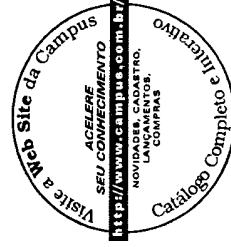


Editor Editorial
Claudio M. Rothmuller

Introdução
Wilson Brand Batista
Departamento de Física – PUC/RJ

MECÂNICA

Keith R. Symon



Preencha a ficha de cadastro no final deste livro e receba gratuitamente o informativo da Campus


EDITORA
CAMPUS

PROBLEMAS

1. Formule e demonstre a Lei da Conservação do Momento Angular, em relação à origem de um sistema de partículas confinadas num plano.
2. Despeja-se água num barril a uma taxa de 60 kg por minuto de uma altura de 5 m. O barril pesa 10 kg e está em repouso sobre a balança. Determine a leitura da balança depois que a água foi despejada no barril durante um minuto.
3. Um pêndulo balístico usado para medir a velocidade de uma bala é construído suspendendo-se um bloco de madeira de massa M por uma corda de comprimento l . O pêndulo encontra-se inicialmente em repouso na vertical. Uma bala de massa m é disparada de encontro ao bloco e se incrusta nele. O pêndulo começa a balançar e se eleva até que a corda faça um ângulo máximo θ com a vertical. Determine a velocidade inicial da bala em termos de M , m , l e θ , aplicando as leis da conservação apropriadas.
4. Uma caixa de massa m cai sobre uma esteira que se move em velocidade constante v_0 . O coeficiente de atrito de deslizamento entre a caixa e a esteira é μ . Em que distância a caixa desliza sobre a esteira, antes que o seu movimento atinja a mesma velocidade da esteira? Que força F deve ser aplicada à esteira para mantê-la em movimento em velocidade constante, depois que a caixa cai sobre ela? Por quanto tempo deve a força ser aplicada? Calcule o impulso fornecido por esta força e verifique se o momento é conservado entre o tempo anterior à queda da caixa sobre a esteira e o tempo em que a caixa inicia seu movimento solidário com a esteira. Calcule o trabalho realizado pela força F para puxar a esteira. Calcule o trabalho dissipado pelo atrito entre a caixa e a esteira. Verifique se a energia fornecida à esteira pela força F é exatamente igual ao acréscimo de energia cinética da caixa mais a energia dissipada pelo atrito.
5. Uma caçamba de massa m_1 é ligada a uma haste de comprimento l e peso desprezível. A haste é fixada a um eixo de maneira que a caçamba possa balançar livremente, formando um arco na vertical de raio l . A uma distância l diretamente abaixo do eixo existe um monte de areia. A caçamba é levantada até que a haste forme um ângulo de 45° com a vertical, sendo então largada. No seu movimento para baixo, a caçamba pega uma massa m_2 de areia. Em que ângulo com a vertical a haste da caçamba se eleva após ter pegado a areia? Este problema deve ser resolvido, considerando-se cuidadosamente as leis da conservação que podem ser aplicadas em cada parte do movimento da caçamba. O atrito deve ser desprezado, exceto no caso necessário para manter a areia na caçamba.
6. a) Um satélite esférico de massa m , raio a , move-se em velocidade v numa atmosfera ténue de densidade p . Determine a força de atrito exercida sobre ele, supondo que a velocidade das moléculas do ar possam ser desprezadas em comparação com v , e que cada molécula que colide com o satélite permaneça presa na sua superfície. O leitor acredita que estas suposições sejam válidas?

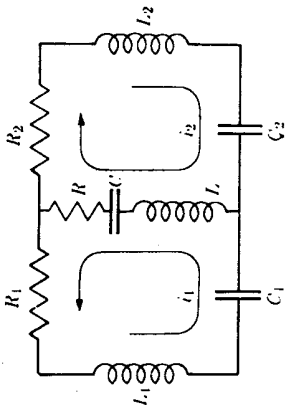


Fig. 4.17 Acoplamento de circuitos oscilantes.

Estas equações podem ser resolvidas pelo método descrito acima, levando a resultados similares. Se as forças de atrito não forem muito grandes, aparecerão dois modos normais de vibração.

As equações da forma (4.188) e (4.189), ou os casos especiais simples considerados nas discussões anteriores, não aparecem somente na teoria do acoplamento de osciladores mecânicos, mas também na teoria de acoplamento de circuitos elétricos. Aplicando-se a segunda lei de Kirchhoff às duas malhas do circuito mostrado na Fig. 4.17, com correntes i_1 e i_2 em cada uma das malhas conforme é indicado na figura, tem-se

$$(L + L_1)\ddot{q}_1 + (R + R_1)\dot{q}_1 + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_1}\right)q_1 + L\ddot{q}_2 + R\dot{q}_2 + \frac{1}{C}q_2 = 0, \quad (4.190)$$

e

$$(L + L_2)\ddot{q}_2 + (R + R_2)\dot{q}_2 + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_2}\right)q_2 + L\ddot{q}_1 + R\dot{q}_1 + \frac{1}{C}q_1 = 0, \quad (4.191)$$

onde q_1 e q_2 são as cargas acumuladas nos condensadores C_1 e C_2 pelas correntes i_1 e i_2 . Estas equações têm a mesma forma que as Eqs. (4.188) e (4.189) e podem ser resolvidas por métodos similares. Nos circuitos elétricos, o amortecimento, em geral, é grande e, por isso, a solução das equações acima requer um trabalho considerável.

