F-315 (Mecânica Geral I)
Aula 6

Prof. Mário Noboru Tamashiro
Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339
e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html

Problema

TM 2.43, pg. 96; S 2.18, pg. 86

Uma partícula de massa *m* está sujeita à ação de uma força

$$F(x) = -kx + \frac{kx^3}{a^2}$$

onde *k* e *a* são constantes > 0.

a) Determine *V(x)* e discuta os possíveis tipos de movimento.

b) Mostre que se $E = ka^2/4$, podemos calcular *x(t)* por métodos elementares. Escolha convenientemente as condições iniciais e compare o resultado para *x(t)* com a discussão qualitativa do item a.

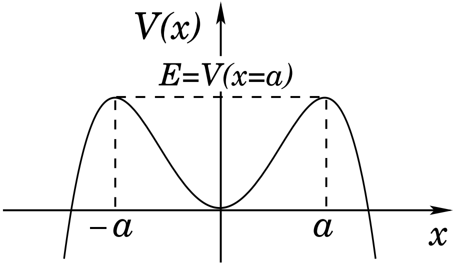
TM problema 2.43, pg. 96; S problema 2.18, pg. 86

$$F(x) = -kx + \frac{1}{a^2}kx^3 \rightarrow V(x) = -\int_0^x \mathrm{d}x' \, F(x') = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4a^2}kx^4$$

Pontos de equilíbrio: $V'(x_i) = -F(x_i) = kx_i - \frac{1}{a^2}kx_i^3 = 0$

$$\rightarrow \quad x_- = -a, \quad x_0 = 0, \quad x_+ = a$$

Análise do tipo de equilíbrio: $V''(x_i) = k - \frac{3}{a^2}kx_i^2$



$V(x_0) = 0,$

$V''(x_0) = k > 0$ (estável)

$V(x_\pm) = \frac{1}{4}ka^2,$

$V''(x_\pm) = -2k < 0$ (instável)

TM problema 2.43, pg. 96; S problema 2.18, pg. 86

Para $E = \frac{1}{4}ka^2 = V(x_\pm)$ (valor do potencial nos máximos)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4a^2}kx^4 = \frac{1}{4}ka^2$$

$$mv^2(x) = \frac{1}{2}ka^2 - kx^2 + \frac{1}{2a^2}kx^4 = \frac{1}{2}ka^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2, \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

$$\pm\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{|v(x)|} = \frac{\mathrm{d}x}{a\omega\left(1 - x^2/a^2\right)} = \frac{1}{2a\omega}\left(\frac{\mathrm{d}x}{1 + x/a} + \frac{\mathrm{d}x}{1 - x/a}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(1 \pm \frac{x}{a}\right) = \frac{\pm 1/a}{1 \pm x/a} \quad \rightarrow \quad \pm\omega(t - t_0) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x/a}{1 - x/a}\right)\Bigg|_{x(t_0)}^{x(t)}$$

$$\pm\omega t = \operatorname{arctgh}\frac{x(t)}{a} \quad \rightarrow$$

Caso $|x(t)| < a$

$$x(t) = \pm a\,\mathrm{tgh}\,\omega t$$

TM problema 2.43, pg. 96; S problema 2.18, pg. 86

Para $E = \frac{1}{4}ka^2 = V(x_\pm)$ (valor do potencial nos máximos)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4a^2}kx^4 = \frac{1}{4}ka^2$$

$$mv^2(x) = \frac{1}{2}ka^2 - kx^2 + \frac{1}{2a^2}kx^4 = \frac{1}{2}ka^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2, \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

$$\pm\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{|v(x)|} \overset{|x|<a}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{\mathrm{d}x}{a\omega\left(1 - x^2/a^2\right)} = \frac{1}{2a\omega}\left(\frac{\mathrm{d}x}{1 + x/a} + \frac{\mathrm{d}x}{1 - x/a}\right)$$

