F-315 (Mecânica Geral I)
Aula 2

Prof. Mário Noboru Tamashiro
Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339
e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html

Mecânica Newtoniana

2ª Lei de Newton

Partícula de massa ***m*** submetida a uma força $\boldsymbol{F_R}$

$$\vec{F}_R = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Força resultante $\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i$

Força constante – Peso

TM exemplo 2.6, pg. 63; S seção 3.11, pg. 136

Lançamento de projéteis:
partícula submetida somente à força peso -

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\,\hat{y}$$

cuja solução é:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2\,\hat{y}$$

Simplificação: $\vec{r}(0) = (0,0,0)$

$v_{0z} = 0$ ➡ movimento restrito ao plano x-y

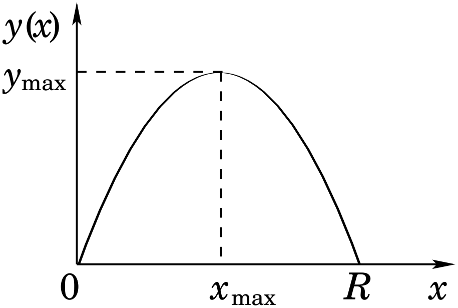
TM exemplo 2.6, pg. 63; S seção 3.11, pg. 136

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) \equiv \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{v}_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \hat{\boldsymbol{y}} \qquad \begin{cases} \bar{x}(t) = v_{0x} t \\ \bar{y}(t) = v_{0y} t - \tfrac{1}{2} g t^2 \\ \bar{z}(t) = 0 \end{cases}$$

Substituindo $t = \bar{x}/v_{0x}$ em $\bar{y}(t)$, obtém-se a parábola

S eq. (3.165) com $\boldsymbol{r}_0 = 0$

$$y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2 v_{0x}^2} x^2$$



Força constante – Peso

$$y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2$$ ⇒ parábola

Altura máxima: $$y_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

Alcance: $$x_{\text{alcance}} = \frac{2v_{0y}v_{0x}}{g}$$

TM exemplo 2.6, pg. 63; S seção 3.11, pg. 136

posição do máximo: $\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_{\max}} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{v_{0x}^2} x_{\max} = 0$

altura máxima: $y_{\max} = y(x_{\max}) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x_{\max} - \frac{g}{2v_{0x}^2} x_{\max}^2$

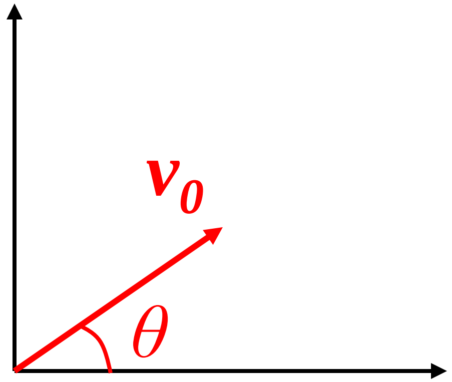
tempo de voo T: $\bar{y}(T) = v_{0y}T - \frac{1}{2}gT^2 = 0$

alcance horizontal R: $y(x=R) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} R - \frac{g}{2v_{0x}^2} R^2 = 0$

TM eqs. (2.37), (2.38); S eqs. (3.168), (3.167)

$$x_{\max} = \frac{v_{0x}v_{0y}}{g}, \; y_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}, \; T = \frac{2v_{0y}}{g}, \; R = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \bar{x}(T)$$

Força constante – Peso



$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$

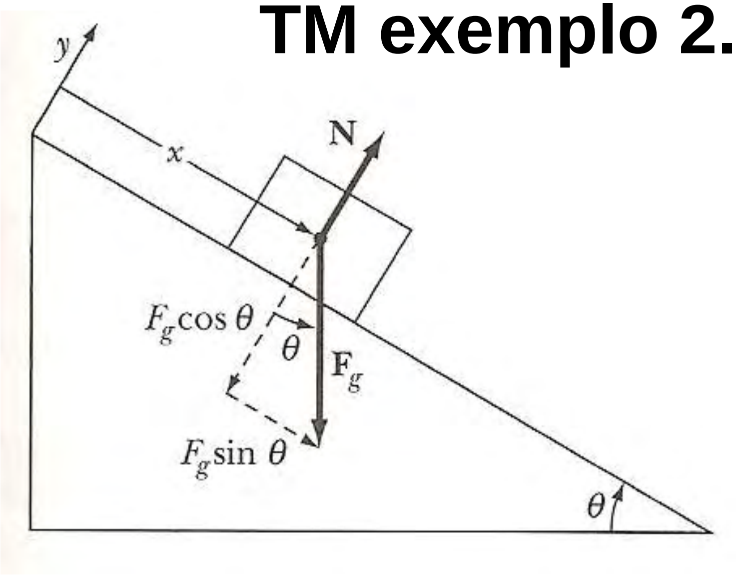
$$v_{0y} = v_0 \mathrm{sen}\,\theta$$

$$x_{alcance} = \frac{2v_{0y}v_{0x}}{g} = \frac{2{v_0}^2}{g}\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = \frac{{v_0}^2}{g}\mathrm{sen}\,2\theta$$