A discussão desta seção pode ser estendida ao caso de um número qualquer de osciladores harmônicos, mecânicos ou elétricos, acoplados, para os quais os resultados são análogos. Os detalhes algébricos tornam-se quase proibitivos, a menos que se usem técnicas matemáticas mais avançadas. Assim sendo, a discussão deste problema será postergada até o Cap. 12.

Todos os problemas de vibração mecânica ou elétrica se reduzem, no caso-limite de vibrações de pequenas amplitudes, aos que envolvem o acoplamento de um ou vários osciladores harmônicos. Problemas sobre molas, membranas, sólidos elásticos e vibrações elétricas e acústicas em linhas de transmissão podem ser reduzidos a problemas sobre acoplamento de osciladores, possuindo, similarmente, modos normais de vibração. O tratamento do comportamento de um átomo, ou de uma molécula, de acordo com a Mecânica Quântica resulta num problema matemático idêntico ao de osciladores harmônicos acoplados, no qual os níveis de energia tomam o lugar dos osciladores, e as influências perturbadoras externas tomam o lugar do mecanismo de acoplamento.

b) Se a órbita for circular, a 40 km acima da Terra (raio 6 360 km), onde $p = 10^{-11} \text{ kg/m}^{-3}$ e se $a = 1 \text{ m}$, e $m = 100 \text{ kg}$, determine a variação de altitude e a variação no período de revolução em uma semana.

7. Uma nave espacial aproxima-se da superfície da Lua. Supondo-se que um terço de seu peso seja combustível e que a velocidade dos gases de exaustão do motor do foguete seja de 1 500 m/s e que a aceleração da gravidade na superfície lunar seja igual a um sexto da aceleração da gravidade na superfície da Terra, por quanto tempo a nave espacial pode permanecer girando em torno e próximo à superfície da Lua até que o combustível acabe?

8. Um foguete de brinquedo consiste numa garrafa de plástico parcialmente cheia d'água e contendo também ar a uma pressão alta p . A água é ejetada através de um pequeno orifício de área A . Calcule a velocidade de exaustão v , admitindo que as perdas de energia por atrito sejam desprezíveis, de forma que a energia cinética da água que escapa seja igual ao trabalho realizado pela pressão do gás para empurrar a água para fora. Mostre que o empuxo deste motor de foguete é igual a $2pA$. (Suponha que a água abandona o orifício de área A com velocidade v .) No caso de o foguete vazio pesar 500 g, se contiver inicialmente 500 g de água e se $A = 5 \text{ mm}^2$, qual será a pressão necessária para que o foguete possa sustentar-se com a gravidade? Se ele, então, for lançado de maneira a ser acelerado para cima, que velocidade máxima atingirá? Que altura ele atingirá aproximadamente? Quais os efeitos desprezados nos cálculos e como cada um deles afeta o resultado final?

*9. Um foguete de dois estágios foi construído com capacidade para acelerar uma carga de 100 kg até uma velocidade de 6 000 m/s em vôo livre no espaço livre (sem força gravitacional). (Num foguete de dois estágios, o primeiro é abandonado quando acaba o combustível, mas antes que o segundo estágio seja ligado.) Suponha que o combustível usado possa atingir uma velocidade de exaustão de 1 500 m/s, e que a estrutura do foguete implica que o seu peso vazio (sem combustível ou carga) pesará 10% a mais do que o combustível que ele pode carregar. Determine a melhor escolha para as massas dos dois estágios, de forma que o peso total no lançamento seja mínimo. Mostre que é impossível se construir um foguete de um estágio que possa realizar este trabalho.

10. Um foguete deve ser lançado verticalmente. Sua massa inicial é M_0 , a velocidade de exaustão $-u$ é constante e a taxa de exaustão $-(dM/dt) = A$ é constante. Depois que a massa total ΔM é consumida, o combustível do foguete acaba.

a) Desprezando-se a resistência do ar e supondo que a aceleração da gravidade g seja constante, escreva e resolva as equações do movimento.

*b) Mostre que se M_0 , u e ΔM forem fixados, então a maior taxa de exaustão A , isto é, a que consome o combustível mais rapidamente, corresponderá à maior altitude máxima atingida pelo foguete.

11. Suponha que toda a massa M do giroscópio mostrado na Fig. 4.1 concentre-se essencialmente na borda do volante de raio R , e que o centro de massa encontra-se no

plano a uma distância l do ponto de apoio Q . Se o giroscópio girar rapidamente em velocidade angular ω , mostre que a velocidade angular de precessão de seu eixo, num cone que forme um ângulo α com a vertical é aproximadamente

$$\omega_p = g/(R^2 \omega^2).$$

12. Um mergulhador, ao executar um salto de 2 voltas e meia, curva-se com os joelhos e braços numa posição que aumenta a sua velocidade angular. Estime a razão com que ele aumenta a velocidade angular em relação à sua velocidade angular, quando estica o corpo e mantém os braços acima da cabeça. Explique o seu raciocínio.

