F-315 (Mecânica Geral I)
Aula 23

Prof. Mário Noboru Tamashiro
Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339
e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html

Cálculo Variacional

TM seção 6.7

A notação δ

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha dx$$

TM eq. (6.86)

Notação: $\delta J \equiv \frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha$

$$\delta y \equiv \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha$$

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx$$

TM eq. (6.93)

Mecânica Lagrangiana

TM seção 7.2

O princípio de Hamilton

De todos os possíveis caminhos ao longo dos quais um sistema dinâmico pode movimentar-se de um ponto para outro, num intervalo de tempo, o caminho efetivamente seguido é aquele que minimiza a integral, no tempo, da diferença entre a energia cinética e potencial.

Mecânica Lagrangiana

TM seção 7.2

Matematicamente

Lagrangiana: $L = T - U$

TM eq. (7.2)

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} [T - U] dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i) dt = 0$$

TM eq. (7.3)

Equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \quad i = 1,2,3$$

TM eq. (7.4)

Mecânica Lagrangiana

TM seção 7.2

Notação:

$$x \rightarrow t$$

Coordenadas cartesianas, $i = 1,2,3$

$$y_i(x) \rightarrow x_i(t)$$

$$y'(t)_i \rightarrow \dot{x}_i(t)$$

Também:

$$f\left\{y_i(x), y'(t)_i; x\right\} \rightarrow L\left(x_i(t), \dot{x}_i(t); t\right)$$

Mecânica Lagrangiana

TM seção 7.3

Coordenadas generalizadas:

Conjunto de quantidades que especificam completamente o estado de um sistema, $q_1, q_2, \ldots q_j$

Para um conjunto de *n* partículas temos *3n* coordenadas retangulares. Se houver m vínculos teremos s = 3n – m graus de liberdade

Velocidades generalizadas: $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_j$

Mecânica Lagrangiana

TM seção 7.3

Equações de transformação

$$x_i = x_i\left(q_1, q_2, \ldots q_s, t\right) = x_i\left(q_j, t\right)$$

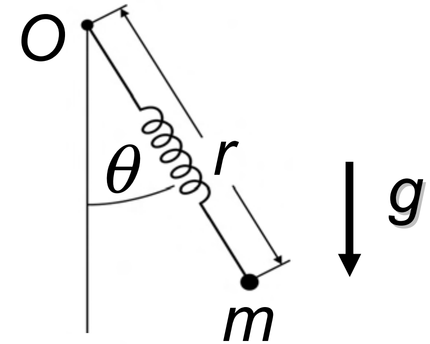
$$\dot{x}_i = \dot{x}_i\left(q_j, \dot{q}_j, t\right)$$

Transformações inversas

$$q_j = q_j\left(x_i, t\right) \qquad \dot{q}_j = \dot{q}_j\left(x_i, \dot{x}_i t\right)$$

Equações de vínculos $\quad f_k\left(x_i, t\right) = 0 \quad k = 1,2,\ldots m$

TM problema 7.15, pg. 281
Taylor problema 7.36, pg. 287
Greiner exemplo 15.14, pg. 308



Um pêndulo é composto de uma mola (massa desprezível, constante de mola k e comprimento de repouso b) presa a uma massa m numa de suas extremidades. A outra é presa a um pivô fixo O. O sistema pode girar em torno de O confinado a um plano vertical, sendo que a mola mantém-se reta (p.ex., enrolando-a em torno de uma haste rígida sem massa).

a) Obtenha a lagrangiana para este pêndulo, usando como coordenadas generalizadas o ângulo θ em relação à direção vertical e o comprimento total r da mola.

b) Obtenha as duas equações de Lagrange do sistema.

c) Determine o movimento de pequenas oscilações em torno das coordenadas de equilíbrio $\bar{r} = b + mg/k$ e $\bar{\theta} = 0$.

a) $T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2, \quad V = \frac{1}{2}k(r-b)^2 - mgr\cos\theta$

$$\mathscr{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(r-b)^2 + mgr\cos\theta$$

b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{r}}\right) = m\ddot{r} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial r} = \underbrace{mr\dot{\theta}^2}_{\text{centrífuga}} - k(r-b) + mg\cos\theta$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta} = -mgr\,\mathrm{sen}\,\theta$$

