F-315 (Mecânica Geral I)
Aula 16

Prof. Mário Noboru Tamashiro
Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339
e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html

Um cilindro de massa m, raio r e momento de inércia $I_z^{\mathrm{CM}} = \beta m r^2$, rola sem deslizar num plano inclinado que forma um ângulo θ com a horizontal. Qual é a aceleração a do centro de massa do cilindro?

Distância x percorrida ao longo do plano inclinado:

$x = \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow \ t = \sqrt{2x/a},\ \ v = at = a\sqrt{2x/a} = \sqrt{2ax}$

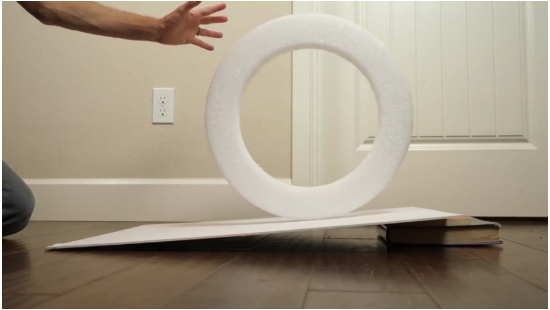
Condição de rolamento sem deslizamento: $v = \omega r$

$\Delta T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_z^{\mathrm{CM}} \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 (1+\beta) = -\Delta U = m g x \operatorname{sen}\theta$

$v = \sqrt{\frac{2gx\operatorname{sen}\theta}{1+\beta}} \rightarrow \ a = \frac{g\operatorname{sen}\theta}{1+\beta}$ (comparando com $v = \sqrt{2ax}$)

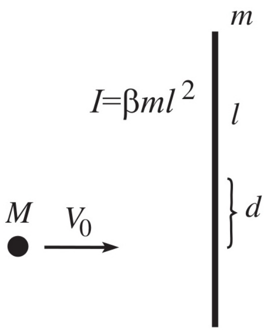
Cilindro sólido: $a = \frac{2}{3} g \operatorname{sen}\theta$, cilindro oco: $a = \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\theta$

Anomalia gravitacional (?)



Caso já tenha carregado o vídeo aqui, salve-o com o nome *gravitational_anomaly.mp4* no mesmo diretório deste arquivo pdf. Da próxima vez, basta clicar na foto acima.

Uma bola de massa M colide ***elasticamente*** com uma haste de momento de inércia $I_z^{\mathrm{CM}} \equiv I_z = \beta m \ell^2$. A bola tem velocidade inicial V_0 perpendicular à haste e colide a uma distância d do centro da haste. Descrever o movimento subsequente da bola (velocidade V) e da haste (velocidade v e frequência angular de rotação ω em torno do CM da haste).



Leis de conservação:

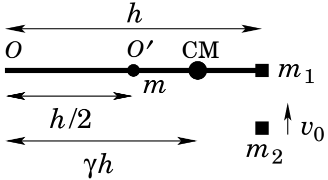
Momento linear $(F_{\mathrm{ext}} = 0)$: $P = MV_0 = MV + mv$

Momento angular $(\tau_{\mathrm{ext}} = 0)$: $L_z^{\mathrm{CM}} = MV_0 d = I_z\omega + MVd$

Energia (colisão elástica): $2E = MV_0^2 = I_z\omega^2 + MV^2 + mv^2$

$$\Delta \equiv 1 + \frac{m}{M} + \frac{d^2}{\beta\ell^2},\ V = \frac{V_0}{\Delta}\left(1 - \frac{m}{M} + \frac{d^2}{\beta\ell^2}\right),\ v = \frac{2V_0}{\Delta},\ \omega = \frac{2dV_0}{\beta\ell^2\Delta}$$

Problema de ***colisão inelástica*** da haste de massa m e duas massas m_1 e m_2 da aula 15 considerando agora a ***haste livre***. Qual é a frequência angular de rotação ω em torno do CM?



Massa total $M \equiv m + m_1 + m_2$

Posição do CM do sistema medida a partir de O:

$$X = \left(\tfrac{1}{2}m + m_1 + m_2\right)\tfrac{h}{M} \equiv \gamma h$$

Conservação do momento linear: $m_2 v_0 = MV \;\rightarrow\; V = \frac{m_2 v_0}{M}$

Momento de inércia em relação ao CM: $I_z^{\text{CM}} = I_{\text{haste}}^{\text{CM}} + I_1^{\text{CM}} + I_2^{\text{CM}}$

$$= \tfrac{1}{12}mh^2 + m\left(\gamma - \tfrac{1}{2}\right)^2 h^2 + (m_1 + m_2)(1-\gamma)^2 h^2 = \frac{mh^2}{12M}(4M - 3m)$$

Conservação de $L_z^{\text{CM}} = m_2 v_0 (1-\gamma)h = I_z^{\text{CM}}\omega \;\rightarrow\; \omega = \frac{6m_2 v_0}{h(4M-3m)}$

Formas alternativas: $L_z^{\text{O}'} = m_2 v_0 \frac{h}{2} = I_z^{\text{CM}}\omega + MV\left(\gamma - \tfrac{1}{2}\right)h$

$L_z^{\text{O}} = m_2 v_0 h = I_z^{\text{CM}}\omega + MV\gamma h$ (qualquer delas levam ao mesmo ω)

Problema de colisão da aula 15 revisitado (haste livre)

