F-315 (Mecânica Geral I)
Aula 4

Prof. Mário Noboru Tamashiro
Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339
e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html

Problema: método perturbativo

TM exemplo 2.7, eqs. (2.50) e (2.53), pgs. 67/68

Calcule a equação da trajetória para o problema do lançamento de projétil considerando a resistência do ar pequena (no sentido de $bx \ll mv_{0x}$).

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t - \tfrac{1}{2}\, kv_{0x}\, t^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}(g + kv_{0y})\, t^2$$

$$T = (2v_{0y}/g)\,(1 - kv_{0y}/3g) \qquad \textbf{TM eq. (2.50)}$$

$$R = \underbrace{(2v_{0x}v_{0y}/g)}_{R_0 \text{ (sem resist. ar)}}\,(1 - 4kv_{0y}/3g) \qquad \textbf{TM eq. (2.53)}$$

TM exemplo 2.7 (método perturbativo), pg. 67

No limite $\xi \equiv kx/v_{0x} \ll 1$: $-\ln(1-\xi) \approx \xi + \frac{1}{2}\xi^2$

$$y(x) \approx -\frac{g}{k^2}\left[\frac{kx}{v_{0x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{kx}{v_{0x}}\right)^2\right] + \left(\frac{g}{k} + v_{0y}\right)\frac{x}{v_{0x}}$$

recupera-se a trajetória para o caso $k = 0$:

S eq. (3.165)

$$y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2$$

No limite $kt \ll 1$: $1 - \mathrm{e}^{-kt} \approx kt - \frac{1}{2}(kt)^2 + \frac{1}{6}(kt)^3$

$$x(t) \approx \frac{v_{0x}}{k}\left[kt - \tfrac{1}{2}(kt)^2\right] = v_{0x}t - \tfrac{1}{2}kv_{0x}t^2$$

$$y(t) \approx -\frac{gt}{k} + \frac{g + kv_{0y}}{k^2}\left[kt - \tfrac{1}{2}(kt)^2\right] = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}\left(g + kv_{0y}\right)t^2$$

TM exemplo 2.7 (método perturbativo), pg. 67

$$kT \approx \left(1+\frac{kv_{0y}}{g}\right)\left[kT-\tfrac{1}{2}(kT)^2+\tfrac{1}{6}(kT)^3\right]$$

$$1 \approx \left(1+\frac{kv_{0y}}{g}\right)\left[1-\tfrac{1}{2}kT+\tfrac{1}{6}(kT)^2\right]$$

$$\approx 1+k\left(\frac{v_{0y}}{g}-\tfrac{1}{2}T\right)+k^2\left(\tfrac{1}{6}T^2-\frac{v_{0y}T}{2g}\right)$$

Coeficiente linear em k se anula $\rightarrow$

TM eq. (2.37)

$$T_0=\frac{2v_{0y}}{g}$$

Em primeira ordem em k: $T_0-T+kT_0\left(\tfrac{1}{3}T_0-\frac{v_{0y}}{g}\right)=0$

TM exemplo 2.7 (método perturbativo), pg. 67

Tempo de voo aproximado:

TM eq. (2.50)

$$T \approx T_0 \left(1 - \frac{kv_{0y}}{3g}\right)$$

Alcance $R \equiv x(t = T)$ em primeira ordem em k:

$$R \approx v_{0x}T - \tfrac{1}{2}kv_{0x}T^2 \approx v_{0x}T_0 \left(1 - \frac{kv_{0y}}{3g}\right) - \tfrac{1}{2}kv_{0x}T_0^2$$

$$= v_{0x}T_0 \left(1 - \frac{kv_{0y}}{3g} - \tfrac{1}{2}kT_0\right) \rightarrow$$

TM eq. (2.53)

$$R \approx \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}\left(1 - \frac{4kv_{0y}}{3g}\right)$$

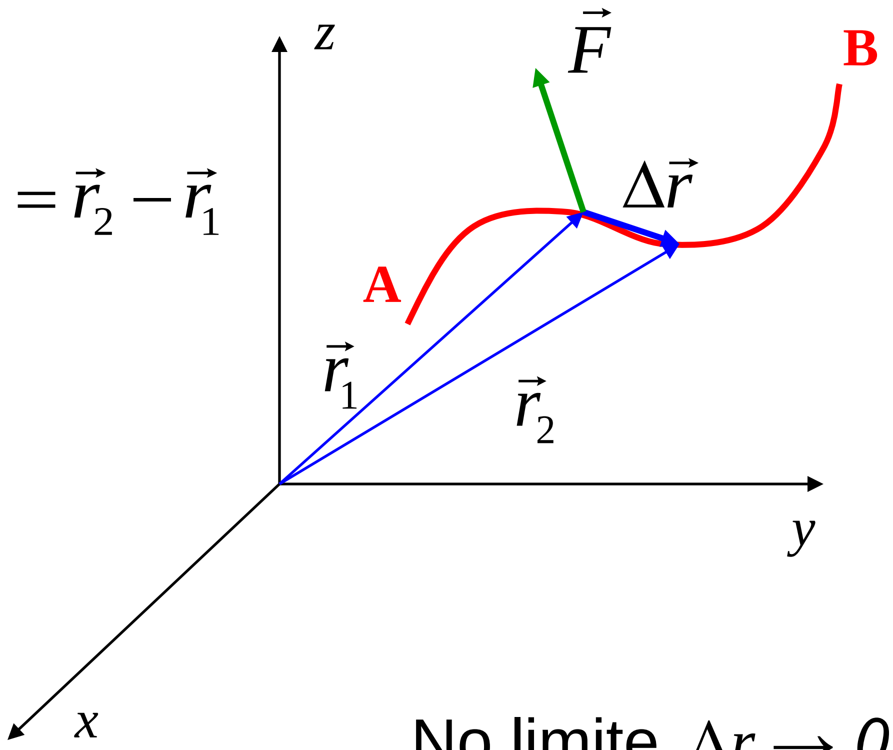
Alcance R_0 para $k = 0$:

