F-315 (Mecânica Geral I)
Aula 7

Prof. Mário Noboru Tamashiro
Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339
e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html

Oscilador harmônico

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_x x$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k_y y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -k_z z$$

Oscilações independentes

Para o oscilador isotrópico

$$k_x = k_y = k_z = k$$

Oscilador harmônico

Em geral

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \theta_x)$$
$$y = A_y \cos(\omega_y t + \theta_y)$$
$$z = A_z \cos(\omega_z t + \theta_z)$$

$$\omega_i^{\ 2} = \frac{k_i}{m}$$

Oscilador harmônico em 2D

Vejamos o caso em 2D isotrópico

$$x = A_x \cos(\omega_0 t + \theta_x)$$
$$y = A_y \cos(\omega_0 t + \theta_y)$$

$$\omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$$

$$A_x{}^2 y^2 + A_y{}^2 x^2 - 2xyA_x A_y \cos\delta = A_x{}^2 A_y{}^2 \operatorname{sen}^2\delta$$

$$\delta = \theta_y - \theta_x$$

TM seção 3.3, pg. 104

$$x(t) = A_x \Re \exp[\mathrm{i}(\omega_0 t + \theta_x)], \qquad \delta \equiv \theta_y - \theta_x$$

$$y(t) = A_y \Re \exp[\mathrm{i}(\omega_0 t + \theta_y)] = A_y \Re \exp[\mathrm{i}(\omega_0 t + \theta_x + \overbrace{\theta_y - \theta_x}^{\delta})]$$

$$= A_y \Re \left\{ \exp[\mathrm{i}(\omega_0 t + \theta_x)] \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} \right\}$$

$$= A_y \left[\cos(\omega_0 t + \theta_x) \cos\delta - \operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta_x) \operatorname{sen}\delta \right]$$

$$A_x y = A_y x \cos\delta - A_x A_y \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_x^2}} \operatorname{sen}\delta$$

$$\left(A_x y - A_y x \cos\delta \right)^2 = A_y^2 \left(A_x^2 - x^2 \right) \operatorname{sen}^2\delta$$

TM eq. (3.22)

$$A_y^2 x^2 - 2 A_x A_y x y \cos\delta + A_x^2 y^2 = A_x^2 A_y^2 \operatorname{sen}^2\delta$$

TM seção 3.3, pg. 104

Podemos demonstrar que esta equação descreve uma elipse inclinada de um ângulo θ em relação ao eixo x:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \quad \xi \equiv \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2A_x A_y \cos\delta}{A_x^2 - A_y^2}$$

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\right), \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\right)$$

TM eq. (3.22) no sistema $(\bar{x},\bar{y})$

$$A_-^2 \bar{x}^2 + A_+^2 \bar{y}^2 = A_x^2 A_y^2 \operatorname{sen}^2\delta$$

$$\begin{aligned} A_\mp^2 &= A_x^2 \binom{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + A_y^2 \binom{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \mp A_x A_y \operatorname{sen} 2\theta \cos\delta \\ &= \tfrac{1}{2}(A_x^2 + A_y^2) \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{A_x^4 + A_y^4 + 2A_x^2 A_y^2 \cos 2\delta} \end{aligned}$$

Oscilador harmônico em 2D

Para $\delta = \pm \pi/2$ rad $$\boxed{\frac{x^2}{A_x^{\ 2}} + \frac{y^2}{A_y^{\ 2}} = 1}$$ elipse

Para $\delta = 0$ $$\boxed{y = \frac{A_y}{A_x} x}$$ reta

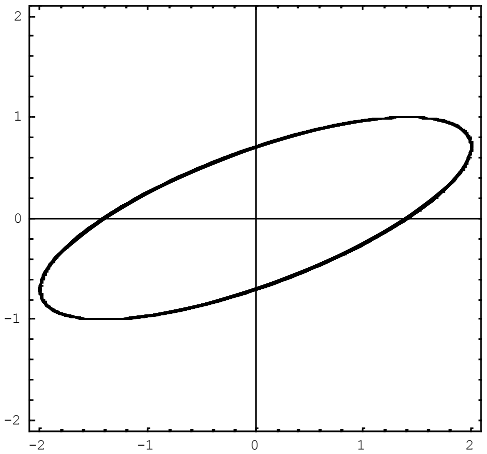
Oscilador harmônico em 2D

Para o caso anisotrópico $\boxed{\omega_x \neq \omega_y}$

Se $\boxed{\dfrac{\omega_y}{\omega_x} = \dfrac{n_y}{n_x}}$ for satisfeita para n_y e n_x inteiros, a massa m percorrerá trajetórias fechadas (movimento periódico) $\Rightarrow$ <u>figuras de Lissajous</u>

