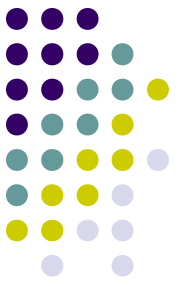


# F-315 (Mecânica Geral I)

## Aula 13



Prof. Mário Noboru Tamashiro

Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339

e-mail: [mtamash@ifi.unicamp.br](mailto:mtamash@ifi.unicamp.br)

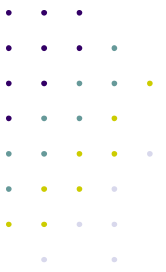
[http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315\\_mecgeral\\_i](http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i)

Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:

<http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html>

# Problema

**G** seção 5.7, pg. 220 (precessão lenta)

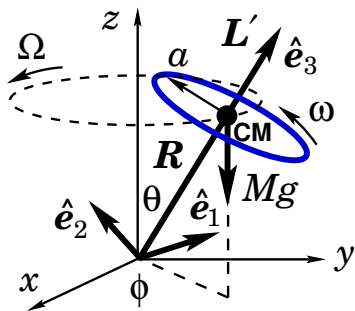


1) Um giroscópio possui sua massa  $M$  concentrada na borda do volante (anel) de raio  $a$ . O seu centro de massa se encontra a uma distância  $R$  do ponto de apoio  $O$ , localizado na origem. O giroscópio, colocado no campo gravitacional, é posto a girar rapidamente com velocidade angular  $\dot{\psi} = \omega$ , num cone que forma um ângulo  $\theta$  (fixo) com a vertical. Calcule aproximadamente a velocidade angular de precessão  $\dot{\phi} = \Omega$  do eixo do giroscópio.

<http://www.youtube.com/watch?v=GeyDf4ooPdo>

<http://www.youtube.com/watch?v=8H98BgRzpOM>

# S problema 4.11, pg. 230; G seção 5.7, pg. 220



$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{L}' \approx \mathbf{L}', \quad \dot{\mathbf{L}} \approx \dot{\mathbf{L}}'$$

Momento angular do anel:

$$\mathbf{L}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \approx Ma^2 \omega \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\dot{\mathbf{L}}' = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}' = \Omega L' (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{e}}_3) \rightarrow$$

$\mathbf{L}'$  descreve um cone de raio  $L' |\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{e}}_3| = L' \sin \theta$  em torno

do eixo fixo  $\hat{\mathbf{z}}$

$$\theta = \angle(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{e}}_3), \quad \mathbf{R} = R \mathbf{e}_3$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = -\mathbf{R} \times Mg \hat{\mathbf{z}} = MgR (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{e}}_3)$$

**G pg. 220, precessão lenta**

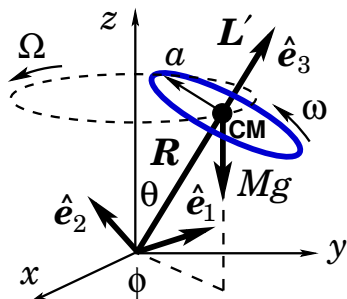
$$\dot{\mathbf{L}} \approx \dot{\mathbf{L}}' \rightarrow$$

$$\Omega \approx \frac{gR}{a^2 \omega}, \text{ vale para } \Omega \ll \omega$$

$$T' = \frac{1}{2} Ma^2 \omega^2 \gg$$

$$V_{\text{CM}} = MgR \cos \theta$$

## S problema 4.11, pg. 230; G seção 5.7, pg. 220



Momentos de inércia (anel):

$$I_1 = I_2 = M(R^2 + \frac{1}{2}a^2), \quad I_3 = Ma^2$$

Equação completa ( $I \equiv I_1 - I_3$ ):

$$I\Omega^2 \cos \theta - I_3\omega\Omega + MgR = 0$$

S eq. (11.63), pg. 497; TM eq. (11.168), pg. 458

$$\Omega_{\pm} = \frac{I_3\omega}{2I \cos \theta} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4MgRI \cos \theta}{I_3^2\omega^2}} \right)$$

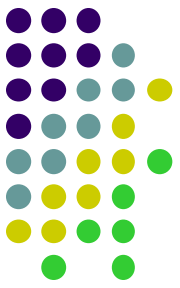
**precessão rápida**

$$\Omega_+ \approx \frac{I_3\omega}{I \cos \theta} = \frac{2a^2\omega}{(2R^2 - a^2)\cos \theta}$$

