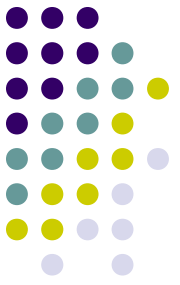


F-315 (Mecânica Geral I)

Aula 26



Prof. Mário Noboru Tamashiro

Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339

e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br

http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:

<http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html>

Teorema envolvendo a energia cinética $T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2$

$$\dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial t} \right)^2 + 2 \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{i,j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial t} \right)^2 + \sum_j \dot{q}_j \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_j}}_{b_j} + \sum_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j \underbrace{\sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \right)}_{a_{ij} = a_{ji}}$$

Sistemas / vínculos esclerônomos: $\mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha}(\mathbf{q}) \rightarrow \partial \mathbf{r}_{\alpha}(\mathbf{q}) / \partial t = 0$

T é uma *função homogênea quadrática* das velocidades generalizadas $\{\dot{q}_j\}$

TM eq. (7.121); S eq. (9.9)

$$T = \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

TM eq. (7.122); S eq. (9.122)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial(\dot{q}_i \dot{q}_k)}{\partial \dot{q}_j} = 2 \sum_i a_{ij} \dot{q}_i \rightarrow$$

$$\sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2 \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \dot{q}_i \right) \dot{q}_j = 2T$$

Conservação de energia: invariância temporal

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{L}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_j \left[\dot{q}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right). \quad \text{Se } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \text{ então}\end{aligned}$$

Função hamiltoniana \mathcal{H}
é uma constante, $\dot{\mathcal{H}} = 0$

TM eq. (7.128)

$$\mathcal{L} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \equiv -\mathcal{H}$$

Para $V = V(\mathbf{q})$, isto é, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$:

$$-\mathcal{H} = T - V - \underbrace{\sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j}_{2T} = -(T + V) = -E$$

$2T$ (TM seção 7.8): vínculos $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ devem ser esclerônomos, $\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})/\partial t = 0$

Para que $\mathcal{H} = E$: (a) vínculos $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ devem ser esclerônomos, $\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial t} = 0$; (b) $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$, não vale na presença de fricção/atrito e para a força de Lorentz $\mathbf{F} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$.

Condições para conservação da energia ($\dot{E} = 0$)

$$\mathcal{L} \equiv T - V, \quad E = T + V = 2T - \mathcal{L}, \quad \dot{E} = 2\dot{T} - \dot{\mathcal{L}}$$

$$\dot{E} = 2\dot{T} - \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(2T - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Energia E se conserva, $\dot{E} = 0$, se:

$$2T = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \text{constante}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

Conservação do momento linear: invariância translacional

Se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0 \rightarrow x_j$: coordenada cíclica ou ignorável

Momento (linear) conjugado $p_j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j}$ se conserva (é uma constante do movimento): $\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0$

Exemplo: massa m em campo gravitacional $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$, (x, y) : coordenadas cíclicas
 invariância translacional em $(x, y) \rightarrow \dot{p}_x = \dot{p}_y = 0$
 z não é uma coordenada cíclica, p_z não se conserva:

$$\dot{p}_z = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -mg \neq 0$$

Conservação do momento angular: invariância rotacional

Se q_j : coordenada angular cíclica \rightarrow momento angular conjugado p_j se conserva

Exemplo: massa m em potencial de simetria cilíndrica

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho)$, $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$, $\text{tg } \varphi \equiv y/x$
 (φ, z) são coordenadas cíclicas (rotações em φ e translações em z são invariantes)

$$L_z = p_\varphi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} \text{ se conserva } \rightarrow \dot{L}_z = 0$$

$$p_z \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \text{ se conserva } \rightarrow \dot{p}_z = 0$$

Exemplo: massa m em potencial de simetria azimutal

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - V(r, \theta), \quad \varphi \text{ é cíclica}$$

$$r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \theta \equiv z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{tg } \varphi \equiv y/x$$

$$L_z = p_\varphi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \text{ se conserva} \rightarrow \dot{L}_z = 0$$

Exemplo: massa m em potencial $V(r) = -k/r$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + k/r, \quad \varphi \text{ cíclica} \rightarrow \dot{L}_z = 0$$

$$L^2 \equiv p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} = m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \text{ se conserva}$$

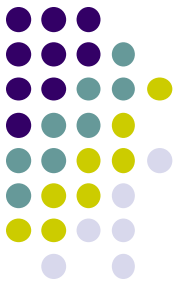
$$\text{para qualquer potencial central } V(r) = V(|\mathbf{r}|) \rightarrow \dot{L}^2 = 0$$

Vetor de Laplace–Runge–Lenz (G seção 3.9, pgs. 102–

$$106): \quad \mathcal{A} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk}{r} \mathbf{r} \text{ se conserva} \rightarrow \dot{\mathcal{A}} = \mathbf{0}$$

Mecânica Lagrangiana

TM seção 7.9



Energia mecânica:

Homogeneidade
do tempo $\rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right)$$

$$L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = cte \equiv -H \quad \text{TM eq. (7.128)}$$

\uparrow Função Hamiltoniana

Mecânica Lagrangiana

TM seção 7.9



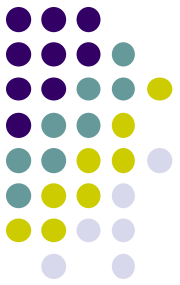
Condições: $\frac{\partial x_i}{\partial t} = 0$ \rightarrow $T = \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

E obtemos

$$H = T + U = E$$

Energia mecânica
conservada!



Mecânica Lagrangiana

TM seção 7.9

Leis de Conservação:

Homogeneidade
do tempo



Conservação
da Energia Mecânica

Homogeneidade
do espaço



Conservação
do Momento Linear

Isotropia do espaço



Conservação
do Momento Angular

Tomando a forma diferencial da função hamiltoniana \mathcal{H} como uma transformada de Legendre de $-\mathcal{L}$:

$$\mathcal{H} \equiv -\mathcal{L} + \sum_j p_j \dot{q}_j, \quad p_j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}, \quad \dot{p}_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$$

$$d\mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt - \sum_j \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right)}_{\dot{p}_j} + \sum_j (\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j)$$

Por outro lado, como a hamiltoniana $\mathcal{H} = \mathcal{H}(p_j, q_j, t)$

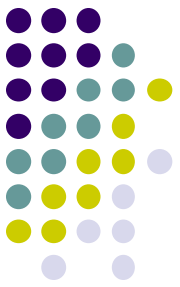
$$d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt + \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} dq_j \right). \quad \text{Comparando-as:}$$

Equações de Hamilton: TM eqs. (7.160)–(7.163)

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad -\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \dot{\mathcal{H}}$$

Equações de Hamilton

TM seção 7.10



Momentos generalizados

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{TM eq. (7.151)}$$

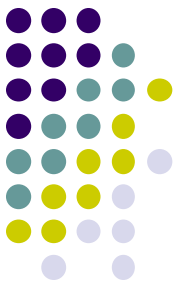
Usando as equações de Lagrange, obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

TM eq. (7.152)

Equações de Hamilton

TM seção 7.10



A função Hamiltoniana pode ser escrita como

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_k, p_k, t)$$

TM eq. (7.155)

Equações de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$
$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$$

TM eqs.
(7.160)

(7.161)