F-315 (Mecânica Geral I)
Aula 17

Prof. Mário Noboru Tamashiro
Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339
e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

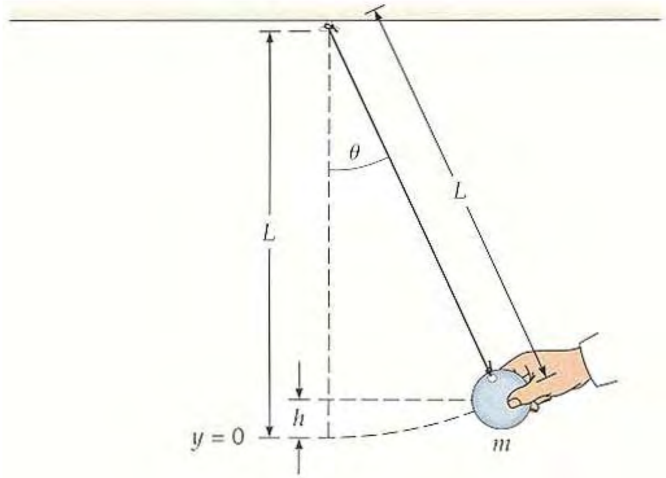
Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html

Pêndulo simples

S seção 5.3, pgs. 242/245

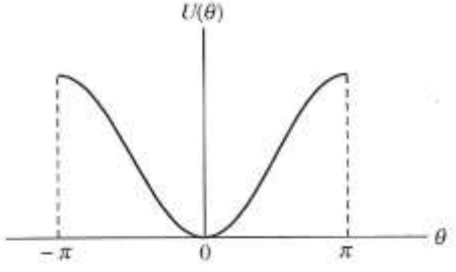
TM seção 4.4, pgs. 155/160

Pêndulo simples



$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$



Energia mecânica:

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$U_{\max} = 2mgl$$

$$I_z = m\ell^2, \;\; L_z = I_z\dot{\theta}, \;\; \dot{L}_z = I_z\ddot{\theta} = \tau_z = -mg\ell \,\mathrm{sen}\,\theta$$

TM eq. (4.21); S eq. (5.19)

Pêndulo simples: $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$

Para pequenas oscilações, $\theta \ll 1 \;\rightarrow\; \omega \approx \omega_0 \equiv \sqrt{g/\ell}$

$\theta(t) \approx \theta_0 \cos\omega_0 t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t \ll 1.$ Para θ arbitrário:

$$\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}\theta} \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{2g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\dot{\theta} = \pm\omega_0\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)} \;\rightarrow\; \omega_0\int_0^t \mathrm{d}t = \pm\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{2\sqrt{\mathrm{sen}^2\frac{\theta_0}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{\vartheta}{2}}}$$

$$\cos\theta = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

Mudança de variável: $\mathrm{sen}\,\frac{\vartheta}{2} = \mathrm{sen}\,\frac{\theta_0}{2}\,\mathrm{sen}\,\varphi \equiv k\,\mathrm{sen}\,\varphi$

$$\omega_0 t = -\int_{\pi/2}^{\arcsin\left(\frac{1}{k}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}} = K(k) - F\left(\arcsin\left(\tfrac{1}{k}\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\theta}{2}\right), k\right)$$

$K(k) \equiv F(\frac{\pi}{2}, k)$, $F(\psi, k) \equiv \int_0^\psi \mathrm{d}\varphi/\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}$ são as integrais elípticas de primeiro tipo, $K(k \to 1) \to \infty$

Solução explícita

$$\theta(t) = 2\arcsin\left[k\,\mathrm{sn}\big(K(k) - \omega_0 t, k\big)\right]$$

sn: função elíptica de Jacobi

Período exato $\tau = \dfrac{4K(k)}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{\omega_0}\left[1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right)^2 k^{2n}\right]$

$$= \tau_0\left[1 + \frac{1}{16}\,\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\,\theta_0^4 + \frac{173}{737280}\,\theta_0^6 + \cdots\right]$$

S (5.36), TM (4.29)

Oscilações não-lineares

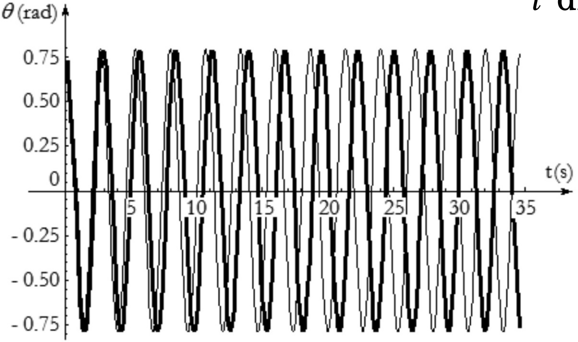
Período do pêndulo simples - aproximação

$$T \cong 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}+\frac{11}{3072}\theta_0^4+\ldots\right)$$