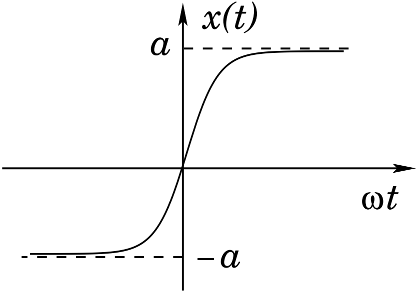
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(1 \pm \frac{x}{a}\right) = \frac{\pm 1/a}{1 \pm x/a} \quad \rightarrow \quad \pm\omega(t - t_0) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x/a}{1 - x/a}\right)\Bigg|_{x(t_0)}^{x(t)}$$

$$\pm\omega t = \operatorname{arctgh}\frac{x(t)}{a} \quad \rightarrow$$

Caso $|x(t)| < a$

$$x(t) = \pm a\,\operatorname{tgh}\omega t$$

TM problema 2.43, pg. 96; S problema 2.18, pg. 86



Resolva o caso $|x(t)| > a$:

Caso $|x(t)| > a$

$$x(t) = \pm a \coth \omega t$$

Solução para $E \neq V(x_\pm)$: funções elípticas

Verificação da 2ª lei de Newton:

$$x(t)/a = \pm \operatorname{tgh} \omega t$$

$$\dot{x}(t)/a = \pm\omega \operatorname{sech}^2 \omega t = \pm\omega\left(1 - \operatorname{tgh}^2 \omega t\right) = \pm\omega\left[1 - x^2(t)/a^2\right]$$

$$\ddot{x}(t)/a = \mp 2\omega^2 \operatorname{tgh} \omega t \operatorname{sech}^2 \omega t = -\frac{k}{m}\left[x(t)/a - x^3(t)/a^3\right]$$

$$m\ddot{x}(t) = F[x(t)] = -kx(t) + \frac{1}{a^2}kx^3(t)$$

Problema

TM 2.52, pg. 97

Uma partícula de massa *m,* em movimento em uma dimensão, possui energia potencial dada por:

$$V(x) = V_0 \left[2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^4 \right]$$

onde V_0 e a são constantes positivas; (a) calcular a força, F(x), que atua sobre a partícula; (b) determinar os pontos de equilíbrio do sistema; (c) calcular a frequência de <u>pequenas oscilações</u> em torno do ponto de equilíbrio estável.

Problema
TM 2.52, pg. 97

Uma partícula de massa *m,* em movimento em uma dimensão, possui energia potencial dada por:

$$V(x) = V_0\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^4\right]$$

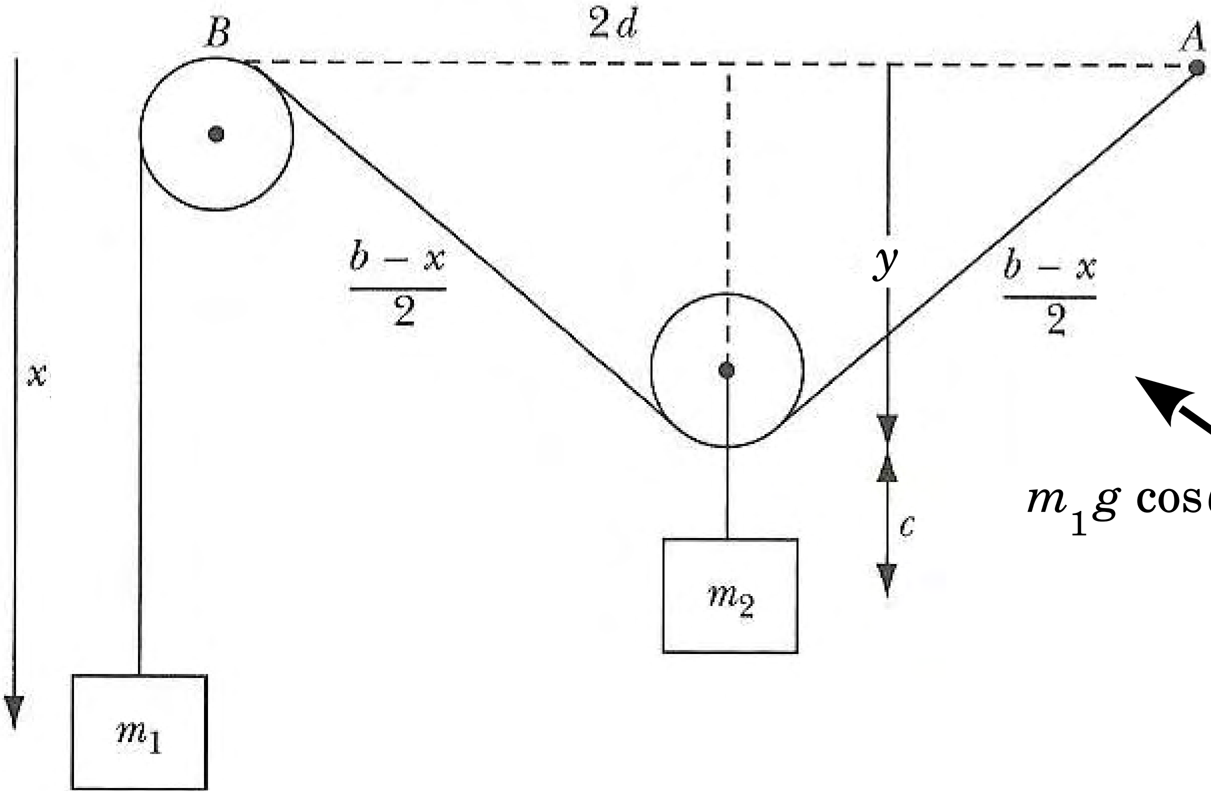
onde V_0 e *a* são constantes positivas; (a) calcular a força, F(x), que atua sobre a partícula; (b) determinar os pontos de equilíbrio do sistema; (c) calcular a frequência de <u>pequenas oscilações</u> em torno do ponto de equilíbrio estável.

