F-315 (Mecânica Geral I)
Aula 8

Prof. Mário Noboru Tamashiro
Departamento de Física Aplicada, prédio A-5, sala 7

ramal 3521-5339
e-mail: mtamash@ifi.unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~mtamash/f315_mecgeral_i

Slides do prof. Antonio Vidiella Barranco:
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella/aulas.html

Oscilador amortecido forçado

Teorema:

Se $x_p(t)$ é solução particular de uma equação diferencial linear não homogênea, e $x_h(t)$ é solução da equação homogênea associada, então $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$ também é solução da equação não homogênea.

Oscilador amortecido forçado

Força externa periódica de frequência angular ω

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F_0\cos\omega t$$

Solução particular deve ser da forma (tentativa)

Ansatz

Frequência da força externa

$$\boxed{x_p(t)=A\cos(\omega t-\phi)}$$

2ª lei de Newton: $m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=F_0\cos\omega t$, com ω dado

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{F_0}{m}\Re e^{i\omega t},\quad \gamma\equiv\frac{b}{2m},\quad \omega_0\equiv\sqrt{\frac{k}{m}}\neq\omega \text{ em geral}$$

Substituindo o *Ansatz* da solução particular na 2ª Lei:

$$x_p(t)=A\cos(\omega t-\varphi)=\Re\left(\mathcal{A}e^{i\omega t}\right),\ \mathcal{A}\equiv|\mathcal{A}|e^{-i\varphi}=Ae^{-i\varphi}\in\mathbb{C}$$

$$\frac{F_0}{m}=-\omega^2\mathcal{A}+2i\gamma\omega\mathcal{A}+\omega_0^2\mathcal{A}\quad\rightarrow\quad\mathcal{A}=\frac{F_0/m}{\omega_0^2-\omega^2+2i\gamma\omega}$$

$$A\cos\varphi=\frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2},\qquad A\operatorname{sen}\varphi=\frac{F_0}{m}\frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}$$

TM eqs. (3.60) e (3.61)

$$x_p(t)=\frac{F_0}{m}\frac{\cos(\omega t-\varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}},\qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

