F-315 (Mecânica Geral I)
Aula 5

Prof. Mário Noboru Tamashiro
Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339
e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html

Exemplo: Sistema massa-mola (oscilador harmônico simples)

S pg. 52

Força elástica: $F(x) = -kx$

Neste caso $$V(x) - V(0) = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

zero do potencial → escolha

$$\boxed{V(x) = \frac{kx^2}{2}}$$ Energia potencial elástica

Exemplo: oscilador harmônico (S pgs. 52–53)

$$V(x) = \tfrac{1}{2}kx^2, \quad \tfrac{1}{2}mv^2(x) = E - V(x) = E - \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\pm\sqrt{v^2(x)}} = \sqrt{\frac{m}{2E}}\,\frac{\mathrm{d}x}{\pm\sqrt{1-\frac{k}{2E}x^2}}$$

$$\operatorname{sen}\theta = x\sqrt{\frac{k}{2E}}, \quad \mathrm{d}\theta\cos\theta = \mathrm{d}x\sqrt{\frac{k}{2E}}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}}\int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{\mathrm{d}\theta'\cos\theta'}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta'}} = \sqrt{\frac{m}{k}}(\theta-\theta_0)$$

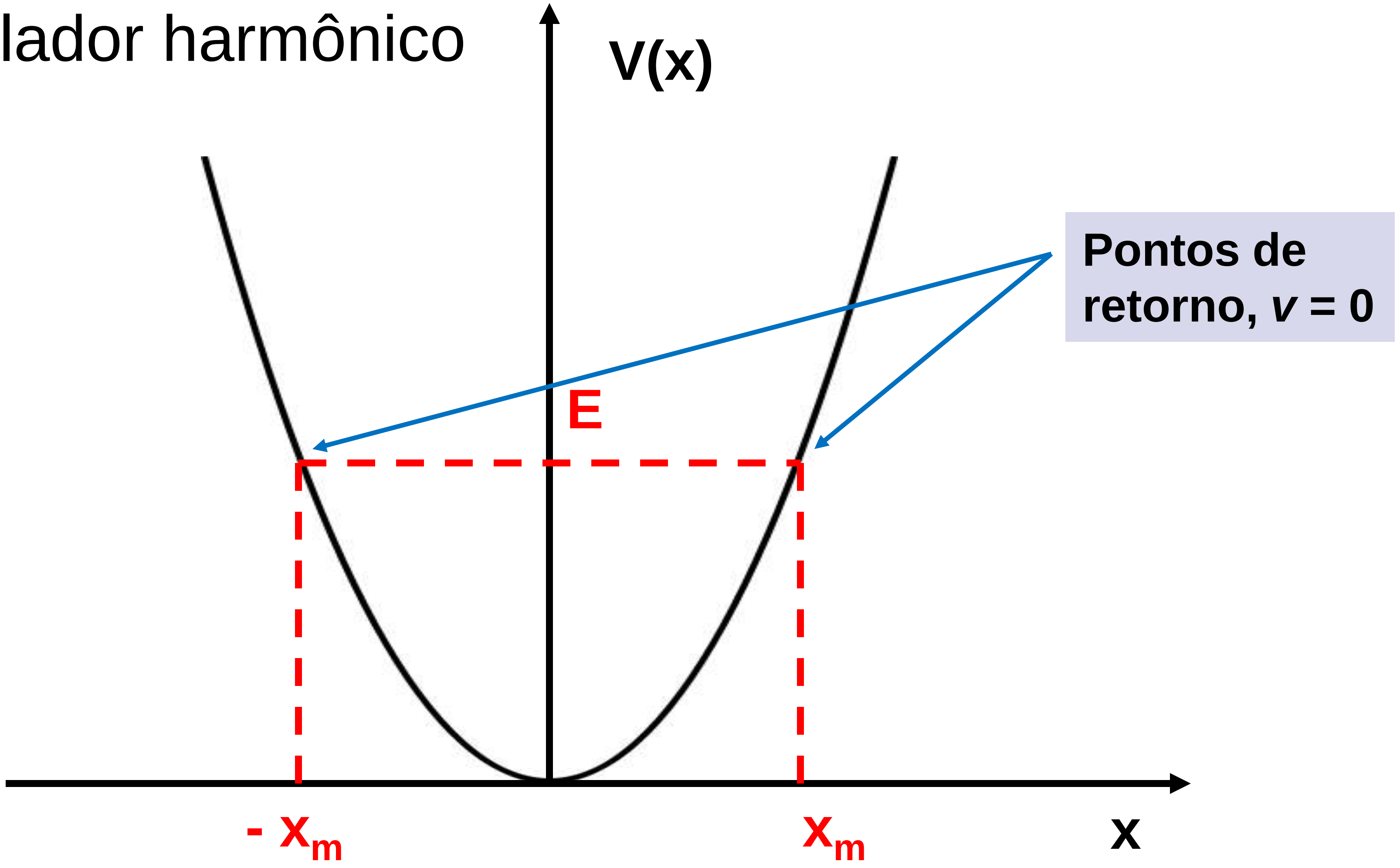
$$\theta(t) = \omega t + \theta_0, \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \longrightarrow$$

