F-315 (Mecânica Geral I)
Aula 20

Prof. Mário Noboru Tamashiro
Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

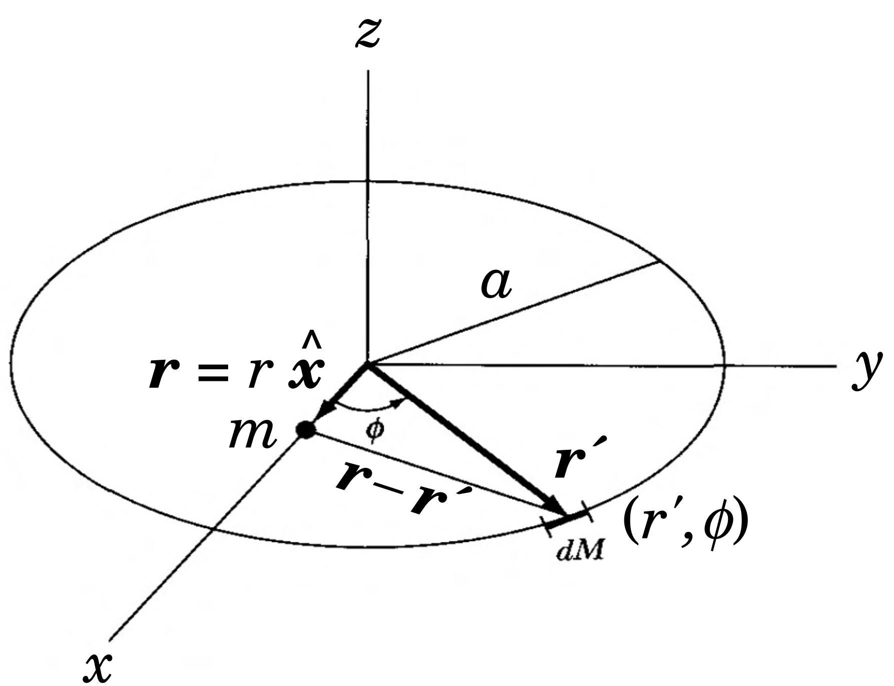
ramal 3521-5339
e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html

Problema 1

TM exemplo 5.3, pgs. 190-192

Considere um anel fino e homogêneo e circular, de massa *M* e raio *a*. Uma partícula de massa *m* é colocada no plano do anel. Encontrar a posição de equilíbrio da partícula e verificar se é ou não estável.



TM exemplo 5.3, pgs. 190–192

Potencial $\Phi(\boldsymbol{r}) = -G\int \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')\,r'\,\mathrm{d}\phi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ escolhendo $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{x}}$:

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}' = (r - a\cos\phi)\hat{\boldsymbol{x}} - a\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\phi = a^2\left(1+\xi^2-2\xi\cos\phi\right),\ \xi \equiv \frac{r}{a}$$

$$\Phi(r) = -G\lambda\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1+\xi^2-2\xi\cos\phi}} = -\frac{GM}{2\pi a}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1+\xi^2-2\xi\cos\phi}}$$

Note que $\cos\phi = \cos(-\phi) = -\cos(\pi-\phi) = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\phi}{2}$

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{\pi a}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1+\xi^2+2\xi\cos\phi}} - \frac{GM}{\pi a}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1+\xi^2-2\xi\cos\phi}}$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1+\xi^2\pm2\xi\cos\phi}} = \frac{1}{|1\pm\xi|}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1\mp\frac{4\xi}{(1\pm\xi)^2}\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\phi}{2}}} = \frac{2}{|1\pm\xi|}K\left(\frac{2\sqrt{\pm\xi}}{|1\pm\xi|}\right)$$

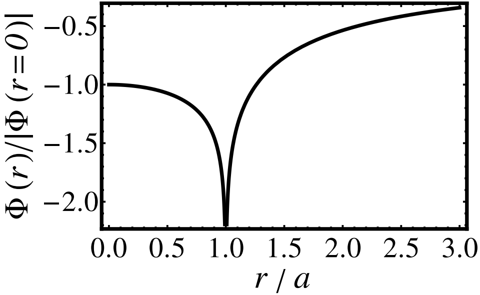
TM exemplo 5.3, pgs. 190–192

Potencial $\Phi(\boldsymbol{r}) = -G\int \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')\,r'\,\mathrm{d}\phi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ escolhendo $\boldsymbol{r} = r\,\hat{\boldsymbol{x}}$:

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}' = (r - a\cos\phi)\,\hat{\boldsymbol{x}} - a\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\phi = a^2\left(1+\xi^2-2\xi\cos\phi\right),\ \ \xi \equiv \frac{r}{a}$$

$$\Phi(r) = -\frac{2GM}{\pi a}\left[\frac{1}{1+\xi}K\left(\frac{2\sqrt{\xi}}{1+\xi}\right) + \frac{1}{|1-\xi|}K\left(\frac{2\sqrt{-\xi}}{|1-\xi|}\right)\right]$$