Oscilador amortecido forçado

Substituindo $x_p(t)$ na equação diferencial, obtêm-se A e ϕ

Amplitude $$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

Diferença de fase ϕ

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0{}^2 - \omega^2}$$

$$\omega << \omega_0 \Rightarrow \phi \approx 0\,\mathrm{rad}$$

$$\omega = \omega_0 \quad \Rightarrow \phi = \pi / 2\,\mathrm{rad}$$

$$\omega >> \omega_0 \Rightarrow \phi \approx \pi\,\mathrm{rad}$$

Oscilador amortecido forçado

A solução geral para o oscilador forçado (sub-amortecido) ficará então

transiente

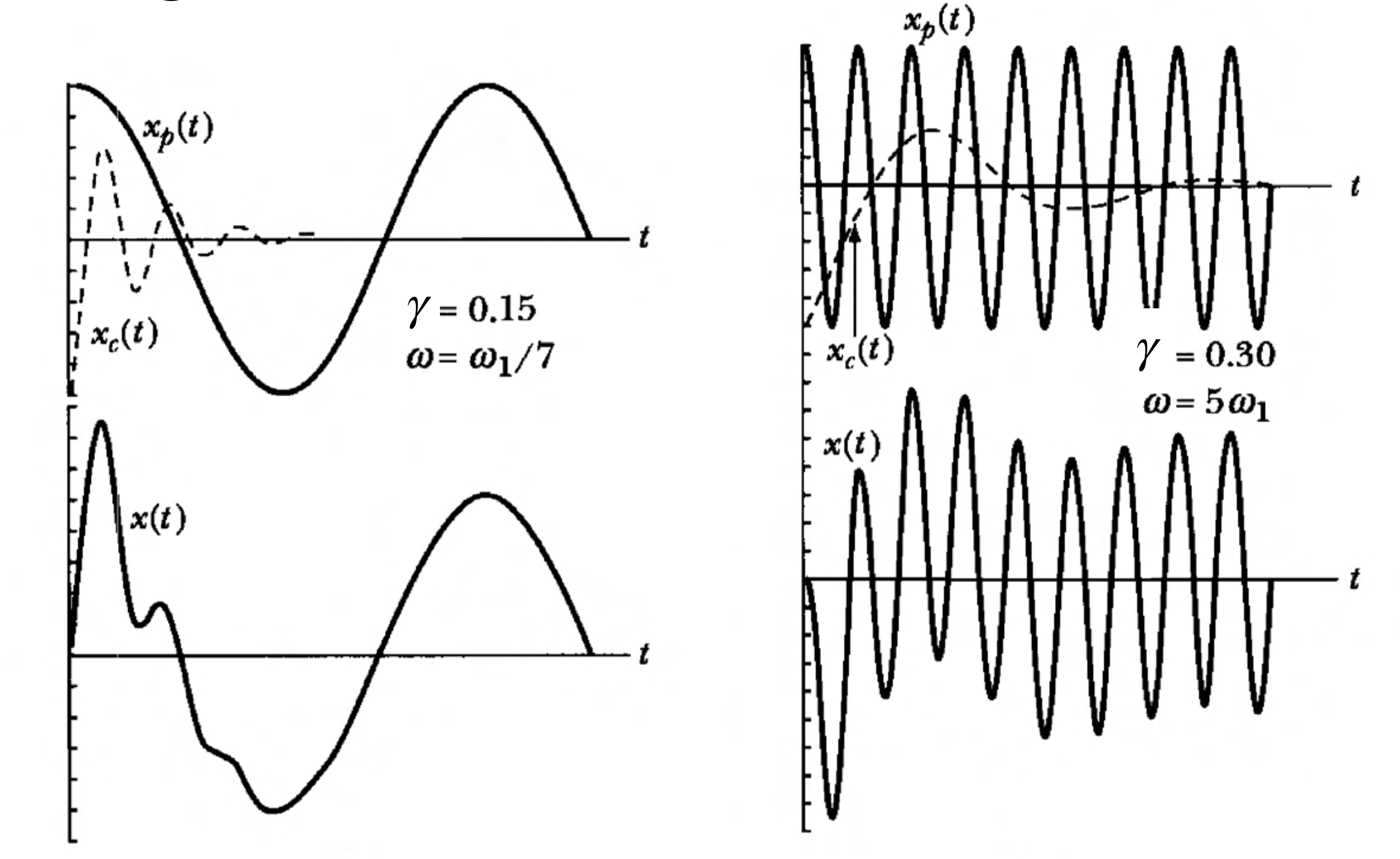
solução estacionária

$$x(t) = \boxed{x_m e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \theta)} + \boxed{\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t - \phi)}$$

com $$\mathrm{tg}\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0{}^2 - \omega^2}$$

Oscilador amortecido forçado

TM figura 3.15



(a) (b)

