F-315 (Mecânica Geral I)
Aula 12

Prof. Mário Noboru Tamashiro
Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339
e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html

Momento linear, momento angular e energia mecânica do sistema de partículas

Momento linear

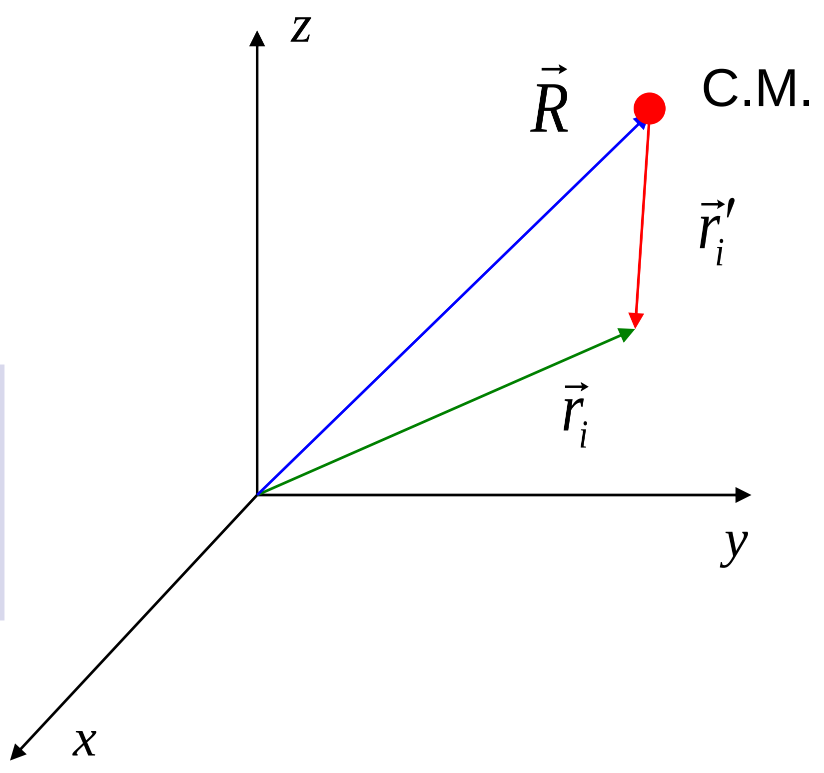
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{F}_i$$

Momento angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = \sum_i \vec{\tau}_i$$

Energia mecânica

$$\frac{d\left(T + V_{\text{int}}\right)}{dt} = \sum_i \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i\right)$$



Dinâmica de um sistema de partículas

Notar que para o momento linear temos

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$$

Entretanto para o momento angular
e a energia cinética,

$$\vec{L} \neq \vec{R} \times M\dot{\vec{R}}$$

$$T \neq \frac{1}{2} M\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}}$$

Problema

S seção 4.5, pg. 200

1) Uma esteira de massa *M* se encontra em movimento a uma velocidade constante *v*. A partir de um reservatório fixo é despejada areia a uma taxa

$\lambda = dm/dt$. Calcular a) A força necessária para manter a esteira em movimento com velocidade *v*; b) A potência suprida pela força em comparação com a taxa de variação da energia cinética; o que acontece com a diferença de energia?

S seção 4.5, pg. 200

Momento total = momento do CM: $P = (m + M)v$

2ª lei de Newton: $F = \dot{P} = \dot{m}v = \lambda v$

Potência dissipada: $\mathrm{d}W = F\mathrm{d}x \;\rightarrow\; \dot{W} = Fv = \lambda v^2$

Taxa de variação: $\dot{T} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(m + M)v^2]$

$$= \frac{1}{2}\dot{m}v^2 = \frac{1}{2}\lambda v^2 = \frac{1}{2}\dot{W}$$

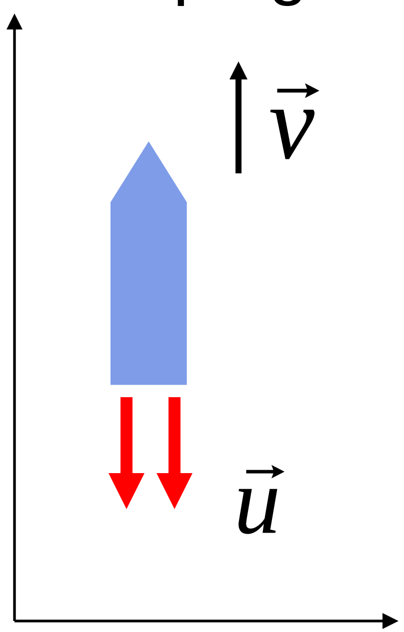
A outra metade $\frac{1}{2}\dot{W}$ deve ser convertida em outras formas de energia (p.ex. sonora, térmica etc.)

