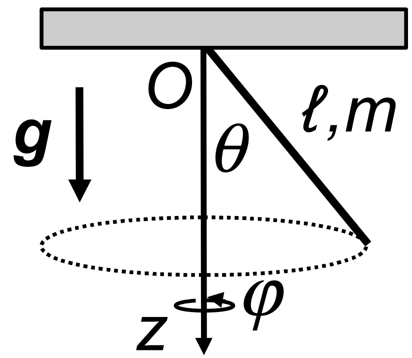
F-315 (Mecânica Geral I)
Aula 27

Prof. Mário Noboru Tamashiro
Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339
e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html

Pêndulo esférico físico
TM exemplo 7.12, pgs. 270-271
TM problema 7.31, pg. 284
S seção 9.7, pgs. 417-420



Considere uma haste de massa m e comprimento ℓ , suspensa por uma de suas extremidades O. A haste pode girar livremente em torno de O, ou seja, o movimento não se restringe a um plano vertical. Será conveniente definir $\Omega^2 = mg\ell/2I$.

a) Obtenha a lagrangiana do sistema $\mathscr{L}(\theta,\varphi,\dot{\theta},\dot{\varphi})$ e as equações de Euler-Lagrange associadas.

b) Verifique a existência de situações de equilíbrio estável. Obtenha a frequência de pequenas oscilações em torno delas.

c) Obtenha a hamiltoniana $\mathscr{H}$ e as equações de Hamilton.

d) Quais são as grandezas conservadas? Justifique.

e) Reanalise o sistema com o vínculo $\dot{\varphi} = \omega_0$ constante.

S seção 9.7, pgs. 417–420, TM problema 7.31, pg. 284

a) $\mathscr{L} = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}mg\ell\cos\theta, \quad I = \frac{1}{3}m\ell^2$

$$p_\theta = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}} = I\dot{\theta},\ \dot{p}_\theta = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta} = I\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{1}{2}mg\ell\operatorname{sen}\theta$$

$$p_\varphi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}} = I\dot{\varphi}\operatorname{sen}^2\theta,\ \dot{p}_\varphi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi} = 0 \ \ (\varphi \text{ é coord. cíclica})$$

$$I\ddot{\theta} = \frac{p_\varphi^2\cos\theta}{I\operatorname{sen}^3\theta} - \frac{1}{2}mg\ell\operatorname{sen}\theta$$

b) $V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta - \frac{1}{2}mg\ell\cos\theta = \frac{p_\varphi^2}{2I\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{1}{2}mg\ell\cos\theta$

$$V'_{\text{eff}}(\bar{\theta}) = 0 = -\frac{p_\varphi^2\cos\bar{\theta}}{I\operatorname{sen}^3\bar{\theta}} + \frac{1}{2}mg\ell\operatorname{sen}\bar{\theta} \ \longrightarrow\ \dot{\varphi}^2 = \frac{mg\ell}{2I\cos\bar{\theta}} = \text{cte.}$$

$$V''_{\text{eff}}(\bar{\theta}) = \frac{p_\varphi^2(2+\cos 2\bar{\theta})}{I\operatorname{sen}^4\bar{\theta}} + \frac{1}{2}mg\ell\cos\bar{\theta} = \frac{mg\ell}{2\cos\bar{\theta}}(1+3\cos^2\bar{\theta}) > 0$$

$$\forall\bar{\theta} < \frac{\pi}{2},\ \omega^2 = \frac{V''_{\text{eff}}(\bar{\theta})}{I} = \frac{mg\ell}{2I\cos\bar{\theta}}(1+3\cos^2\bar{\theta}) = \dot{\varphi}^2\left[1+3\left(\frac{\Omega}{\dot{\varphi}}\right)^4\right]$$

c) $\mathscr{H} = p_\theta\dot\theta + p_\varphi\dot\varphi - \mathscr{L} = \frac{p_\theta^2}{2I} + \frac{p_\varphi^2}{2I\,\mathrm{sen}^2\theta} - \frac{1}{2}mg\ell\cos\theta = E$

$\dot p_\theta = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\theta} = \frac{p_\varphi^2\cos\theta}{I\,\mathrm{sen}^3\theta} - \frac{1}{2}mg\ell\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \dot\theta = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{I}$

$\dot p_\varphi = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi} = 0$ (φ é coord. cíclica), $\dot\varphi = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{I\,\mathrm{sen}^2\theta}$

d) Momento angular $L_z = p_\varphi$ (φ é cíclica), hamiltoniana $\mathscr{H}$ (pois $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t} = 0$) e energia total $E = \mathscr{H}$, pois (θ,φ) são coordenadas fixas e $V = V(\theta)$.

e) $\mathscr{L} = \frac{1}{2}I(\dot\theta^2 + \omega_0^2\,\mathrm{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}mg\ell\cos\theta$, $\dot p_\varphi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega_0\,\mathrm{sen}^2\theta)$

