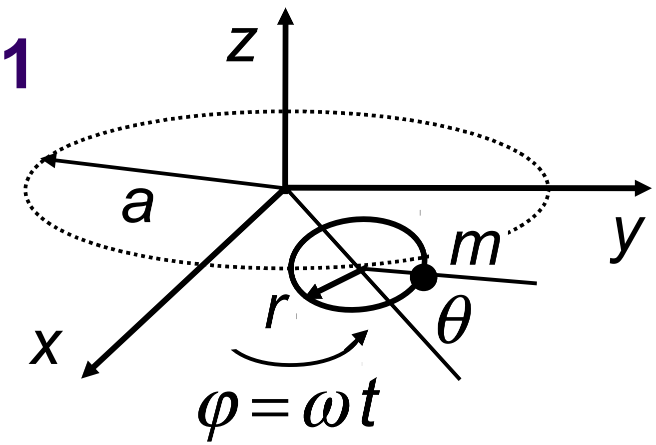
F-315 (Mecânica Geral I)
Aula 28

Prof. Mário Noboru Tamashiro
Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339
e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html

TM problema 7.11, pg. 281 (modificado)



Uma conta de massa *m* é livre para deslizar sem atrito ao longo de um aro circular de raio *r*. O plano do aro é horizontal e o seu centro se desloca numa circunferência de raio *a* com velocidade angular constante $\dot{\varphi} = \omega$.

a) Obtenha a lagrangiana do sistema $\mathscr{L}(\theta,\dot{\theta})$ e a equação de Euler-Lagrange associada sem o vínculo.

b) Obtenha o ponto de equilíbrio estável e a frequência Ω de pequenas oscilações em torno dele.

c) Obtenha a hamiltoniana $\mathscr{H}$ e as equações de Hamilton.

d) Quais são as grandezas conservadas? Justifique.

TM problema 7.11 (modificado), pg. 281

a) $x = a\cos\omega t + r\cos(\omega t+\theta)$, $y = a\,\mathrm{sen}\,\omega t + r\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta)$

$$\dot{x} = -a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t - r(\omega+\dot{\theta})\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta)$$

$$\dot{y} = a\omega\cos\omega t + r(\omega+\dot{\theta})\cos(\omega t+\theta)$$

$$T = \tfrac{1}{2}m\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \tfrac{1}{2}m\Big\{a^2\omega^2 + r^2(\omega+\dot{\theta})^2 + 2ar\omega(\omega+\dot{\theta})\times$$

$$\times\underbrace{[\mathrm{sen}\,\omega t\;\mathrm{sen}(\omega t+\theta)+\cos\omega t\;\cos(\omega t+\theta)]}_{\cos\theta}\Big\}$$

$$\mathscr{L}(\theta,\dot{\theta}) = \tfrac{1}{2}m\left[a^2\omega^2 + r^2(\omega+\dot{\theta})^2 + 2ar\omega(\omega+\dot{\theta})\cos\theta\right]$$

$$p_\theta = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}} = mr^2(\omega+\dot{\theta}) + mar\omega\cos\theta \to \dot{\theta} = \frac{p_\theta - mar\omega\cos\theta}{mr^2} - \omega$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta} = -mar\omega(\omega+\dot{\theta})\,\mathrm{sen}\,\theta = mr^2\ddot{\theta} - mar\omega\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

b) $\ddot{\theta} = -\frac{a}{r}\omega^2\,\mathrm{sen}\,\theta \;\to\; \bar{\theta} = 0,\;\; \Omega = \omega\sqrt{\frac{a}{r}}$