Oscilador amortecido forçado

Após um tempo suficientemente longo (*t >> 1/γ*), teremos

$$x(t) \approx \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

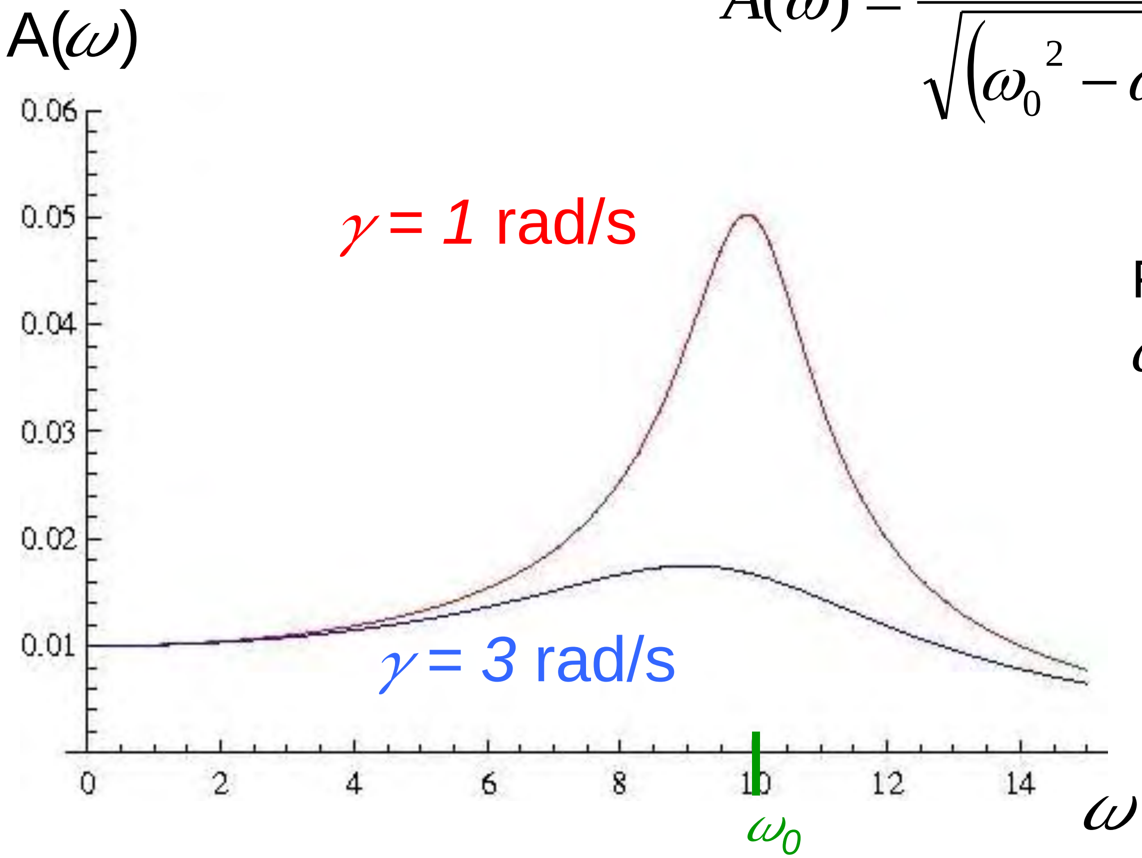
Para o caso sub-amortecido em que $\gamma << 1$ amplitude do oscilador será <u>máxima</u> se a freqüência de aplicação da força externa = à freqüência natural

$$\boxed{\omega_0 = \omega}$$

➡ Ressonância

Oscilador amortecido forçado

$$A(\omega) = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$



F_0/m = 1 N/kg

ω_0 = 10 rad/s

Condição de ressonância em amplitude: $\left.\frac{\mathrm{d}A(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_R} = 0$

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}, \qquad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{F_0}{2m}\frac{-2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)2\omega+8\gamma^2\omega}{\left(\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}\right)^3}$$

TM eq. (3.63)

$$\rightarrow \quad \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Para $\gamma \ll \omega_0 \;\rightarrow\; \omega_R \approx \omega_0$

Condição de ressonância em energia: $\left.\frac{\mathrm{d}\langle T(t)\rangle}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_E} = 0$

$$\dot{x}_\mathrm{p}(t) = -\omega A\,\mathrm{sen}\,\underbrace{(\omega t - \varphi)}_{\phi(t)} \qquad \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \mathrm{sen}^2\,\phi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

$$\langle T(t)\rangle = \frac{1}{2}m\langle\dot{x}_\mathrm{p}^2(t)\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\overbrace{\langle\mathrm{sen}^2\,\phi(t)\rangle} = \frac{F_0^2}{4m}\frac{\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\langle T(t)\rangle}{\mathrm{d}\omega} = \frac{F_0^2}{4m}\frac{2\omega(\omega_0^4-\omega^4)}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]^2} \longrightarrow$$