Caso contrário (freqüências incomensuráveis), o movimento não será periódico e as curvas das trajetórias não fecharão (veja a figura 6 a seguir, para $\omega_x = 1\,\mathrm{rad}$ e $\omega_y = \pi\,\mathrm{rad}$).

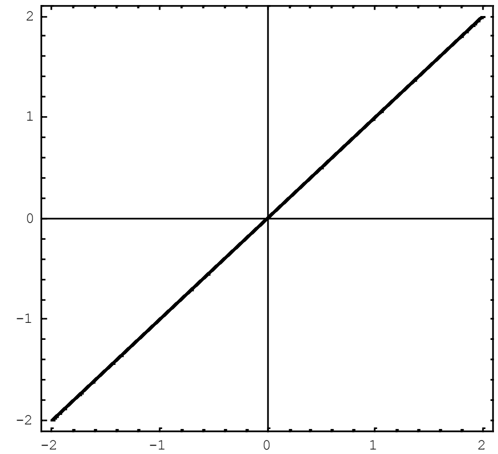
Oscilador harmônico em 2D



$A_x = 2 \quad A_y = 1$

$\omega_x = 2 \quad \omega_y = 2$

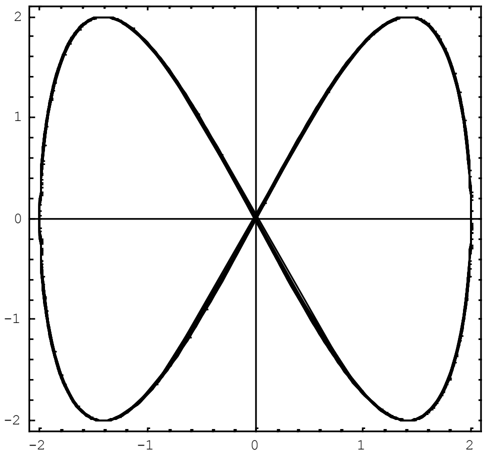
$\delta = \pi / 4$



$A_x = 2 \quad A_y = 2$

$\omega_x = 2 \quad \omega_y = 2$