c) Do item a, temos $p_\theta = mr^2(\omega+\dot\theta) + mar\omega\cos\theta$

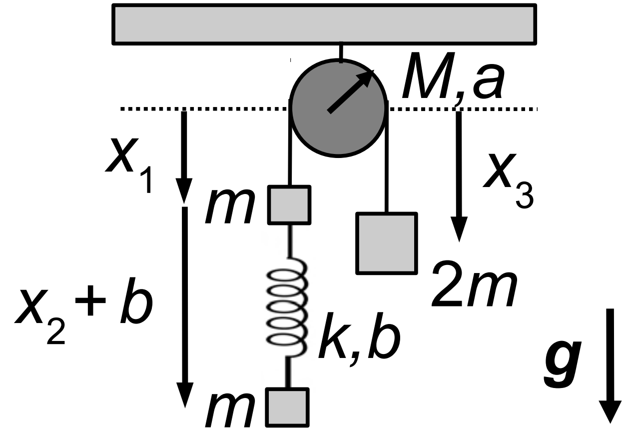
$$\mathscr{H} = p_\theta\dot\theta - \mathscr{L} = mr^2(\omega+\dot\theta)\dot\theta + mar\omega\dot\theta\cos\theta$$
$$-\tfrac{1}{2}m\left[a^2\omega^2 + r^2(\omega+\dot\theta)^2 + 2ar\omega(\omega+\dot\theta)\cos\theta\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}mr^2\dot\theta^2 - \tfrac{1}{2}m(a^2+r^2)\omega^2 - mar\omega^2\cos\theta$$
$$\mathscr{H}(\theta,p_\theta) = \frac{1}{2mr^2}(p_\theta - mar\omega\cos\theta)^2 - \tfrac{1}{2}\omega(2p_\theta + ma^2\omega),$$

usando $\dot\theta = \frac{1}{mr^2}(p_\theta - mar\omega\cos\theta) - \omega$ do item a.

$$\dot\theta = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_\theta} = \frac{1}{mr^2}(p_\theta - mar\omega\cos\theta) - \omega$$
$$\dot p_\theta = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\theta} = -\frac{a\omega}{r}(p_\theta - mar\omega\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta$$

d) Função hamiltoniana $\mathscr{H}$ (pois $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t} = 0$), mas $\mathscr{H} \neq E$.

Taylor problema 13.23, pgs. 553-554 (modificado) Máquina de Atwood modificada



Considere a máquina de Atwood modificada representada na figura acima, contendo duas massas iguais *m* à esquerda ligadas por uma mola (constante *k* e comprimento de repouso *b*). A polia tem massa *M* e raio *a* e o fio inextensível que liga as massas tem comprimento ℓ. O sistema é ideal (sem atrito).

a) Obtenha a lagrangiana do sistema $\mathscr{L}(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)$ e as equações de Euler-Lagrange associadas sem os vínculos.

b) Resolva as equações do movimento resultantes.

c) Obtenha a tensão no fio utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange.

d) Obtenha a hamiltoniana $\mathscr{H}$ e as equações de Hamilton.

Taylor problema 13.23 (modificado), pgs. 553–554

a) $\mathscr{L} = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}_1^2 + (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + 2\dot{x}_3^2\right] + \frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{x}_1}{a}\right)^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 + mgx_1$

$+ mg(x_1 + x_2 + b) + 2mgx_3, \quad x_3 = \ell - \pi a - x_1, \quad I = \frac{1}{2}Ma^2$

$\mathscr{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m\left(4\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2\right) + \frac{1}{4}M\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$

$+ mgx_2 + mg(2\ell - 2\pi a + b), p_1 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}_1} = \left(4m + \frac{M}{2}\right)\dot{x}_1 + m\dot{x}_2$

$\dot{p}_1 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = 0$ (x_1 é coordenada cíclica) $\rightarrow \ddot{x}_1 = -\frac{2m}{8m+M}\ddot{x}_2$

$p_2 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}_2} = m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2), \; \dot{p}_2 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} = -kx_2 + mg = m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)$

$= \left(1 - \frac{2m}{8m+M}\right)m\ddot{x}_2 = \left(\frac{6m+M}{8m+M}\right)m\ddot{x}_2, \quad \omega^2 \equiv \left(\frac{8m+M}{6m+M}\right)\frac{k}{m}$