Para uma dada velocidade inicial de módulo v_0, o alcance do projétil será máximo para $\theta = \pi/4\ rad$

Força constante – Peso + atrito

TM exemplo 2.2, pg. 57



Força de atrito (módulo):

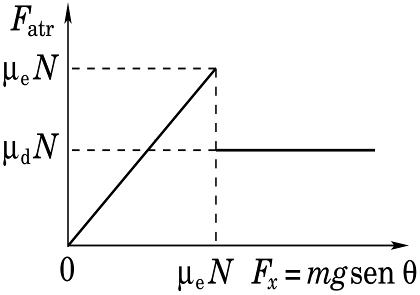
$$F_{at} = \mu N$$

Ângulo crítico:

$$\tan\theta_c = \mu_e$$

Aceleração:

$$a_x = g\left(\sin\theta - \mu_d \cos\theta\right)$$



$$F_R^{(y)} = N - mg\cos\theta = 0$$

Caso estático: $F_x \leq \mu_\mathrm{e} N$

$$F_R^{(x)} = F_x - F_\mathrm{atr} = 0$$

Caso dinâmico: $F_x > \mu_\mathrm{e} N$

$$F_R^{(x)} = F_x - F_\mathrm{atr} = ma_x$$

Caso estático: $mg\,\mathrm{sen}\,\theta \leq \mu_\mathrm{e} mg\cos\theta \;\rightarrow\; \mathrm{tg}\,\theta \leq \mu_\mathrm{e}$

TM eq. (2.15); S eq. (1.44)

Caso dinâmico: $a_x = g(\mathrm{sen}\,\theta - \mu_\mathrm{d}\cos\theta) > 0$

para $\mathrm{tg}\,\theta > \mu_\mathrm{e} > \mu_\mathrm{d}$

Esteira deslizante com caixa em rolamento puro

Caso já tenha carregado o vídeo aqui, salve-o com o nome *amazing_amazon_box.mp4* no mesmo diretório deste arquivo pdf. Da próxima vez, basta clicar na foto acima.

Força dependente do tempo: *F*(*t*)

Podemos calcular primeiro *v(t)*

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{m}\int_0^t F(t')dt'$$

Para depois calcularmos *x(t)*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t dt' v(t')$$

Força dependente do tempo: *F*(*t*)

Exemplo:

Uma partícula de massa *m* está submetida a uma força da forma

$$\vec{F}(t) = F_0(1+\sin\omega t)\hat{x}$$

Onde F_0 e ω são constantes. Calcular a posição da partícula, *x(t)*, em função do tempo para as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $v(0) = v_0$.

Exercício para aprendizagem

Considere uma partícula de massa *m* sob a ação de uma força da forma

$$\vec{F}(t) = F_0\hat{x} + A(\tau - t)\hat{y}$$

Calcular o vetor posição da partícula como função do tempo, para as condições iniciais $x(0) = x_0$; $v_x(0) = v_{x0}$; $y(0) = y_0$ e $v_y(0) = v_{y0}$.

Forças dependentes do tempo

Movimento em uma dimensão: $\boldsymbol{F}(t) = F_0(1 + \operatorname{sen}\omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$

$$m\ddot{x} = F(t) = F_0(1 + \operatorname{sen}\omega t)$$

$$m\dot{x} = mv_0 + \int_0^t \mathrm{d}t'\, F(t') = mv_0 + F_0 t - \frac{F_0}{\omega}(\cos\omega t - 1)$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \mathrm{d}t'\, \dot{x}(t') = x_0 + v_0 t + \frac{F_0}{2m}t^2 + \frac{F_0}{m\omega}t - \frac{F_0}{m\omega^2}\operatorname{sen}\omega t$$

Movimento em duas dimensões: $\boldsymbol{F}(t) = F_0\hat{\boldsymbol{x}} + A(\tau - t)\hat{\boldsymbol{y}}$

$$m\ddot{x} = F_0 \;\rightarrow\; x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{F_0}{2m}t^2$$

$$m\ddot{y} = A(\tau - t) \;\rightarrow\; \dot{y}(t) - v_{0y} = \frac{A}{m}\int_0^t \mathrm{d}t'(\tau - t') = \frac{A}{m}\tau t - \frac{A}{2m}t^2$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \mathrm{d}t'\, \dot{y}(t') = y_0 + v_{0y}t + \frac{A}{2m}\tau t^2 - \frac{A}{6m}t^3$$

