F-315 (Mecânica Geral I)
Aula 14

Prof. Mário Noboru Tamashiro
Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339
e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html

Distribuições contínuas de massa – 3D S seção 5.5, pgs. 248-258

Massa total de um corpo: $$M = \iiint \rho \, dV$$

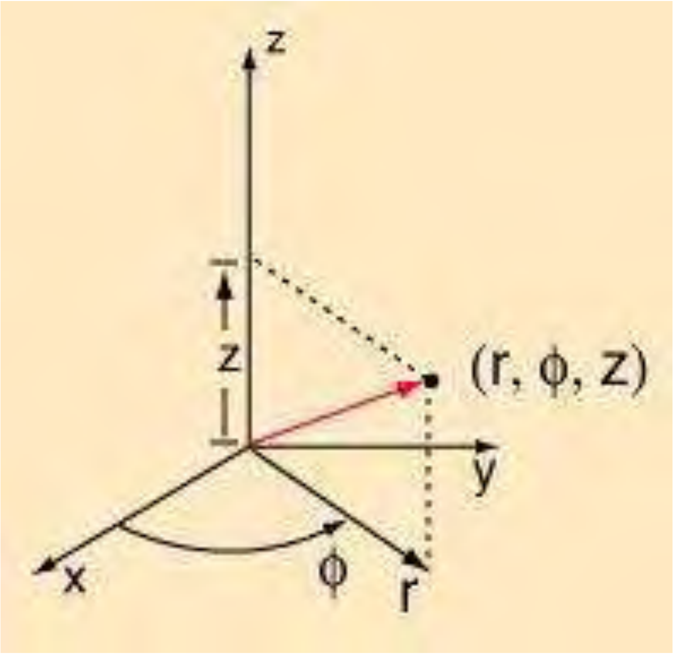
Centro de massa: $$\vec{R} = \frac{\iiint \rho \, \vec{r} \, dV}{M}$$

Obs: $\vec{r}$ é o vetor posição do elemento infinitesimal de massa

Momento de inércia em relação a z: $$I_z = \iiint \rho \, r^2 dV$$

Obs: r é a distância do eixo z ao elemento infinitesimal de massa

Coordenadas cilíndricas



$$x = r\cos\phi$$

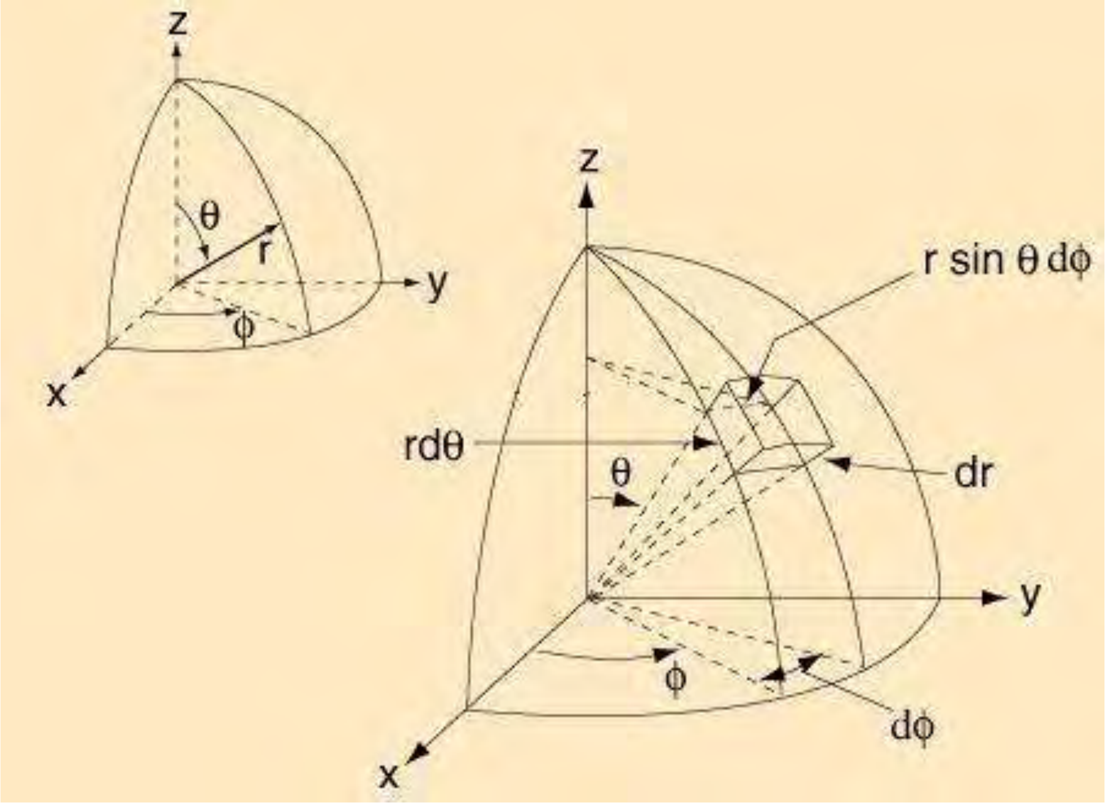
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$z = z$$