$\delta = 0$

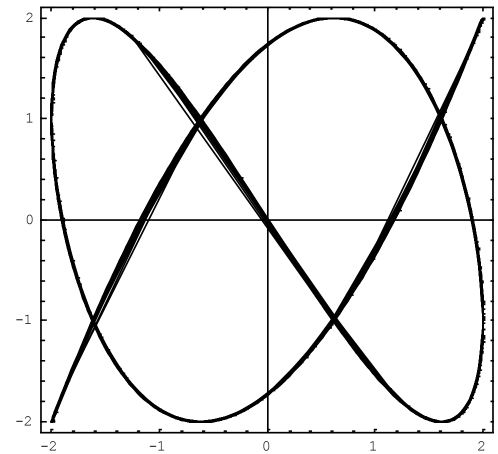


Lissajous

$A_x = 2 \quad A_y = 2$

$\omega_x = 1 \quad \omega_y = 2$

$\delta = \pi / 2$

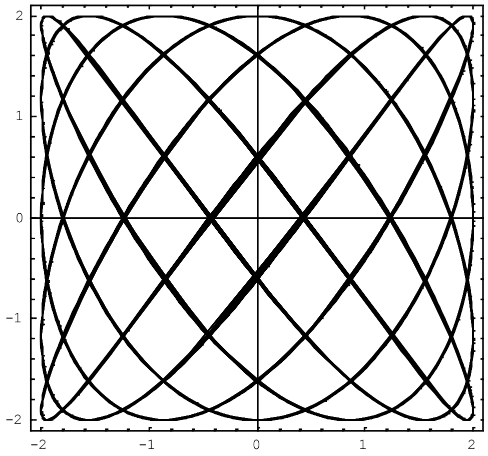


$A_x = 2 \quad A_y = 2$

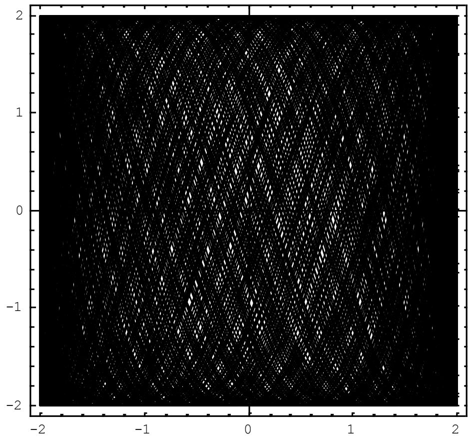
$\omega_x = 3 \quad \omega_y = 5$

$\delta = 0$

Oscilador harmônico em 2D

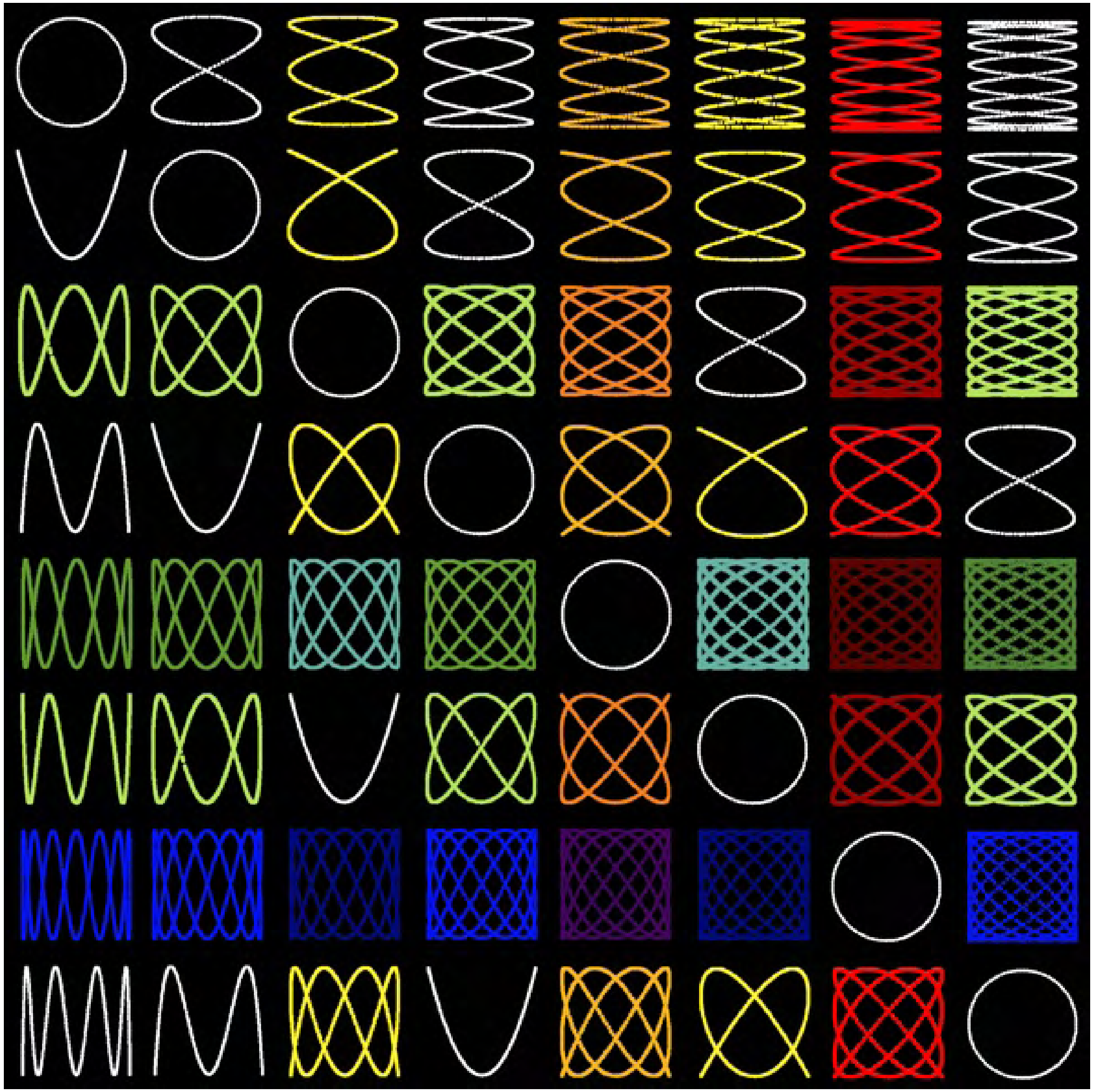


$$A_x = 2 \quad A_y = 2$$
$$\omega_x = 2{,}5 \quad \omega_y = 3{,}5$$
$$\delta = \pi / 2$$