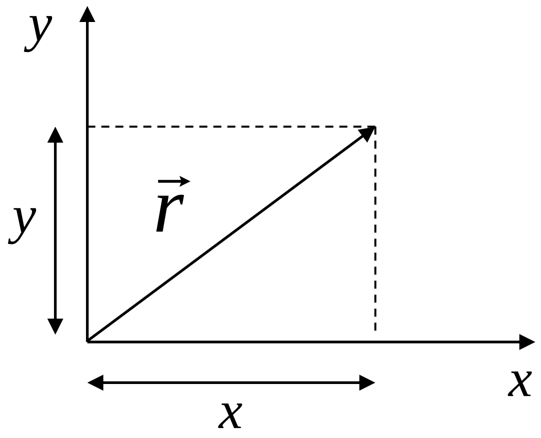
Mecânica Newtoniana

Cinemática no plano (2D)

Coordenadas cartesianas: x, y

Vetor posição

$$\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} = (x, y)$$



Velocidade

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y}$$

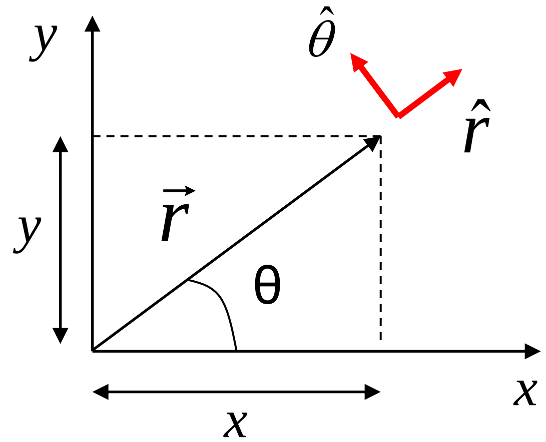
Aceleração

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y}$$

Mecânica Newtoniana

Cinemática no plano (2D)

Coordenadas polares: r, θ



$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$$

Vetor posição

$$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{x} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{y}$$

Coordenadas polares: versores

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{y} \qquad \frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta} \qquad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}$$

$$\hat{\theta} = -\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}$$

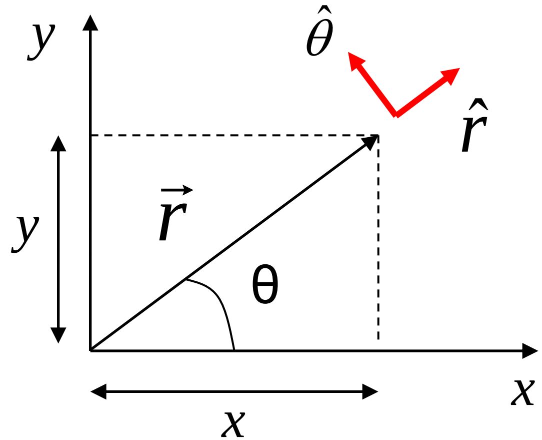
Vetor posição: $\boxed{\vec{r} = r\,\hat{r}}$

Obs: $\hat{r}\cdot\hat{r} = \hat{\theta}\cdot\hat{\theta} = 1, \quad \hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$

Mecânica Newtoniana

Cinemática no plano (2D)

Coordenadas polares: r, θ



$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$$

Vetor velocidade

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}}$$

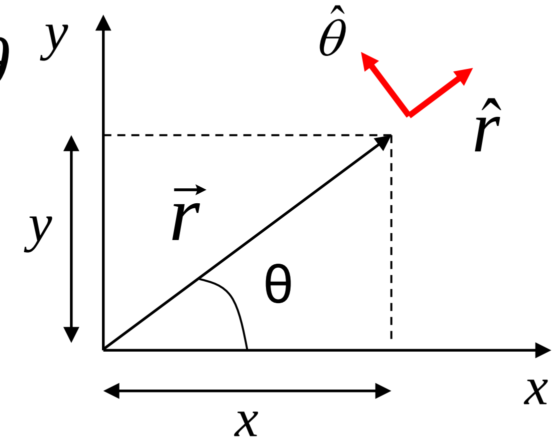
Notação:

$$\frac{df}{dt} \equiv \dot{f}; \ \frac{d^2 f}{dt^2} \equiv \ddot{f}$$

Mecânica Newtoniana

Cinemática no plano (2D)

Coordenadas polares: r, θ



$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$$

Vetor aceleração

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}}$$