$p_\theta = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot\theta} = I\dot\theta$, $\dot p_\theta = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta} = I\omega_0^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - \frac{1}{2}mg\ell\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\mathscr{H} = p_\theta\dot\theta - \mathscr{L} = \frac{p_\theta^2}{2I} - \frac{1}{2}I\omega_0^2\,\mathrm{sen}^2\theta - \frac{1}{2}mg\ell\cos\theta$, $\dot{\mathscr{H}} = 0$,

pois $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t} = 0$; $E = \mathscr{H} + I\omega_0^2\,\mathrm{sen}^2\theta$, $\dot E = \tau\omega_0 = \dot p_\varphi\omega_0 \neq 0$

$$V_{\text{eff}}(\theta) = -\tfrac{1}{2}mg\ell\cos\theta - \tfrac{1}{2}I\omega_0^2\,\text{sen}^2\,\theta, \qquad V'_{\text{eff}}(\bar{\theta}) = 0 =$$

$$= \tfrac{1}{2}mg\ell\,\text{sen}\,\bar{\theta} - I\omega_0^2\,\text{sen}\,\bar{\theta}\cos\bar{\theta} \;\rightarrow\; \bar{\theta} = 0, \pi, \arccos\frac{mg\ell}{2I\omega_0^2}$$

$$V''_{\text{eff}}(\bar{\theta}) = \tfrac{1}{2}mg\ell\cos\bar{\theta} - I\omega_0^2\cos 2\bar{\theta}$$

$$V''_{\text{eff}}(\bar{\theta} = 0) = \tfrac{1}{2}mg\ell - I\omega_0^2 > 0 \;\rightarrow\; \text{estável para } \Omega^2 > \omega_0^2$$

$$\omega^2 = \frac{V''_{\text{eff}}(0)}{I} = \Omega^2 - \omega_0^2$$

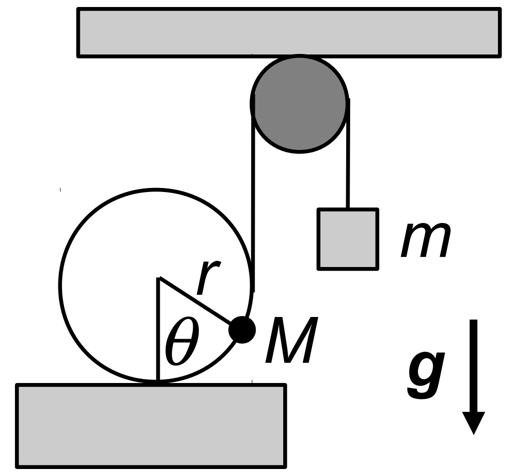
$$V''_{\text{eff}}(\bar{\theta} = \pi) = -\tfrac{1}{2}mg\ell - I\omega_0^2 < 0 \;\; (\text{instável})$$

$$V''_{\text{eff}}\left(\cos\bar{\theta} = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right) = \tfrac{1}{2}mg\ell\cos\bar{\theta} - I\omega_0^2(2\cos^2\bar{\theta} - 1)$$

$$= I\omega_0^2\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^4\right] > 0 \;\rightarrow\; \text{estável para } \omega_0^2 > \Omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{V''_{\text{eff}}(\bar{\theta})}{I} = \omega_0^2\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^4\right]$$

Kibble & Berkshire problema 10.2, pgs. 248-249 (modificado)



Uma massa M é presa a um aro circular de raio r de massa desprezível que encontra-se em um plano vertical. O aro é livre para rodar em torno de seu centro, mantido fixo. A massa M é presa a um fio inextensível que se enrola no aro, subindo verticalmente até uma polia ideal. Uma massa $m<M$ é pendurada na outra ponta do fio.

a) Obtenha a lagrangiana do sistema $\mathscr{L}(\theta,\dot{\theta})$ e a equação de Euler-Lagrange associada sem o vínculo.

b) Obtenha o ponto de equilíbrio estável e a frequência de pequenas oscilações em torno dele.

Kibble & Berkshire problema 10.2 (modificado), pgs. 248–249

a) $\mathscr{L} = \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz + Mgr\cos\theta,\ z - r\theta = z_0 = \text{cte.}$

$$\mathscr{L}(\theta,\dot{\theta}) = \tfrac{1}{2}(M+m)r^2\dot{\theta}^2 + mgr\theta + Mgr\cos\theta + mgz_0$$

$$p_\theta = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}} = (M+m)r^2\dot{\theta},\quad \dot{p}_\theta = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta} = mgr - Mgr\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{(M+m)r}(m - M\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