Corresponde ao mesmo problema anterior com $k=4V_0/a^2$

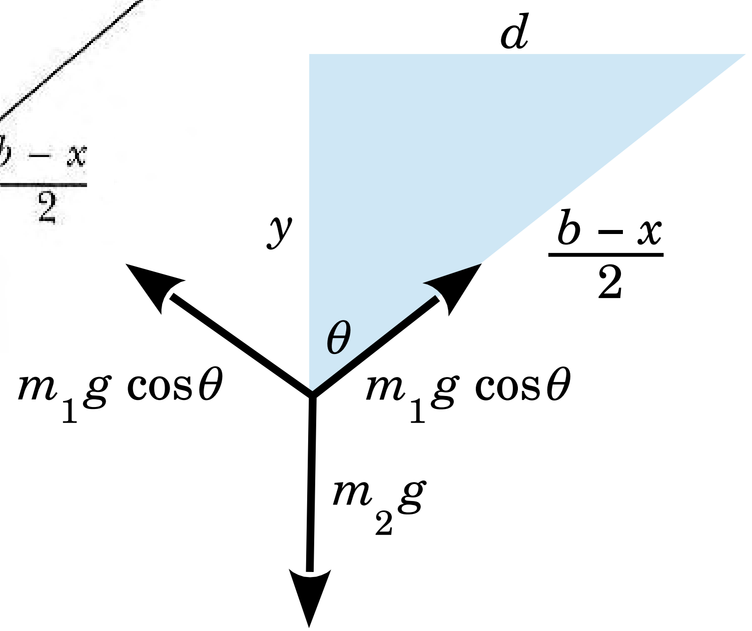
Problema

TM exemplo 2.12, pg. 85

Considere o sistema de polias, cordas e massas como indicado na figura abaixo. Calcular a distância x quando o sistema se encontrar em equilíbrio. Verificar se o equilíbrio é estável ou instável.



TM probl. 2.44, pg. 96



TM exemplo 2.12, pgs. 85–86

Tomando o zero do potencial $V(x,y)=0$ na linha AB:

$$V(x,y)=-m_1gx-m_2g(y+c),\quad y^2=\tfrac{1}{4}(b-x)^2-d^2$$

$$V(x)=-m_1gx-m_2gc-m_2g\sqrt{\tfrac{1}{4}(b-x)^2-d^2}$$

$$V'(x)=-m_1g+m_2g(b-x)\Big/4\sqrt{\tfrac{1}{4}(b-x)^2-d^2}$$

No ponto de equilíbrio $V'(x=\bar{x})=0$:

$$m_2(b-\bar{x})=4m_1\sqrt{\tfrac{1}{4}(b-\bar{x})^2-d^2}$$

$$16m_1^2d^2=(b-\bar{x})^2(4m_1^2-m_2^2)\ \rightarrow$$

Solução $\bar{x}\in\mathbb{R}$ para $2m_1>m_2$

TM eq. (2.105)

$$\bar{x}=b-\frac{4m_1d}{\sqrt{4m_1^2-m_2^2}}$$

TM exemplo 2.12, pgs. 85–86

Para um ponto de equilíbrio estável $V''(x=\bar{x})>0$:

$$V''(x) = -m_2 g \Big/ 4\sqrt{\tfrac{1}{4}(b-x)^2-d^2} + m_2 g (b-x)^2 \Big/ 16\left(\sqrt{\tfrac{1}{4}(b-x)^2-d^2}\right)^3$$