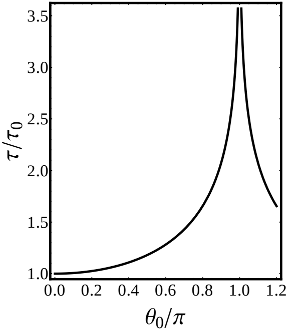
para $\theta_0 \approx 30^\circ = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}$ $\Rightarrow$ $\frac{\theta_0^2}{16} \approx 1.7\%$

Comparação das soluções exata (linha espessa) e aproximada de pequenas oscilações (linha delgada)

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4}\,\text{rad}, \;\; \omega_0 = \frac{3\pi}{4}\,\text{rad/s}, \;\; \tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2{,}66\,\text{s}, \;\; \tau = 1{,}04\tau_0$$



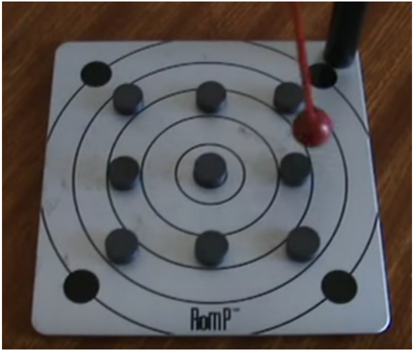
τ diverge para $\theta_0 \to \pi$



Balanço russo *(Russian Swing)*

Caso já tenha carregado os vídeos aqui, ou aqui, salve-os com os nomes *russian_swing1.mp4* e *russian_swing2.mp4* no mesmo diretório deste arquivo pdf. Da próxima vez, basta clicar nas fotos acima.

Pêndulo magnético (caótico)

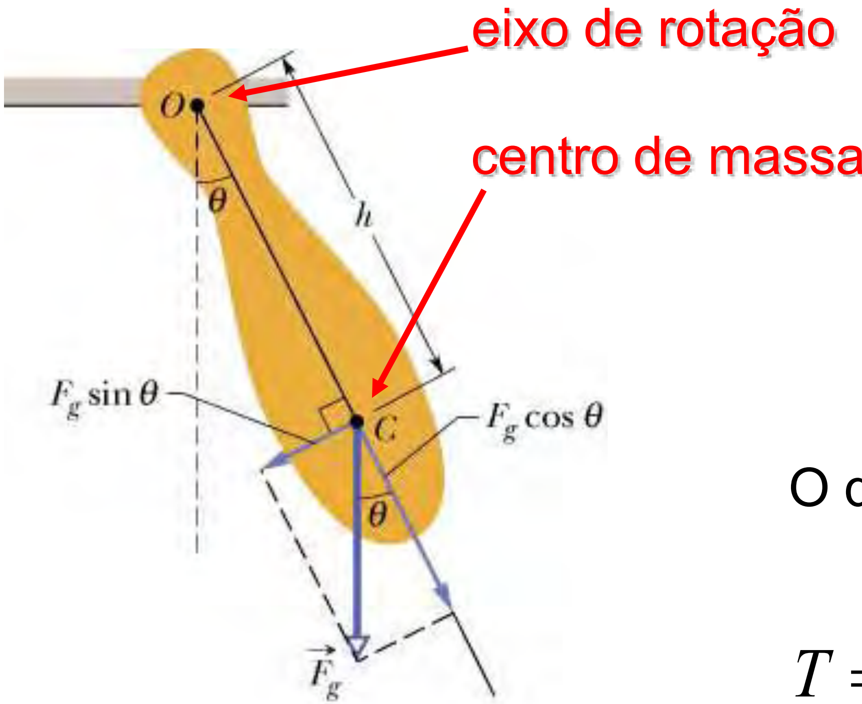


Caso já tenha carregado o vídeo aqui, salve-o com o nome *magnetic_pendulum.mp4* no mesmo diretório deste arquivo pdf. Da próxima vez, basta clicar na foto acima.

Pêndulo composto [físico]

S seção 5.4, pgs. 245/246

TM exemplo 11.2, pgs. 413/415



$$\operatorname{sen}\theta \approx \theta$$

para pequenas oscilações

$$I_z\ddot{\theta} \approx -Mgh\,\theta$$

O que resulta num período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{Mgh}}$$

Problemas

S seção 5.4, pg. 246

1) Podemos construir um pêndulo simples com o mesmo período de oscilação de um pêndulo físico dado. O comprimento deste pêndulo simples definirá o centro de oscilação ***O'*** do pêndulo composto, ou a distância do ponto de fixação até o centro de oscilação. O pêndulo composto é então pendurado pelo seu centro de oscilação. Calcular o seu novo centro de oscilação, ***O''***.

