F-315 (Mecânica Geral I)
Aula 21

Prof. Mário Noboru Tamashiro
Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339
e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

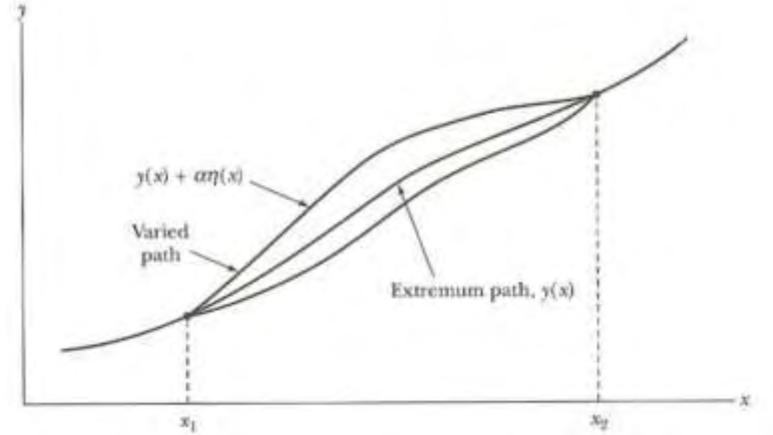
Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html

Cálculo Variacional

TM seção 6.2

Problema básico do cálculo variacional:
Determinar a função $y(x)$ tal que a integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\left\{y(x), y'(x); x\right\} dx$$



seja um <u>extremo</u>

A função $y(x)$ é variada visando encontrar um extremo para J.

Sendo x_1 e x_2 dois pontos fixos

Cálculo Variacional

TM seção 6.2

Parametrização – família de funções vizinhas a *y(x)*:

$$y \equiv y(\alpha, x)$$

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x) \qquad \text{com} \quad \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

Exemplo: $f = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$; $y(x) = x$; $x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 2\pi$

TM exemplo 6.1, pgs. 209-210

TM exemplo 6.1 (modificado), pgs. 209–210

Considere $f(x) = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2$, onde $y(x) = x$. À função $y(x)$ adicione $\alpha\eta(x) = \alpha x(x - x_2)$. Encontre $J(\alpha)$ entre os limites $x_1 = 0$ e $x_2 > 0$. Mostre que $J(0)$ é um mínimo.

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(\alpha, x) = 1 + \alpha(2x - x_2)$$

$$f(x) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(\alpha, x)\right]^2 = 1 + 2\alpha(2x - x_2) + \alpha^2(2x - x_2)^2$$

$$= 1 - 2\alpha x_2 + \alpha^2 x_2^2 + (1 - \alpha x_2) 4\alpha x + 4\alpha^2 x^2$$

$$J(\alpha) = \int_0^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = (1 - \alpha x_2)^2 x_2 + (1 - \alpha x_2) 2\alpha x_2^2 + \tfrac{4}{3}\alpha^2 x_2^3$$

$$= (1 - \alpha^2 x_2^2) x_2 + \tfrac{4}{3}\alpha^2 x_2^3 = x_2 + \tfrac{1}{3}\alpha^2 x_2^3 \geq x_2 = J(0)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} J(\alpha) = \tfrac{2}{3}\alpha x_2^3, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} J(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2} J(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = \tfrac{2}{3} x_2^3 > 0$$

Cálculo Variacional

TM seção 6.3

Equação de Euler

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$ **TM eq. (6.18)**

Onde tomamos α = 0, ou seja, as derivadas
são em relação a $y = y(0, x)$ e a $y' = y'(0, x)$

Cálculo Variacional

TM seção 6.3

Condição necessária para termos um extremo de J

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx = 0$$

TM seção 6.3 (equação de Euler), pgs. 210–211

$$y(\alpha,x) = y(0,x) + \alpha\eta(x), \qquad \frac{\partial y}{\partial\alpha} = \eta(x), \qquad \frac{\partial y'}{\partial\alpha} = \frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x} = \eta'(x)$$

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_1}^{x_2} f\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial\alpha}\right)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\right]\mathrm{d}x$$

Integrando por partes $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$:

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\bigg|_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$ Como deve valer $\forall\eta(x)$

Equação de Euler:

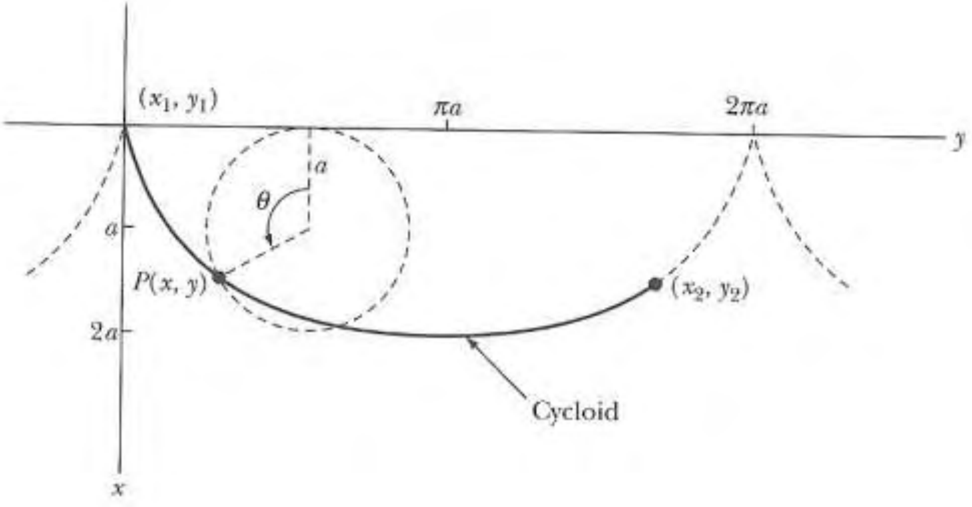
TM eq. (6.18); G eq. (2.11)

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Problemas

TM exemplo 6.2, pgs. 211-213

1) Uma partícula se move sob a ação de uma força constante (na vertical) entre o ponto (x_1, y_1) para um ponto em uma posição mais baixa (x_2, y_2). Encontrar o caminho tal que o percurso seja feito em um tempo <u>mínimo</u> (braquistócrona) A curva resultante é uma <u>ciclóide</u>.



Curva braquistócrona

Caso já tenha carregado o vídeo aqui, salve-o com o nome *brachistochrone.mp4* no mesmo diretório deste arquivo pdf. Da próxima vez, basta clicar na foto acima.

TM exemplo 6.2, pgs. 211–213; G pgs. 42–43

Problema da curva ***braquistócrona*** (Johann Bernoulli):

$$E = T + V = \tfrac{1}{2}mv^2 - mgx = 0 \quad \to \quad v = \sqrt{2gx}, \quad \boldsymbol{r} \equiv (x,y)$$

Minimizar $t = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{\sqrt{2gx}} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} f(y,y';x)\,\mathrm{d}x$

$f(y,y';x) \equiv \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}$ satisfaz a equação de Euler: $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} = \text{const.} \;\to\; y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{x}{2a-x}} \qquad \begin{cases} x = a(1-\cos\theta) \\ \mathrm{d}x = a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

$$y(x) = y(0) + \int_0^x \frac{x'\,\mathrm{d}x'}{\sqrt{x'(2a-x')}} = y(0) + a\int_0^\theta (1-\cos\theta')\,\mathrm{d}\theta' = y(0) + a(\theta - \mathrm{sen}\,\theta)$$