TM exemplo 5.3, pgs. 190–192

Potencial $\Phi(\boldsymbol{r}) = -G\int \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')\,r'\mathrm{d}\phi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ escolhendo $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{x}}$:

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}' = (r - a\cos\phi)\hat{\boldsymbol{x}} - a\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\phi = a^2\left(1+\xi^2-2\xi\cos\phi\right),\ \ \xi \equiv \frac{r}{a}$$

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= -\frac{GM}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1+\xi^2-2\xi\cos\phi}}\\ &= -\frac{GM}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\left[1+\xi\cos\phi+\frac{1}{2}\xi^2(3\cos^2\phi-1)+\cdots\right]\\ &= -\frac{GM}{2\pi a}\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\xi^2+\cdots\right)\\ &= -\frac{GM}{a}\left(1+\frac{1}{4}\xi^2+\cdots\right)\end{aligned}$$

TM eq. (5.28)

$V(r) \equiv m\Phi(r)$, $\ V'(r) \approx -\frac{GMmr}{2a^3} = 0 \ \rightarrow\ r = 0$ é um ponto de equilíbrio, $V''(r=0) = -\frac{GMm}{2a^3} < 0$ (equilíbrio instável)

Problema 2

Um buraco circular de raio *R* é efetuado num plano infinito de densidade superficial de massa σ. Considere apenas movimentos ao longo da linha que passa pelo centro do buraco e é perpendicular ao plano infinito.

a) Qual é a força que atua sobre uma partícula de massa *m* localizada a uma altura *h* sobre o centro do buraco?

b) Se a partícula parte do repouso bem próxima ao centro do buraco, mostre que ela executa movimento oscilatório e determine a frequência de pequenas oscilações.

c) Se a partícula parte do repouso de uma altura *h*, qual é a sua velocidade ao passar pelo centro do buraco?

Dica: Utilize os resultados da aula 18 para o disco finito com buraco.

Problema 3

Um planeta esférico homogêneo (densidade ρ_1 e raio R_1) está envolto por uma nuvem de poeira (densidade ρ_2 e raio externo R_2). Uma partícula de massa *m* está localizada à uma altitude *h* a partir da superfície do planeta, dentro da nuvem. Calcular a força gravitacional sobre a partícula.

Problemas

Problema 2:

a) $\boldsymbol{F}(h) = -2\pi\sigma G m h\,\hat{\boldsymbol{z}} \Big/ \sqrt{R^2 + h^2}$

b) $\omega \approx \sqrt{2\pi\sigma G/R}$

c) $\boldsymbol{v}(z=0) = -2\hat{\boldsymbol{z}}\sqrt{\pi\sigma G\left(\sqrt{R^2+h^2} - R\right)}$

Problema 3:

$$M_1 = \rho_1 V_1 = \tfrac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_1$$

$$m_2 = \rho_2 V_2 = \tfrac{4}{3}\pi\left[(R_1+h)^3 - R_1^3\right]\rho_2$$

$$\boldsymbol{F} = -\frac{G(M_1+m_2)m\hat{\boldsymbol{r}}}{(R_1+h)^2} = -\frac{4\pi G m\hat{\boldsymbol{r}}}{3(R_1+h)^2}\left[R_1^3(\rho_1-\rho_2) + (R_1+h)^3\rho_2\right]$$

Problema 4

Um túnel é perfurado através de um diâmetro de um planeta de raio *R*. Calcular a força gravitacional sobre uma partícula de massa *m* localizada, dentro do túnel, a uma distância *r* do centro do planeta para:

a) Planeta homogêneo de massa *M*

b) Planeta com densidade $\rho(r) = \rho_0 r / R$.

Expressar o resultado em termos da massa total do planeta, *M*.

Problema 4: $\mathcal{M}(r)$ é a massa acumulada até o raio r

a) $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, $\mathcal{M}(r) = \int\limits_{r'<r} \rho(r')\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi \int\limits_0^r \mathrm{d}r'\, r'^2 = M\left(\frac{r}{R}\right)^3$

$\boldsymbol{F}(r) = -\frac{G\mathcal{M}(r)m}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = -\frac{GMmr}{R^3}\hat{\boldsymbol{r}}$, $\omega \approx \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ (força linear)

$\tau \approx 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$ (Terra: 84 min, Lua: 108 min, Júpiter: 177 min)

b) $M = \frac{\rho_0}{R}\int\limits_{r'<R} r'\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' = \frac{\rho_0}{R} 4\pi \int\limits_0^R \mathrm{d}r'\, r'^3 = \pi\rho_0 R^3 \to \rho_0 = \frac{M}{\pi R^3}$

$\mathcal{M}(r) = \int\limits_{r'<r} \rho(r')\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' = \frac{M}{\pi R^4} 4\pi \int\limits_0^r \mathrm{d}r'\, r'^3 = M\left(\frac{r}{R}\right)^4$

$\boldsymbol{F}(r) = -\frac{G\mathcal{M}(r)m}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = -\frac{GMmr^2}{R^4}\hat{\boldsymbol{r}}$