S eq. (2.53)

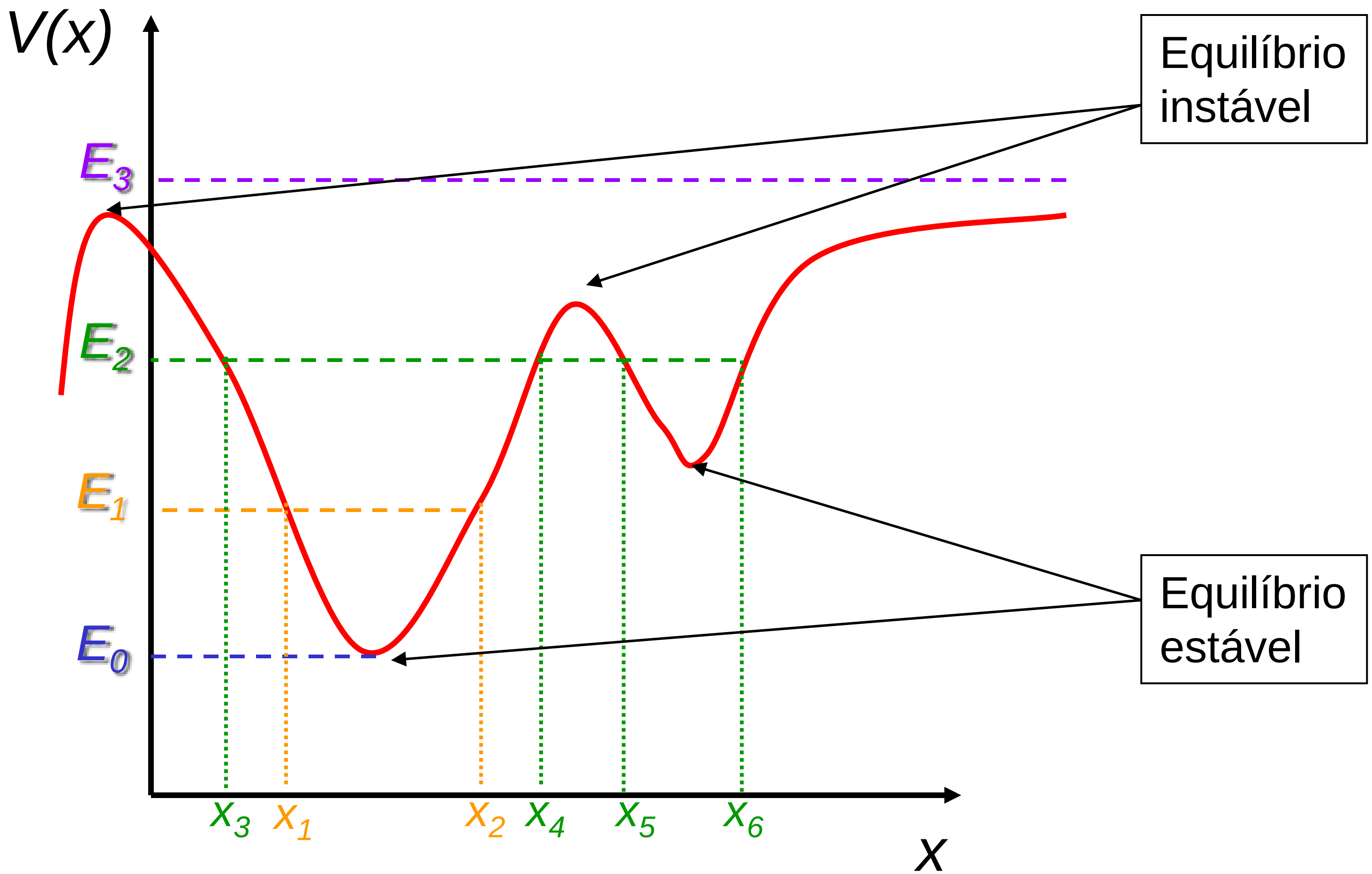
$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}}\operatorname{sen}(\omega t + \theta_0)$$

