F-315 (Mecânica Geral I)
Aula 15

Prof. Mário Noboru Tamashiro
Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339
e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html

Teoremas

<u>Teorema dos eixos paralelos</u> S eq.(5.81), pg. 255

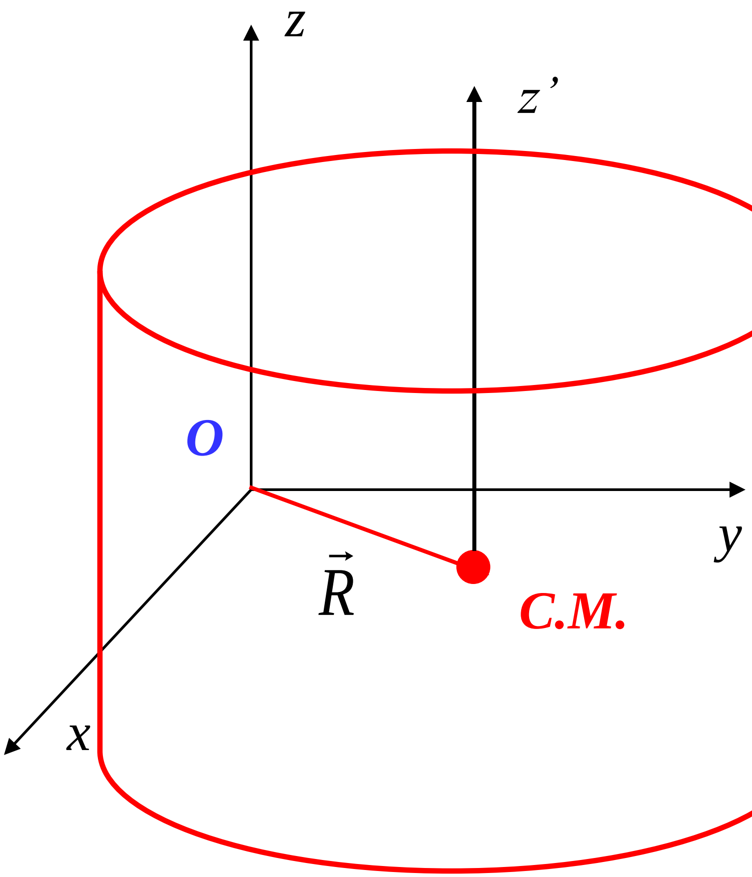
"O momento de inércia de um corpo em relação a um eixo dado, é igual ao momento de inércia em relação ao eixo paralelo que passa pelo centro de massa mais o momento de inércia em relação ao eixo dado, de uma partícula com a massa total do corpo localizada no seu centro de massa".

<u>Teorema dos eixos perpendiculares</u> S eq.(5.84), pg. 256

"A soma dos momentos de inércia de uma lâmina plana em relação a dois eixos perpendiculares, no plano da lâmina, é igual ao momento de inércia em relação a um eixo que passa pela interseção e é perpendicular à lâmina".