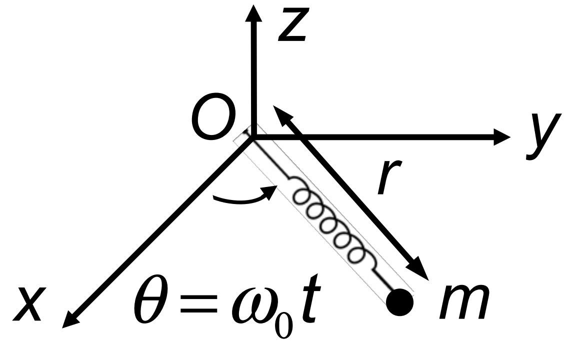
$$\rightarrow \quad mr\ddot{\theta} = -\overbrace{2m\dot{r}\dot{\theta}}^{\text{Coriolis}} - mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

c) $\delta r \equiv r - \bar{r}, \quad \delta\ddot{r} \approx -\frac{k}{m}\delta r \equiv -\omega^2\delta r, \quad \delta\theta \equiv \theta - \bar{\theta} = \theta,$

$$\ddot{\theta} \approx -\frac{g}{\bar{r}}\theta \equiv -\Omega^2\theta,\ \delta r(t) = \delta r(0)\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\dot{r}(0)\,\mathrm{sen}\,\omega t,$$

$$\theta(t) = \theta(0)\cos\Omega t + \frac{1}{\Omega}\dot{\theta}(0)\,\mathrm{sen}\,\Omega t,\ \omega \equiv \sqrt{k/m},\ \Omega \equiv \sqrt{g/\bar{r}}$$

TM problema 7.15, pg. 281 (modificado)



Considere agora que o pêndulo do problema anterior é deitado sobre um plano horizontal. Novamente a extremidade *O*, oposta àquela que contém a massa *m* na posição *r*, é fixada na origem. O sistema massa-mola gira agora, sem atrito, em torno do eixo vertical *z* com velocidade angular constante ω_0.

a) Obtenha a lagrangiana do sistema em termos de r a partir da lagrangiana expressa em coordenadas cartesianas.

b) Obtenha a equação de Lagrange e encontre as soluções.

c) Obtenha a posição de equilíbrio estável $\bar{r}$ e a frequência de pequenas oscilações em torno dela a partir da análise de estabilidade do potencial efetivo $V_{\text{eff}}(r) = ½\, m\dot{r}^2 - \mathscr{L}$.

TM probl. 7.15 (modificado), pg. 281

a) $\mathscr{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2+y^2} - b)^2$

$$x = r\cos\theta, \quad \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta = \dot{r}\cos\theta - r\omega_0\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \dot{y} = \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta = \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\omega_0\cos\theta$$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega_0^2) - \frac{1}{2}k(r-b)^2$$

b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{r}}\right) = m\ddot{r} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial r} = mr\omega_0^2 - k(r-b)$

(i) $\omega^2 \equiv \frac{k}{m} - \omega_0^2 > 0 \;\rightarrow\; \ddot{r} = -\omega^2 r + \frac{kb}{m}$

$$r(t) = \frac{kb}{m\omega^2} + \left[r(0) - \frac{kb}{m\omega^2}\right]\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\dot{r}(0)\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

(ii) $\lambda^2 \equiv \omega_0^2 - \frac{k}{m} > 0 \;\rightarrow\; \ddot{r} = \lambda^2 r + \frac{kb}{m}$

$$r(t) = -\frac{kb}{m\lambda^2} + \left[r(0) + \frac{kb}{m\lambda^2}\right]\cosh\lambda t + \frac{1}{\lambda}\dot{r}(0)\,\mathrm{senh}\,\lambda t$$

TM probl. 7.15 (modificado), pg. 281

(iii) $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \;\rightarrow\; \ddot{r} = \frac{kb}{m}, \quad r(t) = r(0) + \dot{r}(0)t + \frac{kb}{2m}t^2$

c) $\mathscr{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - V_{\text{eff}}(r), \quad V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{1}{2}k(r-b)^2 - \frac{1}{2}mr^2\omega_0^2$

$V'_{\text{eff}}(r=\bar{r}) = k(\bar{r}-b) - m\bar{r}\omega_0^2 = 0 \;\rightarrow\; \bar{r} = \frac{b}{1-m\omega_0^2/k}$

$V''_{\text{eff}}(r=\bar{r}) = k - m\omega_0^2 > 0$ para equilíbrio estável

$$V_{\text{eff}}(r) = V_{\text{eff}}(\bar{r}) + V'_{\text{eff}}(\bar{r})(r-\bar{r}) + \frac{1}{2!}V''_{\text{eff}}(\bar{r})(r-\bar{r})^2 + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}k(\bar{r}-b)^2 - \frac{1}{2}m\bar{r}^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}(k-m\omega_0^2)(r-\bar{r})^2 + \cdots$$

$\mathscr{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - V_{\text{eff}}(\bar{r}) - \frac{1}{2}(k-m\omega_0^2)(r-\bar{r})^2 + \cdots$ descreve um oscilador harmônico com $\omega^2 \approx \frac{V''_{\text{eff}}(\bar{r})}{m} = \frac{k}{m} - \omega_0^2$ em concordância com a solução exata do item b(i).