Análise do movimento: energia potencial

Oscilador harmônico



Potencial *V(x)*: análise qualitativa



Considerações gerais

Expandindo *V(x)* em torno de um ponto de equilíbrio estável x_0

$$V(x) = V(x_0) + \left.\frac{dV}{dx}\right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \ldots$$

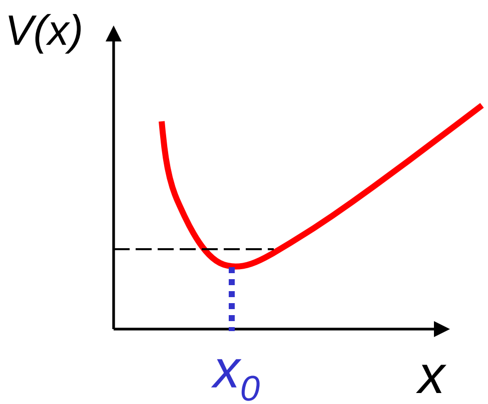
Tomando $V(x_0) = 0$

e em se tratando de um ponto de equilíbrio, $\left.\dfrac{dV}{dx}\right|_{x_0} = 0$

Considerações gerais

Assim, próximo a x_0, $$V(x) \approx \frac{1}{2} \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2$$

Fazendo $x_0 = 0$ e $$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_0} \equiv k$$



Obtemos $$\boxed{V(x) \approx \frac{1}{2} k x^2} \Rightarrow$$ massa mola

Conclusão

Nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio estável de um potencial *V(x)* qualquer, o movimento de uma partícula será, com boa aproximação, um movimento harmônico simples.

Potencial *V(x)*: análise qualitativa

Procedimento:

1) Fazer o gráfico de $V(x) \times x$, identificando os pontos de equilíbrio.

2) Analisar o movimento para diferentes condições iniciais: i) energia mecânica *E* + sinal da velocidade inicial (equivalente à velocidade inicial); ii) posição inicial. Verificar em que situações o movimento terá um, dois, ou nenhum ponto de retorno.

Obs: notar que devemos sempre obedecer $E - V(x) \geq 0$

Problema

S pgs. 58/60

Um foguete de massa *m* está submetido à força gravitacional devido à Terra (massa *M*):

$$F(y) = -G\frac{Mm}{y^2}$$

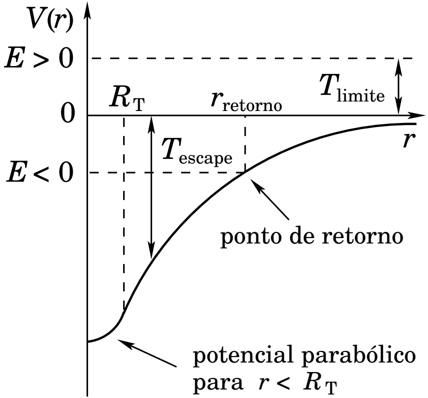
a) Calcule a energia potencial gravitacional *V(y)*, sendo *y* a distância ao centro da Terra. Obs: escolha convenientemente o zero da energia potencial. Faça um gráfico de *V(y)* X *y*.

b) O foguete é lançado da superfície da Terra. Usando a equação da conservação da energia mecânica, verifique a existência de pontos de retorno (ou não) do movimento para diferentes valores de energia mecânica *E*: i) $E > 0$; ii) $E < 0$; iii) $E = 0$.

Partícula no campo gravitacional terrestre, S pgs. 58–60

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V(r) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, \quad \text{para } r > R_T \text{ (raio da Terra)}$$

$$V(|\boldsymbol{r}|) = V(r) = -\frac{GMm}{r}, \text{ escolha } V(r\to\infty) \equiv 0, \; T = \frac{1}{2}mv^2$$



$$E < 0 : r_{\text{retorno}} = \frac{GMm}{|E|}$$

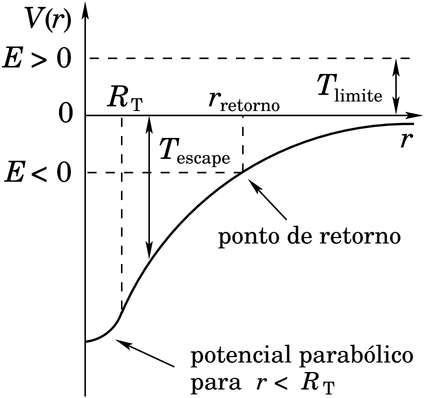
$$E = 0 : v_{\text{escape}}(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