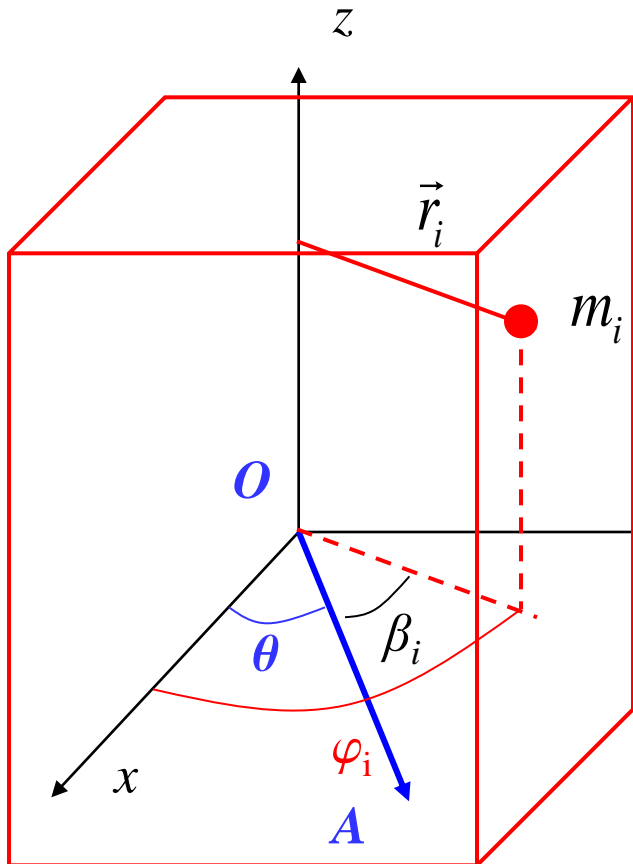
**precessão lenta**

$$\Omega_- \approx \frac{MgR}{I_3\omega} = \frac{gR}{a^2\omega}$$

# Dinâmica de um corpo rígido: rotação em torno de z



## Coordenadas cilíndricas



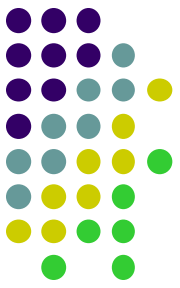
Importante: notar que  $r_i$  denota agora a distância da partícula de massa  $m_i$  ao eixo  $z$

Ângulo de referência  $\theta$   $\varphi_i = \theta + \beta_i$

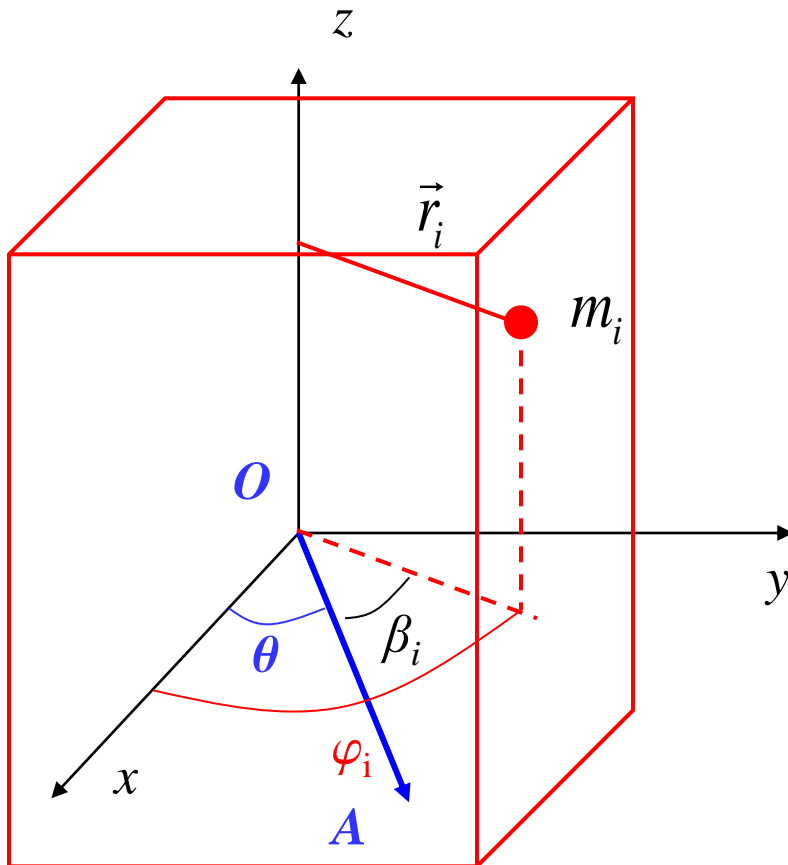
Como o ângulo  $\beta$  é fixo,  $\dot{\varphi}_i = \dot{\theta}$

A  $i$ -ésima partícula executará um movimento circular de raio  $r_i$  em torno do eixo  $z$