Momento de Inércia

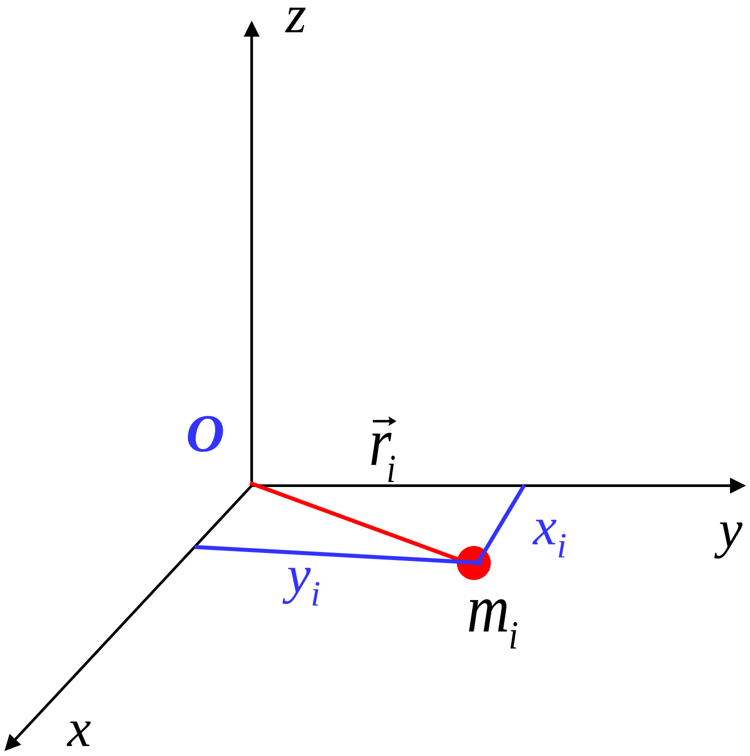
Teorema dos eixos paralelos



$$\boxed{I_z = I_{z'} + MR^2}$$

Momento de Inércia

Teorema dos eixos perpendiculares



$$I_z = \sum m_i r_i^2 = m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right)$$

Notar que aqui r_i denota a distância da partícula de massa m_i ao eixo z

Visto que $I_x = m_i y_i^2$ e $I_y = m_i x_i^2$

Obtemos $\boxed{I_z = I_x + I_y}$

Teorema dos eixos paralelos, S eq. (5.81)

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R}$, $\int \boldsymbol{r}' \rho \, \mathrm{d}V = \boldsymbol{0}$, versão contínua de $\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{0}$

$$x^2 + y^2 = (x' + X)^2 + (y' + Y)^2$$

$$I_z \equiv \int (x^2 + y^2) \rho \, \mathrm{d}V = \int (x'^2 + y'^2) \rho \, \mathrm{d}V + \int (X^2 + Y^2) \rho \, \mathrm{d}V + 2X \int x' \rho \, \mathrm{d}V + 2Y \int y' \rho \, \mathrm{d}V$$

S eq. (5.83)

$$I_z = I'_z + M(X^2 + Y^2), \qquad I'_z \equiv \int (x'^2 + y'^2) \rho \, \mathrm{d}V$$

Teorema dos eixos perpendiculares, S eq. (5.84)

S eq. (5.86)

$$I_x = \int y^2 \sigma \, \mathrm{d}A, \; I_y = \int x^2 \sigma \, \mathrm{d}A, \; I_z = \int (x^2 + y^2) \sigma \, \mathrm{d}A = I_x + I_y$$

Problema:

Calcular o momento de inércia de um anel fino em relação:

a) a um eixo que passa pela borda do anel ($\perp$ ao anel);

b) a um eixo que passa pelo centro do anel (no plano do anel);

c) a um eixo que passa pela borda do anel (no plano do anel).

Momento de inércia de anel fino em relação a vários eixos

Momento de inércia em relação ao eixo $\hat{z}$ que passa pelo CM, perpendicularmente ao plano do anel: $I_z^{\mathrm{CM}} = Ma^2$, pois todos os elementos de massa infinitesimais distam igualmente a do CM.

a) $I_z^{\mathrm{borda}} = I_z^{\mathrm{CM}} + Ma^2 = 2Ma^2$

b) $I_z^{\mathrm{CM}} = I_x^{\mathrm{CM}} + I_y^{\mathrm{CM}} = 2I_x^{\mathrm{CM}}$, por simetria

$I_x^{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2} I_z^{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2} Ma^2$

c) $I_x^{\mathrm{borda}} = I_x^{\mathrm{CM}} + Ma^2 = \frac{3}{2} Ma^2$

Itens a) e c) utilizam o teorema dos eixos paralelos; item b) utiliza o teorema dos eixos perpendiculares.

Momento de inércia em relação ao eixo $\hat{z}$ que passa pelo CM, perpendicularmente ao plano do anel: $I_z^{\text{CM}} = Ma^2$, pois todos os elementos de massa infinitesimais distam igualmente a do CM.

a) $I_z^{\text{borda}} = I_z^{\text{CM}} + Ma^2 = 2Ma^2$

b) $I_z^{\text{CM}} = I_x^{\text{CM}} + I_y^{\text{CM}} = 2I_x^{\text{CM}}$, por simetria

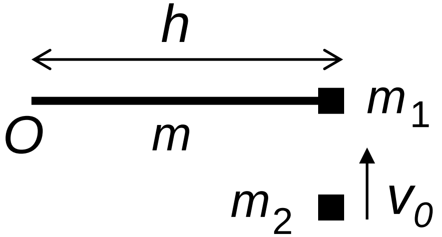
$$I_x^{\text{CM}} = \frac{1}{2} I_z^{\text{CM}} = \frac{1}{2} Ma^2$$

c) $I_x^{\text{borda}} = I_x^{\text{CM}} + Ma^2 = \frac{3}{2} Ma^2$ $\boxed{= I_z^{\text{borda}} - I_y^{\text{CM}}}$

Itens a) e c) utilizam o teorema dos eixos paralelos; item b) utiliza o teorema dos eixos perpendiculares.