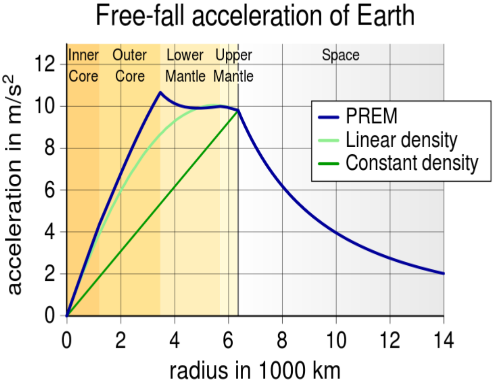
$$E > 0 : v_{\text{limite}}(r = \infty) = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Partícula no campo gravitacional terrestre, S pgs. 58–60

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V(r) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, \quad \text{para } r > R_T \text{ (raio da Terra)}$$

$$V(|\boldsymbol{r}|) = V(r) = -\frac{GMm}{r}, \text{ escolha } V(r \to \infty) \equiv 0, \; T = \frac{1}{2}mv^2$$





Movimento de partículas carregadas em campos

TM exemplo 2.10, pg.73; S seção 3.17, pg. 165

Partícula submetida a um campo magnético uniforme

$$\vec{B} = B_0 \hat{z}$$

Partícula de massa m e carga q

Equações de movimento

Força de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad \begin{cases} m\ddot{x} = q v_y B_0 \\ m\ddot{y} = -q v_x B_0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

TM exemplo 2.10, pg. 73; S seção 3.17, pg. 165

$$\boldsymbol{F}_R = m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{B} = B_0\hat{\boldsymbol{z}}$$
$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) \equiv \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qv_y B_0 = q\dot{y}B_0 \\ m\ddot{y} = -qv_x B_0 = -q\dot{x}B_0 \\ m\ddot{z} = 0 \;\rightarrow\; \bar{z}(t) \equiv z(t) - z_0 = v_\parallel t \end{cases}$$

Definindo $\omega \equiv qB_0/m$: $\quad \ddot{x} = \omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega\dot{x}$

Ansatz: $\quad \bar{x}(t) = r_x \Re e^{i(\omega t + \theta_x)}, \quad \bar{y}(t) = r_y \Re e^{i(\omega t + \theta_y)}$

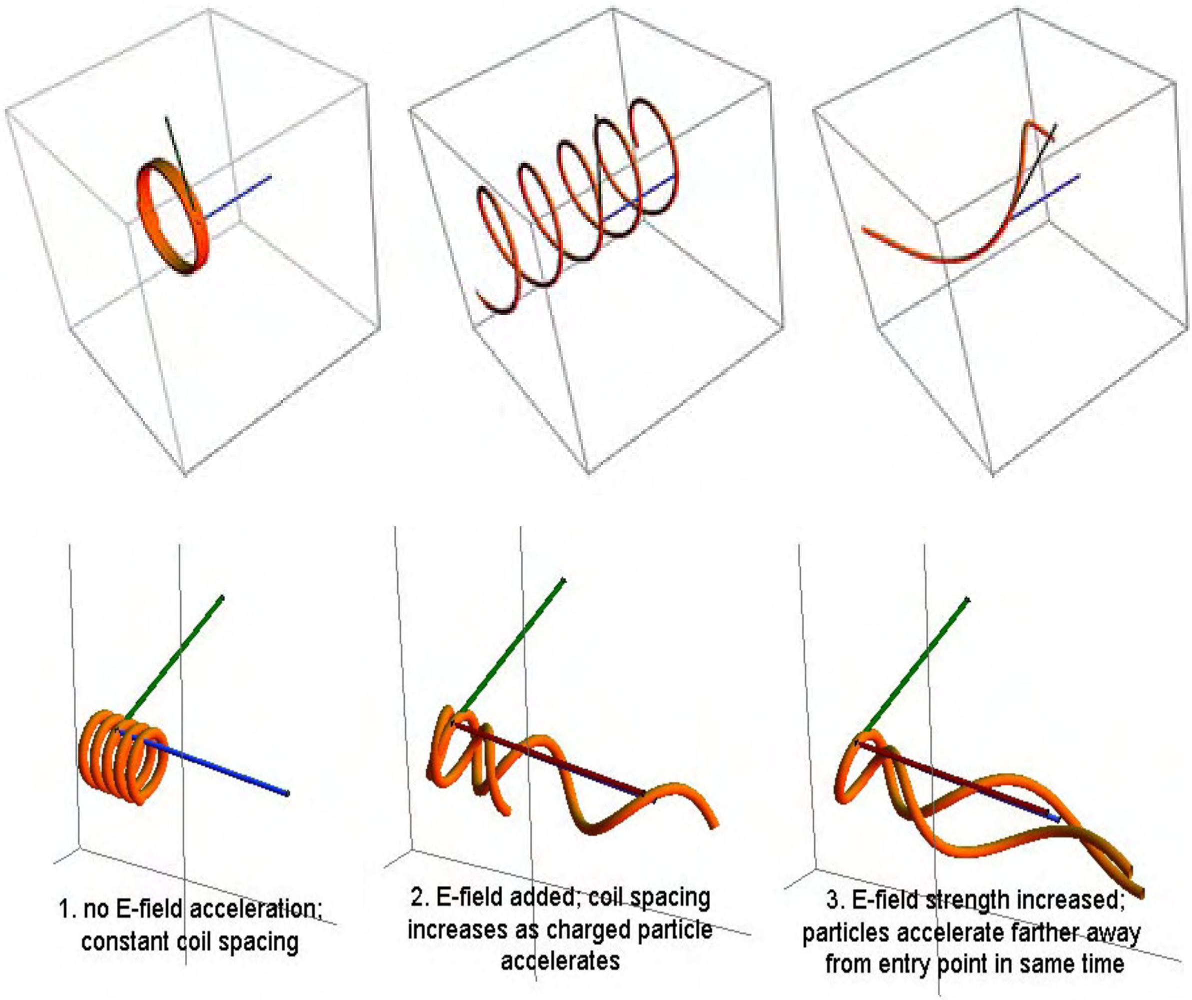
$$\ddot{x} = \omega\dot{y} \;\rightarrow\; \omega^2 r_x \Re e^{i(\omega t + \theta_x + \pi)} = \omega^2 r_y \Re e^{i(\omega t + \theta_y + \pi/2)}$$
$$\ddot{y} = -\omega\dot{x} \;\rightarrow\; -\omega^2 r_y \Re e^{i(\omega t + \theta_y)} = -\omega^2 r_x \Re e^{i(\omega t + \theta_x + \pi/2)}$$