$$A_x = 2 \quad A_y = 2$$
$$\omega_x = 1 \quad \omega_y = \pi$$
$$\delta = \pi / 2$$

Oscilador harmônico em 2D



Oscilador harmônico amortecido

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0$$

$$p=-\frac{b}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \gamma=\frac{b}{2m}$$

Freqüência natural

Coeficiente de amortecimento

Oscilador harmônico amortecido

1) Caso sub-amortecido: $\omega_0 > \gamma$

Solução geral:

$$\boxed{x(t) = x_m e^{-\gamma t} \cos\left(\omega_1 t + \theta\right)}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \gamma^2}$$

Energia total do oscilador

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \approx \frac{1}{2} k x_m^{\ 2} e^{-2\gamma t}$$

TM problema 3.11, pg. 139; S seção 2.9, pgs. 67–69

$$\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}, \quad \gamma \equiv b/2m, \quad \omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$x(t) = x_m \mathrm{e}^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) = x_m \mathrm{e}^{-\gamma t} \cos\phi(t), \quad \phi(t) \equiv \omega_1 t + \theta$$

$$\dot{x}(t) = -\gamma x_m \mathrm{e}^{-\gamma t} \cos\phi(t) - \omega_1 x_m \mathrm{e}^{-\gamma t} \operatorname{sen}\phi(t)$$

$$E = \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} kx^2 = \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$$

$$= \tfrac{1}{2} m x_m^2 \mathrm{e}^{-2\gamma t} \left\{ \left[\gamma \cos\phi(t) + \omega_1 \operatorname{sen}\phi(t)\right]^2 + \omega_0^2 \cos^2\phi(t) \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} m x_m^2 \mathrm{e}^{-2\gamma t} \left[\omega_0^2 + \gamma^2 \cos 2\phi(t) + \gamma\omega_1 \operatorname{sen} 2\phi(t)\right]$$

com $\cos 2\phi = \cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi, \quad \operatorname{sen} 2\phi = 2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi$

S eq. (2.137)

Para $\gamma \ll \omega_0$:

$$E \approx \tfrac{1}{2} m\omega_0^2 x_m^2 \mathrm{e}^{-2\gamma t} = \tfrac{1}{2} k\, x_m^2 \mathrm{e}^{-2\gamma t}$$

Oscilador harmônico amortecido

2) Caso super-amortecido: $\omega_0 < \gamma$

Solução geral:

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}}$$

$$\gamma_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0{}^2}$$

$$\gamma_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0{}^2}$$

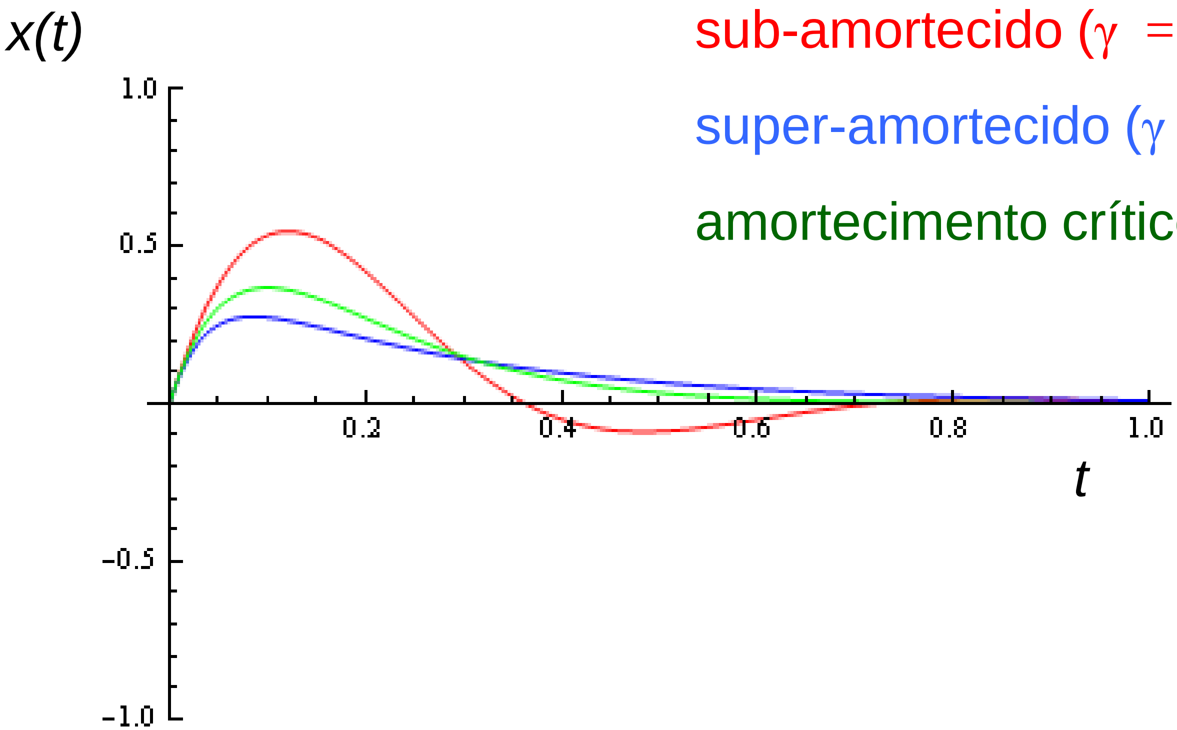
Oscilador harmônico amortecido

3) Amortecimento crítico: $\omega_0 = \gamma$

Solução geral:

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}}$$

Oscilador harmônico amortecido



sub-amortecido (γ = 5 rad/s)

super-amortecido (γ = 15 rad/s)

amortecimento crítico (γ = 10 rad/s)

$x(0) = 0$

$v(0)$ = 10 m/s

ω_0 = 10 rad/s

Problemas

TM 3.22, pg. 140

1) Um oscilador harmônico super-amortecido é posto a oscilar a partir de uma posição inicial x_0 e uma velocidade inicial v_0. Calcule sua posição em função do tempo, *x(t).* Dados: oscilador com massa *m*, constante de mola *k* e constante de amortecimento γ tal que $\gamma^2 > k/m$.

S 2.41, pg. 90

2) Considere um oscilador harmônico com amortecimento crítico (frequência natural de oscilação ω_0) com posição inicial $x_0 > 0$ e velocidade inicial de módulo $|v_0|$ na direção do ponto de equilíbrio. a) Calcular *x(t);* b) Encontrar a condição sobre a velocidade inicial de modo que a partícula ultrapasse a posição de equilíbrio.

TM problema 3.22, pg. 140; S problema 2.41, pg. 90

1) $\gamma_{1,2} \equiv \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

$x(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma_1 t} + B\mathrm{e}^{-\gamma_2 t} \;\longrightarrow\; x_0 \equiv x(0) = A + B$

$\dot{x}(t) = -\gamma_1 A\mathrm{e}^{-\gamma_1 t} - \gamma_2 B\mathrm{e}^{-\gamma_2 t} \;\longrightarrow\; v_0 \equiv \dot{x}(0) = -\gamma_1 A - \gamma_2 B$

$$A = \frac{v_0+\gamma_2 x_0}{\gamma_2-\gamma_1} = -\frac{v_0+\gamma_2 x_0}{2\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}, \qquad B = \frac{v_0+\gamma_1 x_0}{\gamma_1-\gamma_2} = \frac{v_0+\gamma_1 x_0}{2\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}$$

2) $x(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\gamma t}$, $\gamma = \omega_0 \;\longrightarrow\; x_0 \equiv x(0) = A$

$\dot{x}(t) = -\gamma(x_0 + Bt)\mathrm{e}^{-\gamma t} + B\mathrm{e}^{-\gamma t} \longrightarrow\; v_0 \equiv \dot{x}(0) = B - \gamma x_0$

Para que $\exists x < 0$: $B = v_0 + \gamma x_0 < 0 \;\longrightarrow\;$ $\boxed{|v_0| > \gamma x_0}$