\right)\right|^2|\chi(\vec{r})|^2 \\
&+\varepsilon\left[\varphi^*(\vec{r}) \chi^*\left(\vec{r}'\right) \varphi\left(\vec{r}'\right) \chi(\vec{r})+\varphi^*\left(\vec{r}'\right) \chi^*(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) \chi\left(\vec{r}'\right)\right], \qquad (11)
\end{aligned}
$$

e portanto, a probabilidade $dP(\vec{r},\vec{r}^{\,\prime})$ de encontrarmos uma delas no volume d^3r centrado em $\vec{r}$ e a outra no volume $d^3r^{\prime}$ centrado em $\vec{r}^{\,\prime}$ é escrita como

$$dP(\vec{r},\vec{r}^{\,\prime}) = \rho\left(\vec{r},\vec{r}^{\,\prime}\right) d^3r d^3r^{\prime} \tag{12}$$

Valor esperado de um observável

Considere um sistema composto de duas partículas idênticas, uma no estado $|\phi_1\rangle$ e a outra no estado $|\phi_2\rangle$. Calcule o valor esperado do potencial

$$V\left(\vec{r},\vec{r}^{\,\prime}\right) = \frac{e^2}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}|} \tag{13}$$

no estado do sistema composto por essas partículas na representação de coordenadas. Use a seguinte notação para as integrais

$$J\left(\phi_1,\phi_2\right) = \int d^3r_1 d^3r_2 \phi_1^*\left(\vec{r}_1\right)\phi_2^*\left(\vec{r}_2\right) V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\phi_1\left(\vec{r}_1\right)\phi_2\left(\vec{r}_2\right), \tag{14}$$

$$K\left(\phi_1,\phi_2\right) = \int d^3r_1 d^3r_2 \phi_1^*\left(\vec{r}_1\right)\phi_2^*\left(\vec{r}_2\right) V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\phi_2\left(\vec{r}_1\right)\phi_1\left(\vec{r}_2\right). \tag{15}$$

O estado do sistema composto pelas duas partículas idênticas é descrito como

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\epsilon P_{21}\right)|1:\phi_1;2:\phi_2\rangle . \tag{16}$$

Queremos determinar $\left\langle\psi|V\left(\vec{r},\vec{r}^{\,\prime}\right)|\psi\right\rangle$. Para isso, introduziremos na expressão do valor esperado a relação de completeza da representação na base de posição para um sistema de duas partículas idênticas, isto é, usando (9), temos que

$$\begin{aligned} 1 &= \int d^3r_1 d^3r_2 \left|\vec{r}_1;\vec{r}_2\right\rangle\left\langle\vec{r}_1;\vec{r}_2\right| \\ &= \frac{1}{2}\int d^3r_1 d^3r_2 \left(1+\epsilon P_{21}\right)|1:\vec{r}_1;2:\vec{r}_2\rangle\langle 1:\vec{r}_1;2:\vec{r}_2|\left(1+\epsilon P_{21}\right)^{\dagger} . \end{aligned} \tag{17}$$

Agora, podemos escrever

$$\begin{aligned} \left\langle\psi|V\left(\vec{r},\vec{r}^{\,\prime}\right)|\psi\right\rangle &= \frac{1}{2}\int d^3r_1 d^3r_2 \left\langle\psi|V\left(\vec{r},\vec{r}^{\,\prime}\right)\left(1+\epsilon P_{21}\right)|1:\vec{r}_1;2:\vec{r}_2\right\rangle\langle 1:\vec{r}_1;2:\vec{r}_2|\left(1+\epsilon P_{21}\right)^{\dagger}\left|\psi\right\rangle \\ &= \frac{1}{4}\int d^3r_1 d^3r_2 \left\langle 1:\phi_1;2:\phi_2\right|\left(1+\epsilon P_{21}\right)^{\dagger} V\left(\vec{r},\vec{r}^{\,\prime}\right)\left(1+\epsilon P_{21}\right)\left|1:\vec{r}_1;2:\vec{r}_2\right\rangle \\ &\quad \left\langle 1:\vec{r}_1;2:\vec{r}_2\right|\left(1+\epsilon P_{21}\right)^{\dagger}\left(1+\epsilon P_{21}\right)\left|1:\phi_1;2:\phi_2\right\rangle . \end{aligned} \tag{18}$$