Distância $OO' = I_z^O/Mh$, distância $O'O'' = I_z^{O'}/Mh'$

Problema 1:

$$r(OO') \equiv \ell = h + h' = \frac{I_z^O}{Mh}, \quad r(O'O'') \equiv \ell' = \frac{I_z^{O'}}{Mh'}$$

Usando o teorema dos eixos paralelos:

$$I_z^O = Mh(h+h') = I_z^C + Mh^2, \quad I_z^{O'} = Mh'\ell' = I_z^C + Mh'^2$$

Subtraindo as duas equações:

$$h(h+h') - h'\ell' = h^2 - h'^2 \;\rightarrow\; \ell' = h + h' = \ell$$

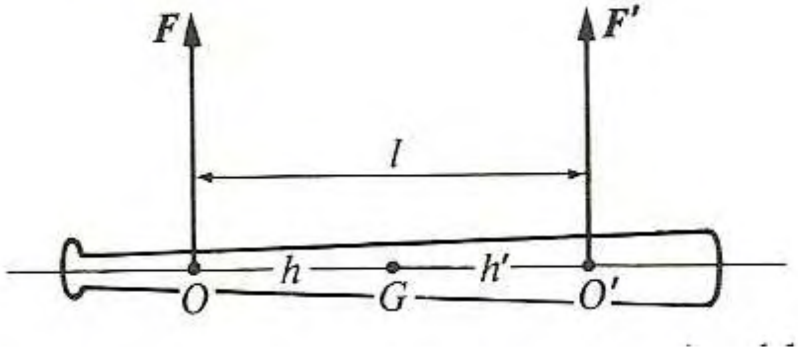
Ou seja, o novo centro de oscilação O'' coincide com O

A frequência de pequenas oscilações em torno de O' é a mesma: $\omega' \approx \omega_0' = \sqrt{\frac{Mgh'}{I_z^{O'}}} = \sqrt{\frac{g}{\ell'}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \sqrt{\frac{Mgh}{I_z^O}} = \omega_0 \approx \omega$

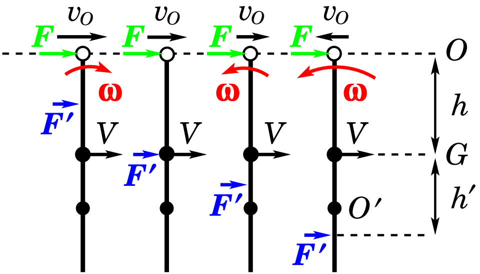
Problemas

S seção 5.4, pgs. 247/248

2) Calcular o centro de percussão de um taco: ponto em que o rebatedor deve acertar a bola com um taco para que a sensação da batida não seja transmitida para as mãos



Sistema associado equivalente ao problema 2:



$$MV = \int F'\,\mathrm{d}t + \int F\,\mathrm{d}t$$

$$L_z^G = I_z^G \omega = \int \tau_z^G\,\mathrm{d}t$$

$$= h' \int F'\,\mathrm{d}t - h \int F\,\mathrm{d}t$$

$$Mv_O = M(V - h\omega) = \left(1 - \frac{Mhh'}{I_z^G}\right) \int F'\,\mathrm{d}t + \left(1 + \frac{Mh^2}{I_z^G}\right) \int F\,\mathrm{d}t$$

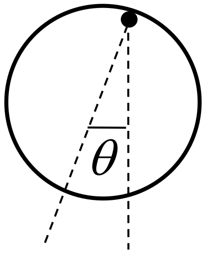
Para que $v_O = 0,\ F = 0:$

S eq. (5.51)

$$I_z^G = Mhh', \quad h' = r(O'G)$$

Problemas

3) Um pêndulo composto, formado por um anel homogêneo de raio ***R*** e massa ***m***, está suspenso num campo gravitacional uniforme, como mostrado na figura abaixo, de forma que possa girar em torno de uma haste perpendicular à página (eixo ***z***) que passa pela borda do anel (o pêndulo oscila no plano da página). Calcular o período de pequenas oscilações do pêndulo.



Problema 2: $\dot{L}_z = I_z^O \ddot{\theta} = \ell F' \;\rightarrow\; L_z = I_z^O \dot{\theta} = \ell \int F' \,\mathrm{d}t$

$\dot{P} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mh\dot{\theta}) = F + F'$, θ medido em relação ao ponto O

Integrando: $Mh\dot{\theta} = Mh\frac{\ell}{I_z^O} \int F' \,\mathrm{d}t = \int F \,\mathrm{d}t + \int F' \,\mathrm{d}t$

$Mh\ell = Mh(h+h') = I_z^O \left(1 + \frac{\int F \,\mathrm{d}t}{\int F' \,\mathrm{d}t}\right)$. Para que $\int F \,\mathrm{d}t = 0$:

$Mh(h+h') = I_z^O = I_z^G + Mh^2 \;\rightarrow$

S eq. (5.51)

$I_z^G = Mhh',\, h' = r(O'G)$

Problema 3: pêndulo físico (anel), $I_z^{\perp} = 2mR^2$ (borda)

Frequência de pequenas oscilações: $\omega \approx \sqrt{\frac{mgR}{I_z^{\perp}}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}$