# Dinâmica de um corpo rígido: rotação em torno de z



## Coordenadas cilíndricas

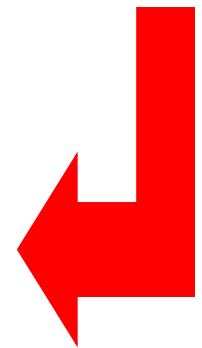


Momento Angular  
(componente z)

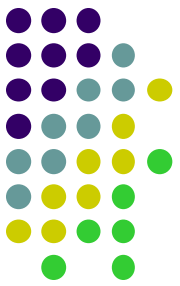
$$L_z = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\phi}_i = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta}$$

Momento de inércia  
em relação a z

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2$$

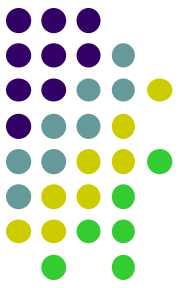


# Rotação de um corpo rígido em torno do eixo z



<b>Movimento em 1D</b>	<b>Rotação em torno de z</b>
Posição $x$	Posição angular $\theta$
Velocidade $v = \dot{x}$	Velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$
Aceleração $a = \ddot{x}$	Aceleração angular $\alpha = \ddot{\theta}$
Força $F$	Torque $\tau_z$
Massa $m$	Momento de Inércia $I_z$
Momento linear $p = m\dot{x}$	Momento angular $L_z = I_z \dot{\theta}$
2ª Lei $\frac{dp}{dt} = m\ddot{x} = F$	$\frac{dL_z}{dt} = I_z \ddot{\theta} = \tau_z$
Energia cinética $T = mv^2 / 2$	Energia cinética $T = I_z \omega^2 / 2$

# Distribuições contínuas de massa – 1D, 2D, 3D



Definição: densidade média de massa

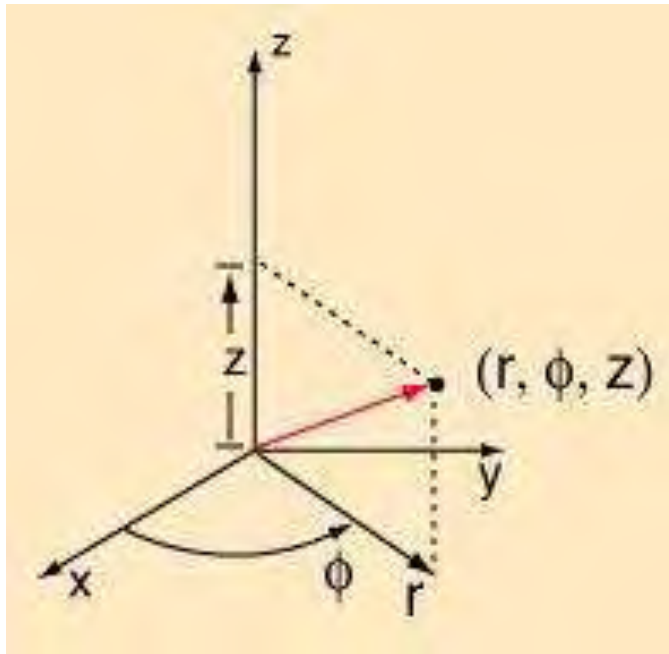
Uma dimensão:  $\lambda = \frac{dm}{dx}$