Note que o potencial é invariante sob a permutação dos vetores de posição, isto é, $V\left(\vec{r},\vec{r}'\right) = V\left(\vec{r}',\vec{r}\right)$, isso implica que ele comuta com o operador de permutação e portanto (18) se reduz à

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi | V\left(\vec{r},\vec{r}'\right) | \psi \right\rangle = \frac{1}{4} \int d^3r_1 d^3r_2 & \left\langle 1:\phi_1; 2:\phi_2 | V\left(\vec{r},\vec{r}'\right) \left(1+\epsilon P_{21}\right)^{\dagger} \left(1+\epsilon P_{21}\right) |1:\vec{r}_1; 2:\vec{r}_2 \right\rangle \\
& \left\langle 1:\vec{r}_1; 2:\vec{r}_2 | \left(1+\epsilon P_{21}\right)^{\dagger} \left(1+\epsilon P_{21}\right) |1:\phi_1; 2:\phi_2 \right\rangle \\
& = \int d^3r_1 d^3r_2 \left\{ \left\langle 1:\phi_1; 2:\phi_2 | V\left(\vec{r},\vec{r}'\right) \left(1+\epsilon P_{21}\right) |1:\vec{r}_1; 2:\vec{r}_2 \right\rangle \right. \\
& \left. \langle 1:\vec{r}_1; 2:\vec{r}_2 | \left(1+\epsilon P_{21}\right) |1:\phi_1; 2:\phi_2 \rangle \right\} \\
& = \int d^3r_1 d^3r_2 \left\{ \left\langle 1:\phi_1; 2:\phi_2 | V\left(\vec{r},\vec{r}'\right) |1:\vec{r}_1; 2:\vec{r}_2 \right\rangle + \right. \\
& \left. \epsilon \left\langle 1:\phi_1; 2:\phi_2 | V\left(\vec{r},\vec{r}'\right) |1:\vec{r}_2; 2:\vec{r}_1 \right\rangle \right\} \left\{ \langle 1:\vec{r}_1; 2:\vec{r}_2 | 1:\phi_1; 2:\phi_2 \rangle + \right. \\
& \left. \epsilon \langle 1:\vec{r}_1; 2:\vec{r}_2 | 1:\phi_2; 2:\phi_1 \rangle \right\} \\
& = \int d^3r_1 d^3r_2 \phi_1^*\left(\vec{r}_1\right) \phi_2^*\left(\vec{r}_2\right) V\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right) \phi_1\left(\vec{r}_1\right) \phi_2\left(\vec{r}_2\right) + \\
& \varepsilon \int d^3r_1 d^3r_2 \phi_1^*\left(\vec{r}_1\right) \phi_2^*\left(\vec{r}_2\right) V\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right) \phi_2\left(\vec{r}_1\right) \phi_1\left(\vec{r}_2\right) + \\
& \varepsilon \int d^3r_1 d^3r_2 \phi_1^*\left(\vec{r}_2\right) \phi_2^*\left(\vec{r}_1\right) V\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right) \phi_1\left(\vec{r}_1\right) \phi_2\left(\vec{r}_2\right) + \\
& \varepsilon^2 \int d^3r_1 d^3r_2 \phi_1^*\left(\vec{r}_2\right) \phi_2^*\left(\vec{r}_1\right) V\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right) \phi_2\left(\vec{r}_1\right) \phi_1\left(\vec{r}_2\right).
\end{aligned} \tag{19}$$

Usando as definições (14) e (15), expressamos (19) como

$$\left\langle \psi | V\left(\vec{r},\vec{r}'\right) | \psi \right\rangle = 2\left[J\left(\phi_1,\phi_2\right) + \varepsilon K\left(\phi_1,\phi_2\right)\right] \tag{20}$$