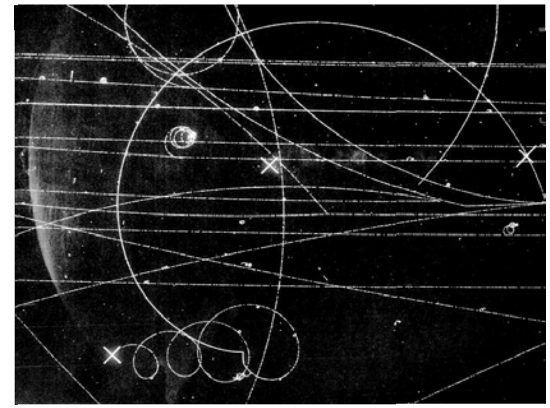
$$\rightarrow\; v_\perp \equiv \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}, \quad r_x = r_y \equiv r = v_\perp/\omega, \quad \theta_y = \theta_x + \frac{\pi}{2}$$

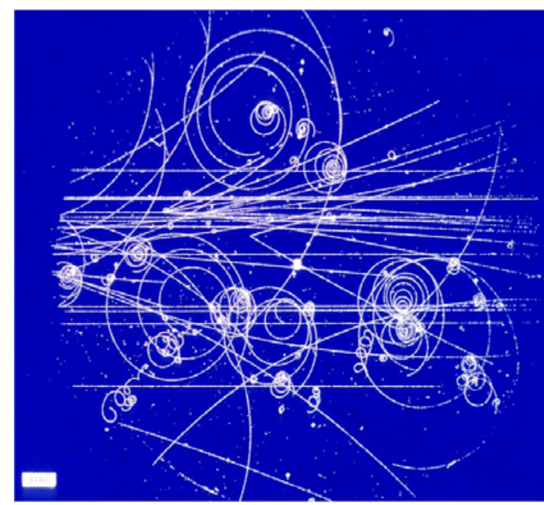
TM eq. (2.79)

$$\bar{x}(t) = \frac{v_\perp}{\omega}\cos(\omega t + \theta_x), \quad \bar{y}(t) = -\frac{v_\perp}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t + \theta_x), \quad \bar{z}(t) = v_\parallel t$$

Partículas carregadas em campo magnético
TM exemplo 2.10, pg. 73; S seção 3.17, pg. 165







http://www.telegraph.co.uk/news/science/picture-galleries/8675009/Images-of-Big-Bang-experiments-inside-particle-accelerators-at-CERN.html