TM eq. (2.54)

$$R_0 = v_{0x}T_0 = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

Força dependente somente da posição – trabalho de uma força

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



Trabalho de uma força do tipo $\vec{F}(\vec{r})$

$$W \approx \sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

No limite $\Delta r \rightarrow 0$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Integral de caminho

Análise vetorial

Operador nabla (coordenadas cartesianas)

$$\vec{\nabla}(\ ) = \frac{\partial(\ )}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial(\ )}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial(\ )}{\partial z}\hat{z}$$

Gradiente de f :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

Mas $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$

Análise vetorial

Rotacional de $\vec{A}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

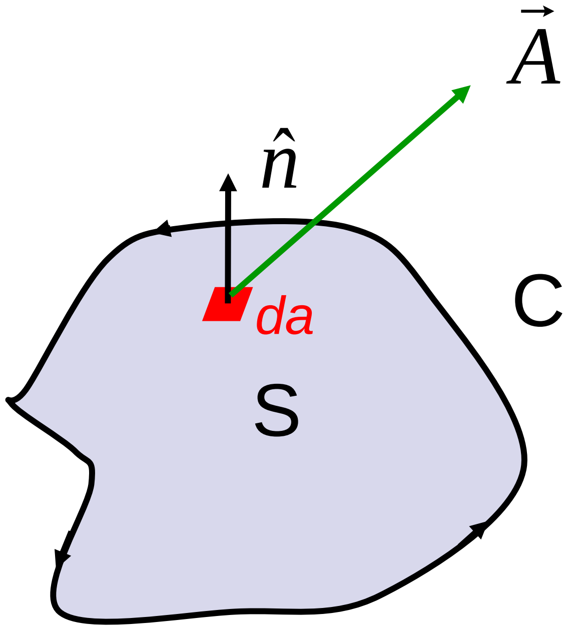
Análise vetorial

Teorema de Stokes (rotacional)

Rotacional de $\vec{A}$: $\quad \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{A}\right) \cdot \hat{n}\, da = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Fluxo de
rot *A* através de S



Energia potencial

Se $\nabla \times \vec{F} = 0$ Pelo teorema de Stokes

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n}\, da = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Num circuito **FECHADO**

F é então denominada <u>força conservativa</u>
e podemos definir
a função escalar <u>energia potencial *V*</u> tal que

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V$$

$$\Delta V = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Teorema trabalho-energia cinética

2ª Lei de Newton (1D) $$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt}$$

Multiplicando os dois lados por $dx = \frac{dx}{dt}dt$ obtemos

$$Fdx = m\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dt}dt = m\frac{dv}{dt}vdt = mvdv = md\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

Teorema trabalho-energia cinética

A quantidade $\boxed{T = \dfrac{mv^2}{2}}$ é denominada

Energia Cinética $\longrightarrow$ <u>quantidade escalar</u>

Em particular, se $F = 0$, teremos T = cte

A quantidade $\boxed{dW = Fdx}$ é o

Trabalho realizado pela força *F* em um deslocamento *dx*

Teorema trabalho-energia cinética

Integrando os dois lados da equação

$$\int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{1}^{2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = T_2 - T_1 = \Delta T$$

Teorema Trabalho – Energia Cinética:

Durante o movimento de um corpo, a variação de sua energia cinética é igual ao trabalho da força resultante

$$\boxed{\frac{m{v_2}^2}{2} - \frac{m{v_1}^2}{2} = \int_{x_1}^{x_2} F dx}$$

Teoremas de conservação

Teorema trabalho-energia cinética

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Onde $T = \frac{1}{2}mv^2$ é definida como energia cinética

Conservação da energia mecânica E

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + V(\vec{r}_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + V(\vec{r}_2) = E$$

cte

Teoremas de conservação

- Conservação do momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}} \Rightarrow \vec{p}\ \text{cte se}\ \vec{F} = 0$$

- Conservação do momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}} \Rightarrow \vec{L}\ \text{cte se}\ \vec{\tau} = 0$$

Torque de uma força em relação à origem $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

Método da energia

Podemos escrever, em uma dimensão, por exemplo

$$\frac{mv^2}{2} + V(x) = E \quad \Rightarrow \quad v = \pm\sqrt{\frac{2\left[E - V(x)\right]}{m}}$$

Para a posição teremos:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2\left[E - V(x)\right]}{m}}} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

Importante manter o sinal até considerar as condições iniciais

Método da energia: força F constante em 1-D

Força F constante $\rightarrow V(x) = -\int_0^x \mathrm{d}x' F(x') = -Fx$

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + V(x) = \tfrac{1}{2}mv_0^2 + V(x_0)$$

$$\tfrac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = V(x_0) - V(x) = F(x - x_0)$$

$$v^2(x) = v_0^2 + \tfrac{2F}{m}(x - x_0) = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\pm\sqrt{v^2(x)}} = \frac{\mathrm{d}x}{\pm\sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)}}$$

$$\frac{1}{a}\sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)}\Big|_{x_0}^{x} = t - t_0$$

$$v_0^2 + 2a(x - x_0) = [v_0 + a(t - t_0)]^2$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$