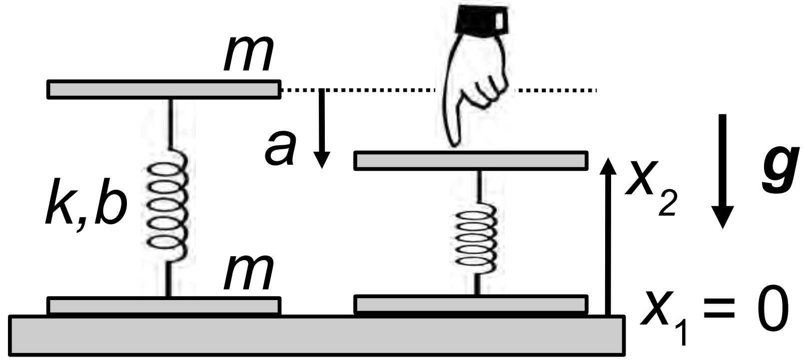
b) $V(\theta) = -mgr\theta - Mgr\cos\theta - mgz_0$

$$V'(\bar{\theta}) = -mgr + Mgr\,\mathrm{sen}\,\bar{\theta} = 0 \ \rightarrow\ \mathrm{sen}\,\bar{\theta} = \frac{m}{M}$$

$$V''(\bar{\theta}) = Mgr\cos\bar{\theta} = Mgr\sqrt{1-\left(\frac{m}{M}\right)^2} > 0 \ \rightarrow\ \text{estável}$$

$$\text{para } \bar{\theta} < \frac{\pi}{2},\ \omega^2 = \frac{V''(\bar{\theta})}{(M+m)r^2} = \frac{M}{M+m}\frac{g}{r}\sqrt{1-\left(\frac{m}{M}\right)^2} = \frac{g}{r}\sqrt{\frac{M-m}{M+m}}$$

Reação normal em sistema placas-mola apoiado no chão



Um sistema de duas placas de mesma massa m e uma mola (constante k e comprimento de repouso b) encontra-se em equilíbrio sob a ação da gravidade. A partir do equilíbrio comprime-se a mola da distância a e abandona-se o sistema.

a) Obtenha a lagrangiana $\mathscr{L}(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)$ e as equações de Euler-Lagrange associadas na presença do vínculo.

b) Obtenha $x_2(t)$ e a força normal de reação do chão mantendo $x_1(t)=0$ pelo método dos multiplicadores de Lagrange.

c) Qual é o valor mínimo de a para que a placa inferior se eleve do chão? Se $a>a_{min}$, quais são os valores de $(\dot{x}_1,x_2,\dot{x}_2)$ no instante de desprendimento da placa inferior do chão?

Reação normal em sistema placas-mola apoiado no chão

a) $\mathscr{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - mg(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - b)^2$

$f(x_1) = x_1 = 0 \;\rightarrow\; \dot{x}_1 = 0,\ \ddot{x}_1 = 0,\;\; p_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j$

$m\ddot{x}_1 = 0 = \dot{p}_1 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_1} = -mg + k(x_2 - x_1 - b) + \lambda$

$m\ddot{x}_2 = \dot{p}_2 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} = -mg - k(x_2 - x_1 - b)$

b) $x_2(0) = b - \frac{mg}{k} - a,\ \dot{x}_2(0) = 0 \rightarrow x_2(t) = b - \frac{mg}{k} - a\cos\omega t$

$\omega \equiv \sqrt{k/m},\;\; N(t) = \lambda(t) = 2mg + ka\cos\omega t$

c) Placa inferior se desprende quando $N(\tau_{\min}) = 0$

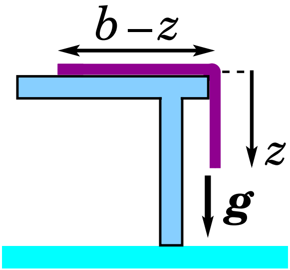
$\rightarrow \tau_{\min} = \frac{\pi}{\omega}$ e $a_{\min} = \frac{2mg}{k}$. Para $a > a_{\min}$, $N(\tau_0) = 0$

com $\tau_0 < \tau_{\min}$ tal que $\cos\omega\tau_0 = -\frac{2mg}{ka},\;\; \dot{x}_1(\tau_0) = 0$

$x_2(\tau_0) = b + \frac{mg}{k},\;\; \dot{x}_2(\tau_0) = a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega\tau_0 = a\omega\left[1 - \left(\frac{2mg}{ka}\right)^2\right]^{1/2}$

TM problema 7.39 (corda caindo de mesa), pg. 285

Uma corda flexível uniforme de massa m e comprimento total b repousa sobre uma mesa com uma de suas extremidades a uma distância z abaixo do canto da mesa. Somente a gravidade atua sobre a corda. Obtenha a equação de Euler–Lagrange e encontre a sua solução dadas as condições iniciais.



$$V(z) = -\int_0^z g z' \mathrm{d}m' = -\lambda g \int_0^z z' \mathrm{d}z' = -\frac{mgz^2}{2b}$$

$$\mathscr{L}(z,\dot{z}) = T(\dot{z}) - V(z) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{mgz^2}{2b}$$

$$p_z = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad \dot{p}_z = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial z} = \frac{mgz}{b} \quad \longrightarrow \quad \ddot{z} = \frac{gz}{b} \equiv \gamma^2 z, \; \gamma \equiv \sqrt{\frac{g}{b}}$$

$$z(t) = z_0 \cosh \gamma t + \frac{1}{\gamma}\dot{z}_0 \,\mathrm{senh}\, \gamma t$$