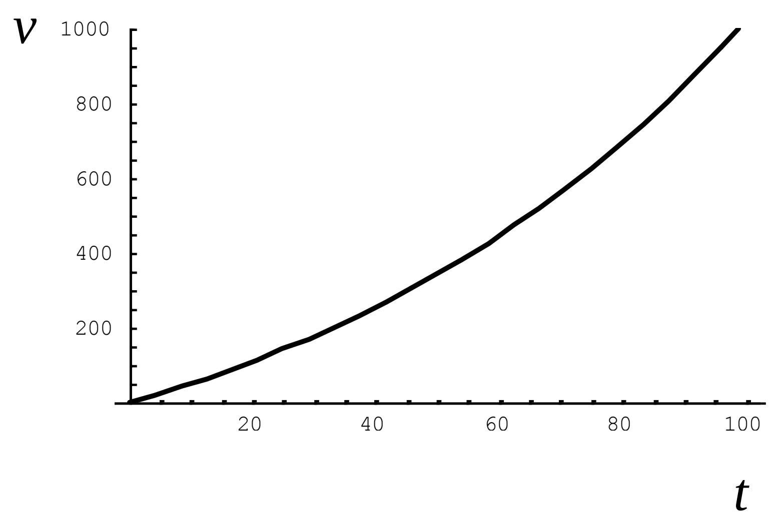
Veja breve discussão em http://www.if.ufrgs.br/cref/?area=questions&id=639

Problema

TM seção 9.11, pgs. 371/376
S seção 4.5, pg. 201

2) Um foguete ejeta gases a uma velocidade constante *u (*em relação ao foguete), a uma taxa $\alpha = dm/dt$ constante. Calcular a velocidade do foguete em função do tempo a) no espaço livre; b) subindo num campo gravitacional uniforme.





$$v(t) = -gt - u\ln\left(1 - \frac{\alpha t}{M_0}\right)$$

$M_0 = 2 \times 10^6$ kg
u = 3000 m/s
α = 9800 kg/s

TM seção 9.11, pgs. 371–376; S seção 4.5, pg. 201

Massa de gás ejetada: $\dot{m}_\mathrm{e} = \alpha$ (constante) $\rightarrow$ $m_\mathrm{e}(t) = \alpha t$

Massa instantânea do foguete: $m(t) = m_0 - m_\mathrm{e}(t) = m_0 - \alpha t$

$$m_0 \equiv m(t=0), \quad \dot{m} = -\dot{m}_\mathrm{e} \;\rightarrow\; \mathrm{d}m = -\mathrm{d}m_\mathrm{e}$$

Sem forças atuando, há conservação do momento linear:

$$p(t) = p(t+\mathrm{d}t) + \mathrm{d}p_\mathrm{e}(\mathrm{d}t)$$

$$mv = (m - \mathrm{d}m_\mathrm{e})(v + \mathrm{d}v) + \mathrm{d}m_\mathrm{e}(v - u)$$

$$mv = (m + \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) + \mathrm{d}m(u - v)$$

$$m\mathrm{d}v + u\mathrm{d}m = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{d}v = -u\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

TM eq. (9.152); S eq. (4.56)

$$v_\mathrm{free}(t) = v_0 - u\ln\left[\frac{m(t)}{m_0}\right] = v_0 - u\ln\left(1 - \frac{\alpha t}{m_0}\right), \; v_0 \equiv v_\mathrm{free}(t=0)$$

TM seção 9.11, pgs. 371–376; S seção 4.5, pg. 201

Massa de gás ejetada: $\dot{m}_{\mathrm{e}} = \alpha$ (constante) $\rightarrow$ $m_{\mathrm{e}}(t) = \alpha t$

Massa instantânea do foguete: $m(t) = m_0 - m_{\mathrm{e}}(t) = m_0 - \alpha t$

$$m_0 \equiv m(t=0), \quad \dot{m} = -\dot{m}_{\mathrm{e}} \;\rightarrow\; \mathrm{d}m = -\mathrm{d}m_{\mathrm{e}}$$

Sem forças atuando, há conservação do momento linear:

$$\boxed{P(t) = P(t+\mathrm{d}t) = m_0 v_0 = m(t)v(t) + \int_0^t [v(t') - u]\,\dot{m}_{\mathrm{e}}(t')\,\mathrm{d}t'}$$

$$mv = (m - \mathrm{d}m_{\mathrm{e}})(v + \mathrm{d}v) + \mathrm{d}m_{\mathrm{e}}(v - u)$$

$$mv = (m + \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) + \mathrm{d}m(u - v)$$

$$m\,\mathrm{d}v + u\,\mathrm{d}m = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{d}v = -u\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