Duas dimensões:  $\sigma = \frac{dm}{dxdy}$

Três dimensões:  $\rho = \frac{dm}{dxdydz}$



# Coordenadas cilíndricas



$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$z = z$$

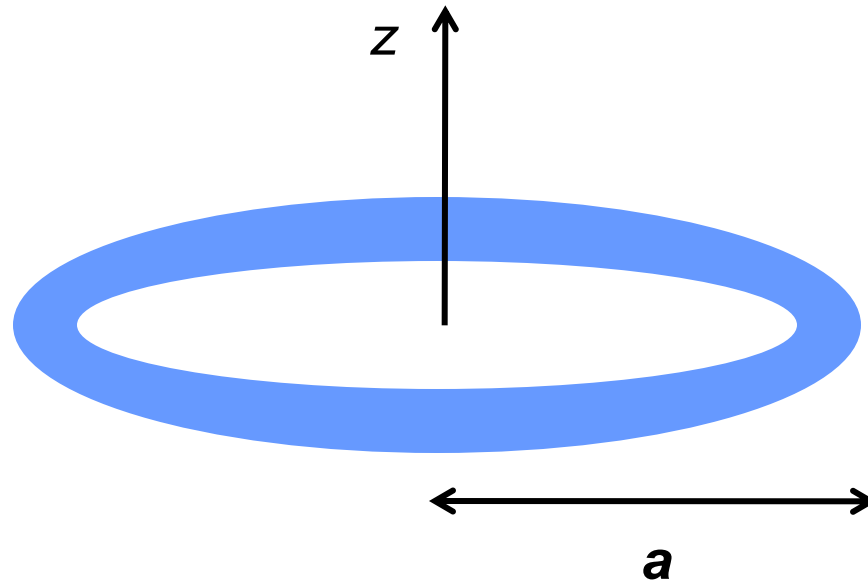
Elemento de área:  $dA = r d\phi dz$

Elemento de volume:  $dV = dA dr = r d\phi dz dr$

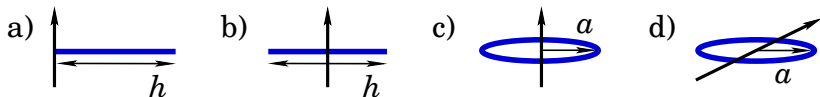


## Exemplo:

Calcular o momento de inércia de um anel circular homogêneo fino de raio  $a$  e massa total  $M$  em relação ao eixo  $z$ , que passa pelo centro do anel, perpendicularmente ao mesmo.



# Momento de inércia: exemplos de cálculo em 1-D



a) haste, eixo  $\perp$  que passa pela extremidade:  $\lambda = \frac{M}{h}$

$$I_z = \int_0^h x^2 dM = \lambda \int_0^h x^2 dx = \frac{M}{h} \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} Mh^2$$

b) haste, eixo  $\perp$  que passa pelo seu CM:

$$I_z = \int_{-h/2}^{h/2} x^2 dM = \lambda \int_{-h/2}^{h/2} x^2 dx = \frac{M}{h} \frac{2}{3} \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} Mh^2$$

c) anel, eixo pelo CM,  $\perp$  ao plano do anel:  $\lambda = \frac{M}{2\pi a}$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dM = a^2 \lambda \int_0^{2\pi} a d\varphi = a^2 \frac{M}{2\pi a} 2\pi a = Ma^2$$

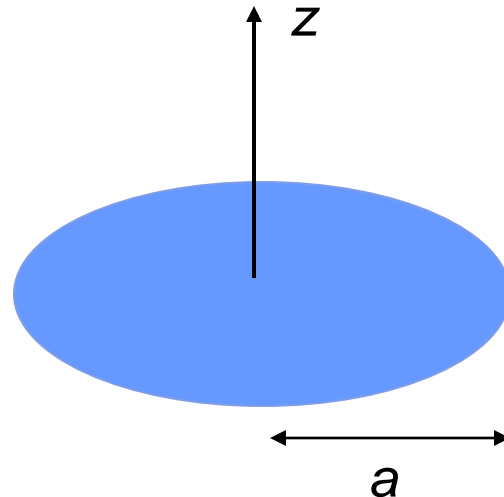
d) anel, eixo pelo CM,  $\parallel$  ao plano do anel:

$$I_y = \int x^2 dM = \int_0^{2\pi} (a \cos \varphi)^2 \lambda a d\varphi = a^3 \frac{M}{2\pi a} \pi = \frac{1}{2} Ma^2$$

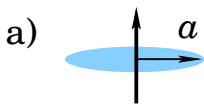


# Exemplo:

Calcular o momento de inércia de um disco circular homogêneo fino de raio  $a$  e massa total  $M$  em relação ao eixo  $z$ , que passa pelo centro do disco, perpendicularmente ao mesmo. Obs: considere o disco como um conjunto de anéis finos concêntricos.



# Momento de inércia: exemplos de cálculo em 2-D



a) disco circular, eixo pelo CM,  $\perp$  ao disco:  $\sigma = \frac{M}{\pi a^2}$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dM = \sigma \int_0^a r^2 dr \int_0^{2\pi} r d\varphi = \frac{M}{\pi a^2} 2\pi \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2} M a^2$$

Disco como composto de vários anéis concêntricos, cada anel de raio  $\alpha$  tem massa  $dM(\alpha) = \sigma dA = 2\pi\sigma\alpha d\alpha$ :

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dM(\alpha) = 2\pi\sigma \int_0^a \alpha^3 d\alpha = 2\pi \frac{M}{\pi a^2} \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2} M a^2$$

b) disco circular, eixo pelo CM,  $\parallel$  ao disco:

$$I_y = \int x^2 dM = \sigma \int_0^{2\pi} r d\varphi \int_0^a (r \cos \varphi)^2 dr = \frac{M}{\pi a^2} \pi \frac{a^4}{4} = \frac{1}{4} M a^2$$

Disco como composto de vários anéis concêntricos:

$$I_y = \frac{1}{2} \int_0^a \alpha^2 dM(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^a \alpha^2 2\pi\sigma\alpha d\alpha = \pi \frac{M}{\pi a^2} \frac{a^4}{4} = \frac{1}{4} M a^2$$