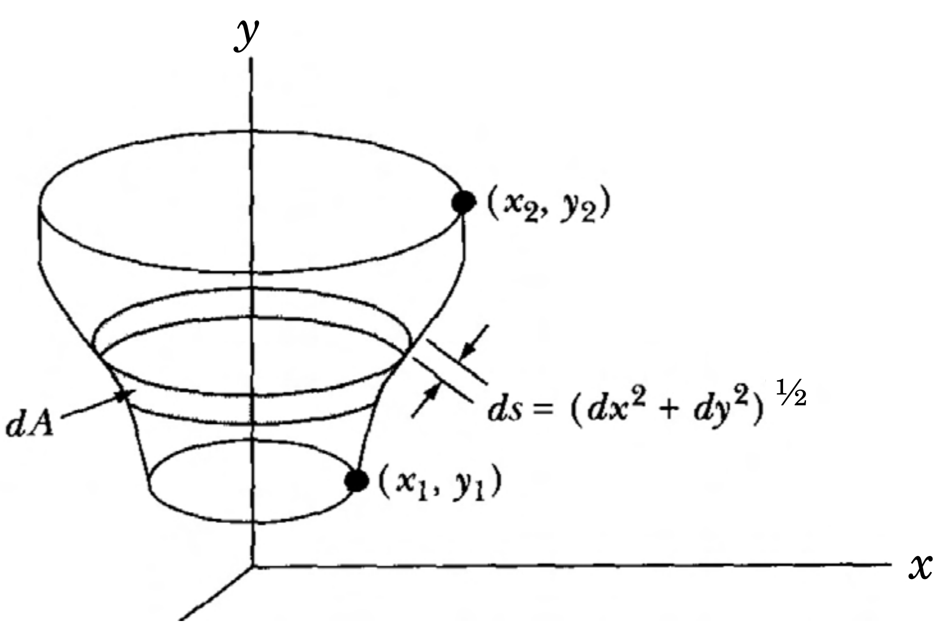
Ciclóide que passa pela origem $\boldsymbol{r} = (0,0)$: **TM eq. (6.26)**

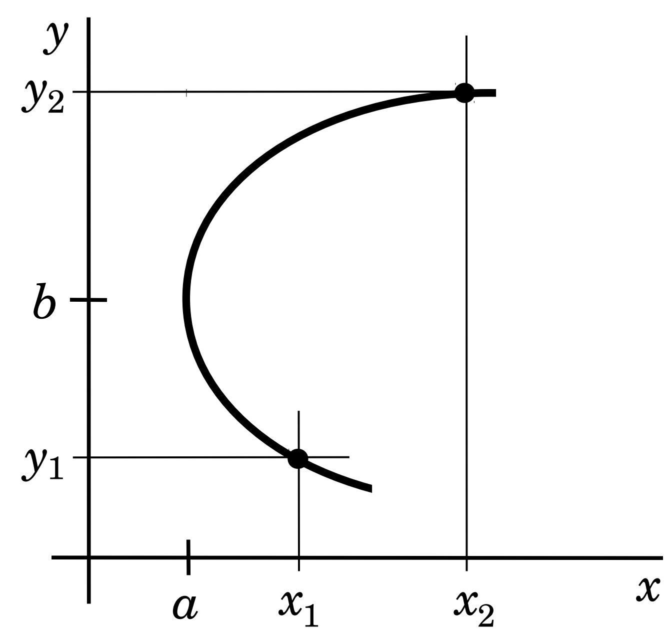
$$x = a(1-\cos\theta),\; y = a(\theta - \mathrm{sen}\,\theta),\; y(x) = 2a\,\mathrm{arcsen}\sqrt{\frac{x}{2a}} - \sqrt{x(2a-x)}$$

Problemas

TM exemplo 6.3, pgs. 213-215

2) Considere uma superfície gerada pela revolução de uma linha conectando dois pontos fixos, (x_1,y_1) e (x_2,y_2). Encontre a equação da curva tal que a área da superfície de revolução seja um mínimo. A curva resultante é denominada catenária.





TM exemplo 6.3, pgs. 213–215; G pgs. 40–42

Problema da superfície de revolução de área mínima:

$$\mathrm{d}A = 2\pi x\,\mathrm{d}s = 2\pi x\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = 2\pi x\,\mathrm{d}x\sqrt{1+y'^2}$$

Minimizar $A = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} f(y,y';x)\,\mathrm{d}x$

$f(y,y';x) \equiv x\sqrt{1+y'^2}$ satisfaz a equação de Euler:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = a = \text{const.}$$

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}} \;\rightarrow\; y(x) = y(a) + \int_a^x \frac{a\,\mathrm{d}x'}{\sqrt{x'^2-a^2}} \begin{cases} a\ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right) \\ \xi = x/a \end{cases}$$

Catenária com mínimo em $(y,x) = (b,a)$: **TM eq. (6.34)**

$$y(x) = b + a\,\mathrm{arccosh}\,\frac{x}{a}, \qquad x(y) = a\cosh\left(\frac{y-b}{a}\right)$$