Calculando em $x=\bar{x} \;\rightarrow\; (b-\bar{x})^2 = \dfrac{16m_1^2 d^2}{4m_1^2-m_2^2}$

Condição de equilíbrio estável

$$V''(x=\bar{x}) = \frac{g\left(4m_1^2-m_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4m_2^2 d} > 0$$

TM exemplo 2.12, pgs. 85–86

Usando a coordenada y para a expansão:

$$V(x,y) = -m_1 g x - m_2 g (y+c), \quad x = b - 2\sqrt{y^2+d^2}$$

$$V(y) = -m_1 g \left(b - 2\sqrt{y^2+d^2} \right) - m_2 g (y+c)$$

$$V'(y) = -m_2 g + 2 m_1 g y \Big/ \sqrt{y^2+d^2}$$

$$V''(y) = 2 m_1 g \Big/ \sqrt{y^2+d^2} - 2 m_1 g y^2 \Big/ \left(\sqrt{y^2+d^2} \right)^3$$

$$V'(\bar{y}) = 0 \;\rightarrow\; \bar{y} = \frac{m_2 d}{\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}}, \quad V''(\bar{y}) = \frac{g\left(4m_1^2 - m_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4m_1^2 d}$$

TM exemplo 2.12, pgs. 85–86; problema 2.44, pg. 96

Energia cinética total:

$$T = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{y}^2 = \tfrac{1}{2}m_x(x)\dot{x}^2 = \tfrac{1}{2}m_y(y)\dot{y}^2$$

$$m_x(x) = m_1 + m_2\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 = m_1 + \tfrac{1}{4}m_2 \Big/ \left[1 - 4d^2/(b-x)^2\right]$$

$$m_y(y) = m_2 + m_1\left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)^2 = m_2 + 4m_1 y^2 \Big/ \left(y^2 + d^2\right)$$

$$m_x(\bar{x}) = \frac{m_1}{m_2}(m_1 + m_2), \qquad m_y(\bar{y}) = \frac{m_2}{m_1}(m_1 + m_2)$$

Frequência de pequenas oscilações

$$\omega^2 = \frac{V''(\bar{x})}{m_x(\bar{x})} = \frac{V''(\bar{y})}{m_y(\bar{y})} = \frac{g\left(4m_1^2 - m_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4m_1 m_2(m_1 + m_2)d}$$

Equações diferenciais

Equações diferenciais de segunda ordem lineares com coeficientes constantes

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = F(t)$$

Se F(t) = 0 teremos uma <u>equação homogênea</u>, que admite solução

do tipo $x(t) = e^{pt}$

Equações diferenciais

Teorema 1: Se $x = x_1(t)$ é solução da equação homogênea, então $x = C\, x_1(t)$ também é solução (C cte.)

Teorema 2: Se $x = x_1(t)$ e $x = x_2(t)$ são soluções da equação homogênea, então $x = x_1(t) + x_2(t)$ também é solução.

Equações diferenciais

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

escrevendo $x(t) = e^{pt}$

$$p_\pm = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

• raízes distintas: $\boxed{x(t) = C_1 e^{p_+ t} + C_2 e^{p_- t}}$

• raízes iguais: $\boxed{x(t) = A_1 e^{pt} + A_2 t e^{pt}}$

onde $p = -\frac{a_1}{2a_2}$

Oscilador harmônico simples

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0 \qquad \begin{cases} a_2 = m \\ a_1 = 0 \\ a_0 = k \end{cases}$$

$$\Delta = a_1{}^2 - 4a_2a_0 = -4mk$$

$$p_\pm = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0$$

A solução geral ficará:

$$x(t) = Ce^{i\omega_0 t} + C^* e^{-i\omega_0 t}$$

$C = C^*$, pois *x(t)* deve ser <u>real</u>

Oscilador harmônico simples

Que pode ser escrita como

$$\boxed{x(t) = x_m \cos\left(\omega_0 t + \theta\right)}$$

Ainda, em termos de *x(0)* e *v(0)*,

$$\boxed{x(t) = x\left(0\right)\cos \omega_0 t + \frac{v\left(0\right)}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0 t}$$