Elemento de área: $dA = r\,d\phi\,dz$

Elemento de volume: $dV = dA\,dr = r\,d\phi\,dz\,dr$

Coordenadas esféricas



$$x = r\,\mathrm{sen}\theta\cos\phi$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

Elemento de área: $dA = r\,d\theta\, r\,sen\theta\, d\phi = r^2 sen\theta\, d\theta\, d\phi$

Elemento de volume: $dV = dA dr = r^2 sen\theta\, d\theta\, d\phi\, dr$

Exemplo:

Calcular o momento de inércia de uma esfera homogênea de raio ***R*** e massa total ***M***, em relação ao eixo z, que passa pelo centro da esfera. Obs: considere a esfera como um conjunto de discos finos concêntricos empilhados.

Momento de inércia: exemplos de cálculo em 3-D

Esfera sólida, eixo passando pelo CM: $\rho = M / \frac{4}{3}\pi R^3$

$$I_z = \int (x^2+y^2)\,\mathrm{d}M = \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R r^4\,\mathrm{d}r \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta)(1-\cos^2\theta)$$

$$= \frac{3M}{4\pi R^3}\, 2\pi\, \frac{1}{5} R^5 \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{5} M R^2$$

S eq. (5.91)

Esfera como um conjunto de vários discos empilhados, cada disco de raio $\alpha \equiv R\,\mathrm{sen}\,\theta$ tem $\mathrm{d}I_z = \frac{1}{2}\alpha^2 \mathrm{d}M$, com

$$\mathrm{d}M(\alpha) = \rho \mathrm{d}V = \rho\pi\alpha^2 \mathrm{d}z = \frac{3M}{4\pi R^3}\pi R^2 \,\mathrm{sen}^2\theta\, \mathrm{d}(R\cos\theta)$$

$$I_z = \frac{1}{2}\int \alpha^2\,\mathrm{d}M(\alpha) = \frac{1}{2}R^2\,\frac{3}{4}M \int_{-1}^{1} \mathrm{sen}^4\theta\, \mathrm{d}(\cos\theta)$$

$$= \frac{3}{8}MR^2 \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^2 \mathrm{d}\xi = \frac{3}{8}MR^2\, 2\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}MR^2$$

Usando coordenadas cartesianas $\alpha = \sqrt{R^2 - z^2}$, $\mathrm{d}M(\alpha)$

$$= \rho \mathrm{d}V = \rho\pi\alpha^2 \mathrm{d}z = \frac{3M}{4\pi R^3}\pi (R^2 - z^2)\mathrm{d}z$$

$$I_z = \frac{1}{2}\int \alpha^2\,\mathrm{d}M(\alpha) = \frac{1}{2}\,\frac{3M}{4R^3} \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2\,\mathrm{d}z = \frac{2}{5}MR^2$$

Teoremas

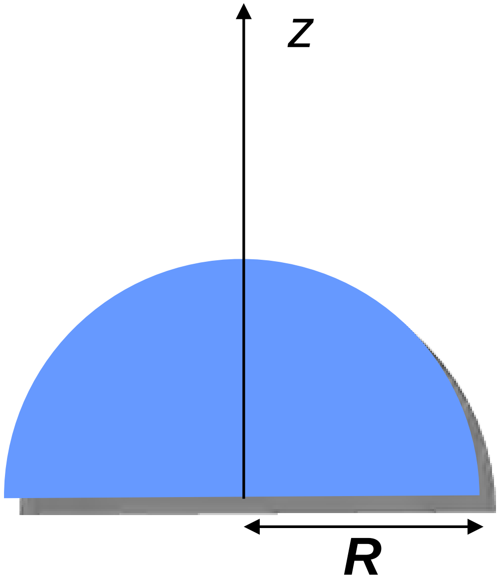
Teorema 1: S eq. (5.60), pg. 250
Se um corpo for simétrico em relação a um plano, o seu centro de massa estará neste plano.