Mesmo problema considerando agora, além da ***haste livre,*** uma ***colisão elástica,*** isto é, as massas m_1 e m_2 ***não*** permanecem juntas após a colisão. Determine a velocidade v do bloco 2 após a colisão, a velocidade V do CM da haste-bloco 1 e a frequência angular de rotação ω em torno dele. Utilizando notação análoga do caso inelástico anterior (a figura é a mesma):

$$M \equiv m + m_1, \quad X = \left(\tfrac{1}{2}m + m_1\right)\frac{h}{M} \equiv \gamma h, \quad I_z^{\mathrm{CM}} = I_{\mathrm{haste}}^{\mathrm{CM}} + I_1^{\mathrm{CM}} = \tfrac{1}{12}mh^2$$
$$+ m\left(\gamma - \tfrac{1}{2}\right)^2 h^2 + m_1(1-\gamma)^2 h^2 = \frac{mh^2}{12M}(m + 4m_1)$$

Conservação do momento linear: $P = m_2 v_0 = MV + m_2 v$

Conservação de $L_z^{\mathrm{CM}} = m_2 v_0 (1-\gamma)h = I_z^{\mathrm{CM}}\omega + m_2 v(1-\gamma)h$

Conservação de $2E = m_2 v_0^2 = I_z^{\mathrm{CM}}\omega^2 + MV^2 + m_2 v^2$

Formas alternativas: $L_z^{\mathrm{O}'} = m_2 v_0 \frac{h}{2} = I_z^{\mathrm{CM}}\omega + MV\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)h + m_2 v \frac{h}{2}$

$L_z^{\mathrm{O}} = m_2 v_0 h = I_z^{\mathrm{CM}}\omega + MV\gamma h + m_2 v h$ (levam às mesmas respostas)

Mesmo problema considerando agora, além da ***haste livre,*** uma ***colisão elástica,*** isto é, as massas m_1 e m_2 ***não*** permanecem juntas após a colisão. Determine a velocidade v do bloco 2 após a colisão, a velocidade V do CM da haste-bloco 1 e a frequência angular de rotação ω em torno dele. Utilizando notação análoga do caso inelástico anterior (a figura é a mesma):

$$M \equiv m + m_1, \quad X = \left(\tfrac{1}{2}m + m_1\right)\frac{h}{M} \equiv \gamma h, \quad I_z^{\mathrm{CM}} = I_{\mathrm{haste}}^{\mathrm{CM}} + I_1^{\mathrm{CM}} = \tfrac{1}{12}mh^2$$
$$+ m\left(\gamma - \tfrac{1}{2}\right)^2 h^2 + m_1(1-\gamma)^2 h^2 = \frac{mh^2}{12M}(m + 4m_1)$$

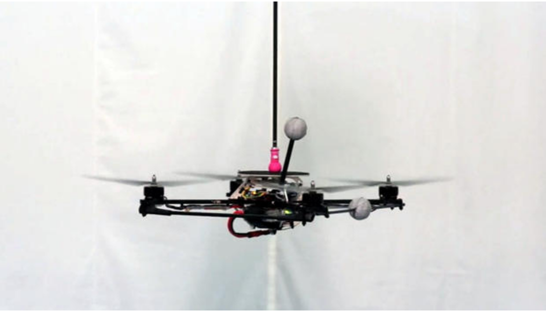
Conservação do momento linear: $P = m_2 v_0 = MV + m_2 v$

Conservação de $L_z^{\mathrm{CM}} = m_2 v_0 (1-\gamma)h = I_z^{\mathrm{CM}}\omega + m_2 v(1-\gamma)h$

Conservação de $2E = m_2 v_0^2 = I_z^{\mathrm{CM}}\omega^2 + MV^2 + m_2 v^2$

$$\Delta \equiv \frac{m+4(m_1+m_2)}{m_2}, \quad v = \left(1 - \frac{m}{4m_2} - \frac{m_1}{m_2}\right)\frac{4v_0}{\Delta}, \quad V = \left(\frac{m+4m_1}{m+m_1}\right)\frac{2v_0}{\Delta}, \quad \omega = \frac{12v_0}{h\Delta}$$

Acrobacias de drones com pêndulo invertido

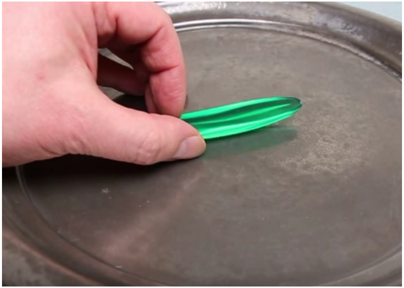


Caso já tenha carregado o vídeo aqui, salve-o com o nome *quadrocopter_pole_acrobatics.mp4* no mesmo diretório deste arquivo pdf. Da próxima vez, basta clicar na foto acima.

Pião invertido *(Tippe Top)*

Caso já tenha carregado o vídeo aqui, salve-o com o nome *tippe_top.mp4* no mesmo diretório deste arquivo pdf. Da próxima vez, basta clicar na foto acima à direita.

Pedra celta *(Rattleback)*



Caso já tenha carregado os vídeos aqui, ou aqui, salve-os com os nomes *rattleback_physics1.mp4* e *rattleback_physics2.mp4* no mesmo diretório deste arquivo pdf. Da próxima vez, basta clicar nas fotos acima.

Disco de Euler

Caso já tenha carregado os vídeos aqui, ou aqui, salve-os com os nomes *eulers_disk1.mp4* e *eulers_disk2.mp4* no mesmo diretório deste arquivo pdf. Da próxima vez, basta clicar nas fotos acima.