TM eq. (3.72)

$$\omega_E = \omega_0$$

Potência média fornecida: $\langle P(t)\rangle = \langle \dot{x}_\mathrm{p}(t)F(t)\rangle$

$$\dot{x}_\mathrm{p}(t)F(t) = -\omega A\,\overbrace{\mathrm{sen}(\omega t-\varphi)}^{\mathrm{sen}\,\omega t\cos\varphi-\cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\varphi}\,F_0\cos\omega t$$

$$\langle P(t)\rangle = \omega A F_0\,\underbrace{\langle\cos^2\omega t\rangle}_{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}}\,\mathrm{sen}\,\varphi, \qquad \mathrm{sen}\,\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

S eq. (2.169)

$$\langle P(t)\rangle = \frac{F_0^2}{m}\frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} = 4\gamma\langle T(t)\rangle$$

Ressonância em $\langle P(t)\rangle$ ocorre também em $\omega_P = \omega_E = \omega_0$

Fator de qualidade

Calcular a fração de energia dissipada por ciclo de oscilação de um oscilador sub-amortecido com baixa dissipação, ou $\gamma << \omega_0$

Fator de qualidade de um oscilador amortecido

Potência fornecida ao oscilador forçado

Potência média fornecida ao oscilador forçado com força externa periódica $F(t) = F_0 \cos \omega t$

$$\boxed{\overline{P} = \frac{F_0^{\ 2}}{m} \frac{\gamma \omega^2}{\left(\omega_0^{\ 2} - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

Fator de qualidade: $Q \equiv \dfrac{\omega_R}{2\gamma} \approx 2\pi \dfrac{E_{\text{tot}}}{|\Delta E_{\text{tot}}|} \approx \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$

TM problemas 3.18 e 3.19

$$E_{\text{tot}} = T + V = \tfrac{1}{2} m \dot{x}_{\text{p}}^2 + \tfrac{1}{2} m \omega_0^2 x_{\text{p}}^2 \overset{\gamma \ll \omega_0}{\approx} \tfrac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$$