Teorema 2: S eqs. (5.65-5.70), pg. 251
Se um corpo for composto de duas ou mais partes com centros de massa conhecidos, o centro de massa do corpo composto poderá ser calculado considerando suas partes componentes como partículas localizadas nos centros de massa respectivos.

Exemplo:

Calcular a coordenada do centro de massa de um hemisfério homogêneo de raio ***R***. Obs: utilize a simetria do hemisfério.

S eq. (5.71), pg. 253



Centro de massa: exemplos de cálculo em 3-D

Por simetria $X = Y = 0$, $Z = \frac{1}{M}\int z\rho\,\mathrm{d}V \neq 0$, $\rho = M/\frac{2}{3}\pi R^3$

$\mathrm{d}V = \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\varphi\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}\varphi\, r^2\mathrm{d}r\,\mathrm{d}(\cos\theta) = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$$Z = \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^R z\,\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r\,\mathrm{d}r = \frac{3}{2\pi R^3}2\pi\,\frac{1}{2}\int_0^R z(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{3}{2R^3}\left(R^2\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}R^4\right) = \frac{3}{8}R$$

S eq. (5.71)

$$Z = \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\cos\theta\,\mathrm{d}(\cos\theta)\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{3}{2\pi R^3}2\pi\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}R^4 = \frac{3}{8}R$$

$$Z = \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^R z\,\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{R^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-z^2-y^2}}\mathrm{d}x$$

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\pi a^2$$

$$= \frac{3}{\pi R^3}\int_0^R z\,\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}}\sqrt{R^2-z^2-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{3}{\pi R^3}\,\frac{\pi}{2}\int_0^R z(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{3}{8}R$$

Problema

Rolamento de uma esfera com e sem deslizamento (rolamento puro)

Uma esfera homogênea de massa m e raio r é lançada sobre uma superfície horizontal com velocidade de translação inicial horizontal $\boldsymbol{v}_0 = v_0 \boldsymbol{x}$ e sem rotação inicial. O coeficiente de atrito cinético entre a superfície e a esfera é μ e o campo gravitacional é $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{z}$. Tome o momento de inércia de uma esfera em relação a qualquer eixo que passe pelo seu CM como sendo $I^{\mathrm{CM}} = \beta m r^2$.

a) Obtenha a velocidade angular de rotação da esfera $\dot{\theta}(t)$ em torno de seu CM. Dica: considere o torque da força de atrito.

b) Determine o intervalo de tempo transcorrido desde o lançamento inicial até que a esfera comece a rolar sem deslizar. Dica: inicialmente o movimento não é de rolamento puro.

Problema

Rolamento de uma esfera com e sem deslizamento (rolamento puro)

c) Qual é a velocidade de translação da esfera quando se inicia o rolamento puro? Qual é a distância percorrida pela esfera desde o lançamento inicial até que se inicie o rolamento puro?
d) Verifique que o trabalho da força de atrito sobre o CM da esfera e através do seu torque correspondem, respectivamente, às variações da energia cinética translacional e rotacional da esfera.

Respostas: a) $\dot{\theta}(t)=\mu g t/\beta r$; b) $\Delta t=\beta v_0/[(1+\beta)\mu g]$; c) $\dot{X}(\Delta t)=v_0/(1+\beta)$, $\Delta X=(1+\beta/2)\beta v_0^2/[(1+\beta)^2\mu g]$; d) $W_{\text{transl}}=F_{\text{atr}}\Delta X=-\mu m g\Delta X=\Delta T_{\text{transl}}$, $W_{\text{rot}}=-rF_{\text{atr}}\Delta\theta=\beta m v_0^2/[2(1+\beta)^2]=\Delta T_{\text{rot}}$.

https://www.youtube.com/watch?v=W_yWqFYSggc
https://www.youtube.com/watch?v=vhb2b1gESRs
https://www.youtube.com/watch?v=dN5_NrkjQj8