TM eq. (9.152); S eq. (4.56)

$$v_{\text{free}}(t) = v_0 - u\ln\left[\frac{m(t)}{m_0}\right] = v_0 - u\ln\left(1 - \frac{\alpha t}{m_0}\right), \quad v_0 \equiv v_{\text{free}}(t=0)$$

TM seção 9.11, pgs. 371–376; S seção 4.5, pg. 201

$$x_{\text{free}}(t) = x_0 + \int_0^t v(t')\,\mathrm{d}t' = x_0 + v_0 t - u\left[\left(t - \frac{m_0}{\alpha}\right)\ln\left(1 - \frac{\alpha t}{m_0}\right) - t\right]$$

Agora com a força gravitacional $F_g = -mg$ atuando:

$$p(t+\mathrm{d}t) + \mathrm{d}p_{\mathrm{e}}(\mathrm{d}t) - p(t) = F_g\,\mathrm{d}t = -mg\,\mathrm{d}t$$

$$m\mathrm{d}v + u\mathrm{d}m = -mg\mathrm{d}t \;\rightarrow\; m\dot{v} + u\dot{m} = m\dot{v} - \alpha u = -mg$$

$$\dot{v} = \frac{\alpha u}{m(t)} - g \;\rightarrow\; v(t) = v_0 - gt - u\ln\left[\frac{m(t)}{m_0}\right],\ \text{pois}\ \dot{m} = -\alpha$$

TM eq. (9.165)

$$v_g(t) = v_0 - gt - u\ln\left(1 - \frac{\alpha t}{m_0}\right),\ \ x_g(t) = x_{\text{free}}(t) - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x_{\text{free}}(t) = x_0 + \int_0^t v(t')\,\mathrm{d}t' = x_0 + v_0 t - u\left[\left(t - \frac{m_0}{\alpha}\right)\ln\left(1 - \frac{\alpha t}{m_0}\right) - t\right]$$

Agora com a força gravitacional $F_g = -mg$ atuando:

$$P(t) = m(t)v(t) + \int_0^t [v(t') - u - g(t-t')]\,\dot{m}_e(t')\,\mathrm{d}t', \quad \dot{P} = -m_0 g$$

$$m\,\mathrm{d}v + u\,\mathrm{d}m = -mg\,\mathrm{d}t \;\rightarrow\; m\dot{v} + u\dot{m} = m\dot{v} - \alpha u = -mg$$

$$\dot{v} = \frac{\alpha u}{m(t)} - g \;\rightarrow\; v(t) = v_0 - gt - u\ln\left[\frac{m(t)}{m_0}\right], \text{ pois } \dot{m} = -\alpha$$

TM eq. (9.165)

$$v_g(t) = v_0 - gt - u\ln\left(1 - \frac{\alpha t}{m_0}\right), \quad x_g(t) = x_{\text{free}}(t) - \frac{1}{2}gt^2$$

Problema

TM problema 9.6 (modificado), pg. 378

3) Considere duas partículas de mesma massa, *m*. As forças sobre as partículas são $\vec{F}_1 = 0$, e $\vec{F}_2 = F_0\hat{x}$. Ambas partículas se encontram inicialmente na origem, enquanto $v_1(0) = v_0$ (ao longo de x) e $v_2(0) = 0$.

Calcular:

a) A posição, velocidade e aceleração do centro de massa do sistema.

b) O momento linear e a energia cinética do sistema e do centro de massa.

TM problema 9.6 (modificado), pg. 378

$$x_1(t) = v_0 t, \quad \dot{x}_1(t) = v_0, \quad x_2(t) = \frac{F_0}{2m} t^2, \quad \dot{x}_2(t) = \frac{F_0}{m} t$$

$$M \equiv \sum_i m_i = 2m, \quad R \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i(t) = \frac{1}{2} v_0 t + \frac{F_0}{4m} t^2$$

$$\dot{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \dot{x}_i(t) = \frac{1}{2} v_0 + \frac{F_0}{2m} t, \quad \ddot{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \ddot{x}_i(t) = \frac{F_0}{2m}$$

$$P_{\text{sist}} = \sum_i m_i \dot{x}_i(t) = P = M\dot{R} = m v_0 + F_0 t$$

$$T_{\text{sist}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2(t) = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + \frac{F_0^2}{m^2} t^2 \right)$$

$$T_{\text{CM}} = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 = \frac{1}{4} m \left(v_0 + \frac{F_0}{m} t \right)^2 = \frac{1}{4} m \left(v_0^2 + \frac{F_0^2}{m^2} t^2 + \frac{2 v_0 F_0}{m} t \right)$$

Note que

TM eqs. (9.12) e (9.39)

$$P_{\text{sist}} = P = P_{\text{CM}}, \text{ mas } T_{\text{sist}} \neq T_{\text{CM}}$$