$\ddot{x}_2 = -\omega^2\left(x_2 - \frac{mg}{k}\right)$

b) $x_2(t) = \frac{mg}{k} + \left[x_2(0) - \frac{mg}{k}\right]\cos\omega t + \frac{\dot{x}_2(0)}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t$

$x_1(t) = x_1(0) + \left[\dot{x}_1(0) + \frac{2m}{8m+M}\dot{x}_2(0)\right]t - \frac{2m}{8m+M}\left[x_2(t) - x_2(0)\right]$

$x_3(t) = \ell - \pi a - x_1(t)$

c) $\mathscr{L} = \frac{1}{2}m\left(2\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 + 2\dot{x}_3^2\right) + \frac{1}{4}M\dot{x}_3^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 + mgb$
$+ mg(2x_1 + x_2 + 2x_3),\ f(x_1, x_3) = x_1 + x_3 + \pi a - \ell = 0$

$p_1 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}_1} = m(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2),\ \dot{p}_1 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2mg + \lambda$

$p_2 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}_2} = m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2),\ \dot{p}_2 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} = -kx_2 + mg$

$p_3 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}_3} = \left(2m + \frac{M}{2}\right)\dot{x}_3,\ \dot{p}_3 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_3} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2mg + \lambda$

$\{x_j(t)\}$ encontrados no item b satisfazem às equações acima, com $\lambda(t) = m(2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 - 2g) = \left(\frac{4m+M}{8m+M}\right)m\ddot{x}_2 - 2mg$
$= -\left(\frac{4m+M}{6m+M}\right)kx_2(t) - \left(\frac{8m+M}{6m+M}\right)mg,$ que é a tensão no fio.

d) $p_1 = \left(4m + \frac{M}{2}\right)\dot{x}_1 + m\dot{x}_2,\ p_2 = m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2).$ Resolvendo $\{\dot{x}_j\}$:

Taylor problema 13.23 (modificado), pgs. 553–554

$$\dot{x}_1 = \frac{2(p_1-p_2)}{6m+M},\ \dot{x}_2 = \frac{p_2}{m} - \frac{2(p_1-p_2)}{6m+M},\ p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2 = \left(4m+\frac{M}{2}\right)\dot{x}_1^2$$

$$+2m\dot{x}_1\dot{x}_2 + m\dot{x}_2^2 = 2T = \frac{2(p_1-p_2)^2}{6m+M} + \frac{p_2^2}{m}$$

$$\mathscr{H} = p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2 - \mathscr{L} = \frac{(p_1-p_2)^2}{6m+M} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_2^2 - mgx_2 + V_0$$

$$V_0 \equiv V(x_2=0) = -mg(2\ell - 2\pi a + b)$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x_1} = 0\ \ (x_1 \text{ é coordenada cíclica})$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x_2} = -kx_2 + mg$$

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_1} = \frac{2(p_1-p_2)}{6m+M}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m} - \frac{2(p_1-p_2)}{6m+M}$$

em acordo com as equações obtidas anteriormente.

Curiosidades:
Comportamento caótico/irregular em sistemas mecânicos "simples"

Pêndulos duplos

https://www.youtube.com/watch?v=N6cwXkHxLsU
https://www.youtube.com/watch?v=AwT0k09w-jw

Pêndulo triplo

http://imgur.com/r6FZfxr

Máquina de Atwood pendular

https://www.youtube.com/watch?v=3ajr5Fb2i1g

Cadeia de esferas metálicas

https://www.youtube.com/watch?v=6ukMId5fIi0
http://www.nature.com/news/physicists-explain-gravity-defying-chain-trick-1.14523
http://perso.ens-lyon.fr/jean-christophe.geminard/a_chain_and_a_pulley.htm
http://perso.ens-lyon.fr/jean-christophe.geminard/a_chain_falling_from_a_table.htm