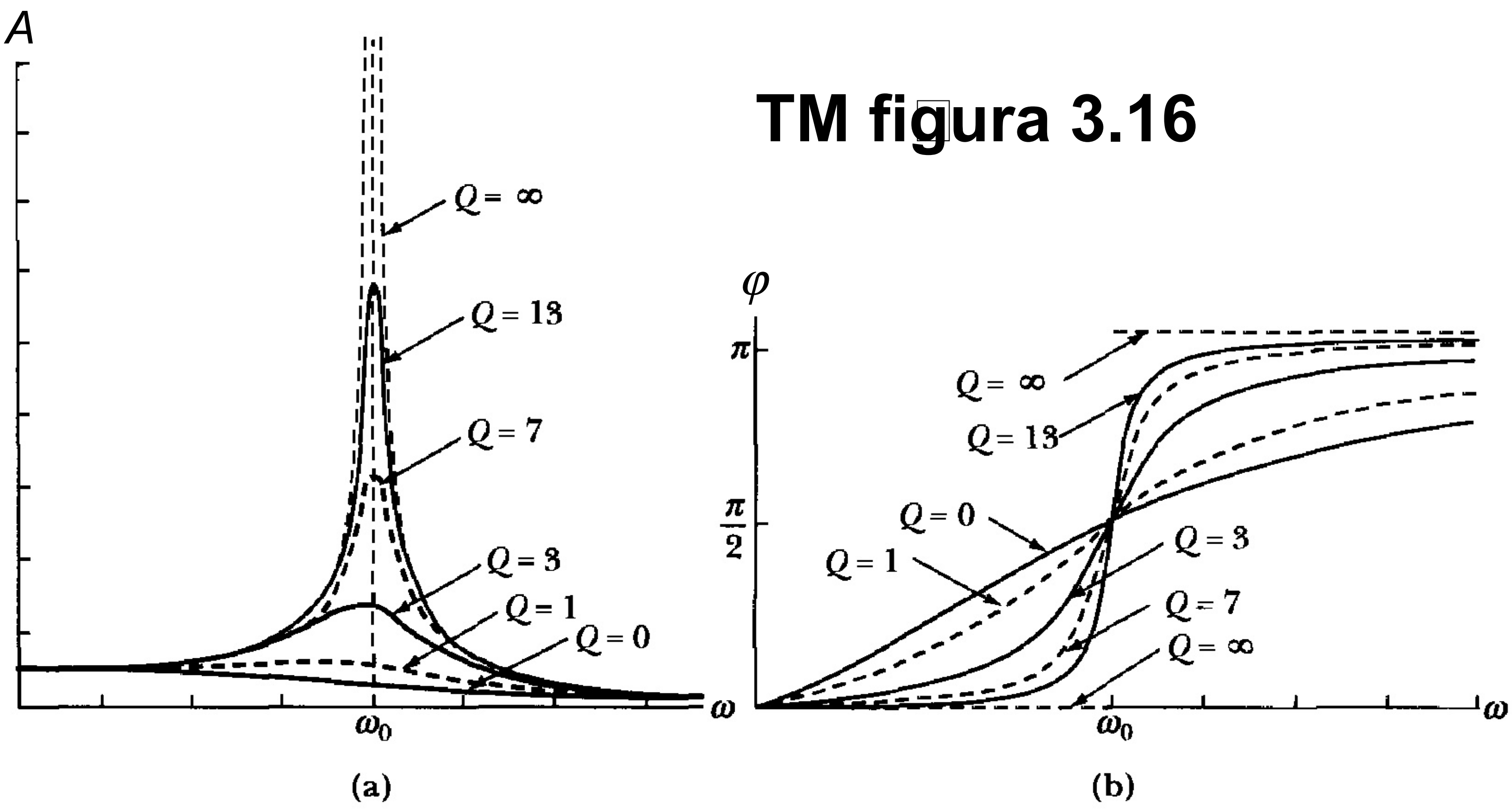
$$\Delta E_{\text{tot}} = \int \underbrace{2\gamma m \dot{x}_{\text{p}}}_{F_{\text{viscosa}}} \mathrm{d}x_{\text{p}} = \int_0^{2\pi/\omega} 2\gamma m \dot{x}_{\text{p}}^2 \, \mathrm{d}t = 2\pi\gamma m \omega A^2$$

$\Delta\omega$ é a diferença entre as frequências $\omega_\pm$ associadas às amplitudes $\frac{A_R}{\sqrt{2}} = \frac{F_0}{2\gamma m} \Big/ \sqrt{2(\omega_0^2 - \gamma^2)} = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_\pm^2\right)^2 + 4\gamma^2 \omega_\pm^2}}$

$$\omega_\pm = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2 \pm 2\gamma\omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2/\omega_0^2}} \overset{\gamma \ll \omega_0}{\approx} \omega_0 \pm \gamma$$

Oscilador amortecido forçado

TM figura 3.16



Quebrando um copo por ressonância sonora

Caso já tenha carregado o vídeo aqui, salve-o com o nome *mythbusters_jaime_vendera.mp4* no mesmo diretório deste arquivo pdf. Da próxima vez, basta clicar na foto acima.

Oscilador amortecido forçado

Ressonância:

Animação de oscilador forçado:

https://www.youtube.com/watch?v=aZNnwQ8HJHU

Ponte Tacoma Narrows:

http://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs

Ponte Millenium:

http://www.youtube.com/watch?v=eAXVa__XWZ8

Ressonância mecânica (?) em engenharia civil

Caso já tenha carregado o vídeo aqui, salve-o com o nome *tacoma_narrows_bridge_collapse.mp4* no mesmo diretório deste arquivo pdf. Da próxima vez, basta clicar na foto acima.