Problema:

Uma haste rígida de comprimento ***h***, com massa ***m*** uniformemente distribuída, tem um pequeno bloco de massa m_1 preso em uma das extremidades. A haste é presa pela outra extremidade de forma que o conjunto haste-bloco possa girar livremente em torno do ponto ***O*** sobre uma mesa horizontal sem atrito. Estando o sistema inicialmente em repouso, outro pequeno bloco com massa m_2, dirige-se, pela superfície da mesa, perpendicularmente à haste com velocidade v_0, colidindo e ficando preso no bloco da haste. Calcule: a) o momento de inércia do sistema haste-blocos em relação ao eixo que passa por O perpendicularmente à mesa; b) a velocidade angular de rotação do sistema adquirida após a colisão; c) a fração da energia mecânica dissipada no processo de colisão.



Momento de inércia da haste em relação a O:

$$I^O_{\text{haste}} = \lambda \int_0^h x^2\,\mathrm{d}x = \frac{m}{h}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}mh^2$$

Momento de inércia do sistema em relação a O:

$$I^O_z = I^O_{\text{haste}} + I^O_1 + I^O_2 = \left(\tfrac{1}{3}m + m_1 + m_2\right)h^2$$

Conservação de L_z em relação a O:

$$L^O_z = m_2 v_0 h = I^O_z\,\omega \;\rightarrow\; \omega = \frac{m_2 v_0 h}{I^O_z} = \frac{3m_2 v_0}{h[m+3(m_1+m_2)]}$$

Impulso linear no choque: $\Delta P = \int F_R(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{m m_2 v_0}{2[m+3(m_1+m_2)]}$

Como a colisão é *inelástica*, a energia cinética ***não*** se conserva: $T_i = \frac{1}{2}m_2 v_0^2 \neq T_f = \frac{1}{2}I^O_z\,\omega^2 = \dfrac{3}{2}\dfrac{m_2^2 v_0^2}{m+3(m_1+m_2)} < T_i$

Fração dissipada: $\dfrac{\Delta T}{T_i} \equiv \dfrac{T_i - T_f}{T_i} = 1 - \dfrac{3m_2}{m+3(m_1+m_2)} = \dfrac{m+3m_1}{m+3(m_1+m_2)}$

Problema:

Considere um corpo rígido formado por duas partículas de mesma massa, *m*, situadas nas extremidades de uma haste de massa desprezível e comprimento *h*. O corpo gira em torno de um eixo que passa pelo centro da haste e é perpendicular à mesma. Em $t = 0$ o corpo gira com velocidade angular ω_0 e encontra-se submetido a um torque dissipativo proporcional à sua velocidade angular instantânea, da forma $\tau_z = -b\omega$, sendo b uma constante positiva. Calcular:

a) A velocidade angular do corpo como função do tempo.

b) A taxa de variação da energia cinética como função do tempo.

Halteres em rotação com torque dissipativo

Momento angular em relação ao CM:

$$L_z(t) = I_z\omega(t) = 2m\left(\frac{h}{2}\right)^2\omega(t) = \frac{1}{2}mh^2\omega(t)$$

Torque dissipativo (em relação ao CM):

$$\tau_z = -b\omega(t) = \dot{L}_z = \frac{1}{2}mh^2\dot{\omega}(t)$$

Solução da equação diferencial com a condição inicial $\omega(t=0) = \omega_0$: $\quad \omega(t) = \omega_0 \mathrm{e}^{-\gamma t}, \quad \gamma \equiv \dfrac{2b}{mh^2}$

Energia cinética de rotação:

$$T(t) = \frac{1}{2}I_z\omega^2(t) = \frac{1}{4}mh^2\omega^2(t) = \frac{b}{2\gamma}\omega_0^2\mathrm{e}^{-2\gamma t}$$

Taxa de variação da energia cinética:

$$\dot{T}(t) = -2\gamma T(t) = -b\omega_0^2\mathrm{e}^{-2\gamma t} = \dot{W}(\tau_z) = \tau_z\omega(t) = -b\omega^2(t)$$