13. Um planeta esférico e uniforme de raio a gira em torno do Sol em órbita circular de raio r_0 e em torno de seu eixo em velocidade angular ω_0 , normal ao plano da órbita. Devido à elevação das marés pelo Sol, a velocidade angular de rotação está decrescendo. Determine uma fórmula para expressar o raio da órbita r em função da velocidade angular de rotação ω num tempo anterior ou posterior. [O leitor precisará usar as fórmulas (5.9) e (5.91) do Cap. 5.] Aplique as fórmulas obtidas para o caso em que o planeta seja a Terra, desprezando os efeitos da Lua. Estime em que distância a Terra estará do Sol quando o dia tornar-se igual ao ano atual. Se o efeito da Lua fosse levado em conta, a distância seria maior ou menor?

*14. Uma massa m formada de gás e fragmentos envolve uma estrela de massa M . O raio da estrela é desprezível em comparação com as distâncias das partículas do gás e dos fragmentos. O material que envolve a estrela tem inicialmente um momento angular total L , e uma energia cinética e potencial total E . Suponha que $m \ll M$, de tal forma que os campos gravitacionais devido às massas m são desprezíveis em comparação com o campo gravitacional da estrela. Devido ao atrito interno, o material que envolve a estrela perde energia mecânica. Mostre que existe uma energia máxima ΔE que pode ser perdida desta maneira, e que quando perder esta energia, o material deve permanecer num anel circular em torno da estrela (mas não necessariamente distribuído uniformemente). Determine ΔE e o raio do anel. (O leitor deve usar o método dos multiplicadores de Lagrange.)

15. Uma partícula de massa m_1 e energia T_{1i} colide elasticamente com uma partícula de massa m_2 em repouso. Se a massa m_2 deixar o local da colisão em um ângulo θ_2 com a direção original do movimento de m_1 , qual a energia T_{2f} transferida para a partícula m_2 ? Mostre que T_{2f} é um máximo para uma colisão frontal e que, neste caso, a perda de energia da partícula incidente na colisão é

$$T_{1i} - T_{1f} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} T_{1i}.$$

16. A fotografia de uma câmara de nuvem mostra o traço de uma partícula incidente em colisão e sendo espalhada num ângulo θ_1 . O traço da partícula-alvo faz um ângulo θ_2 com a direção da partícula incidente. Supondo que a colisão foi elástica e que a partícula-alvo estava inicialmente em repouso, determine a razão m_1/m_2 das duas massas.

(Suponha que as velocidades sejam pequenas, de forma que as expressões para a energia e o momento linear podem ser usadas.)

17. Um próton de massa m_1 colide elasticamente com um núcleo desconhecido numa câmara de bolhas, sendo espalhado num ângulo ϑ_1 . A razão p_{1f}/p_{1i} é determinada a partir da curvatura de seus traços inicial e final. Determine a massa m_2 do núcleo-alvo. Como será possível determinar se a colisão foi realmente elástica?

18. Numa experiência na qual partículas de massa m_1 colidem elasticamente com partículas de massa m_2 , deseja-se colocar um contador em posição onde serão contadas as partículas que perderam metade do seu momento inicial. Em que ângulo ϑ_1 , em relação ao feixe incidente, deve ser colocado o contador? Para que intervalos da razão entre as massas m_1/m_2 este problema é possível?

19. Mostre que uma colisão elástica corresponde a um coeficiente de restituição $e = 1$, isto é, mostre que no caso de uma colisão elástica frontal entre duas partículas, a Eq. (4.85) é válida quando $e = 1$.

20. Calcule a perda de energia $-Q$ para uma colisão frontal entre uma partícula de massa m_1 , em velocidade v_1 , com uma outra de massa m_2 em repouso, se o coeficiente de restituição for e .

21. Uma partícula de massa m_1 e momento linear p_{1i} colide elasticamente com uma outra de massa m_2 e momento linear p_{2i} deslocando-se em direção oposta. Se θ_1 for a direção da massa m_1 após a colisão, em relação à sua trajetória inicial, determine o momento linear final.

22. Determine as correções relativísticas da Eq. (4.81), quando a partícula incidente m_1 e a partícula emitida m_3 se movem em velocidade próxima da velocidade da luz. Suponha que a partícula de recuo m_4 esteja em movimento suficientemente devagar, de forma que a relação clássica entre a energia e o momento possa ser usada em relação a ela.

23. Uma partícula de massa m_1 e momento p_1 colide com uma outra de massa m_2 em repouso. Uma reação ocorre dando como resultado duas partículas de massas m_3 e m_4 , que são emitidas em ângulos θ_3 e θ_4 , em relação à direção original de m_1 . Determine a energia Q produzida na reação em termos das massas, dos ângulos e de p_1 .

24. Uma reação nuclear cujo Q é conhecido ocorre numa placa fotográfica, na qual os traços da partícula incidente m_1 e das duas partículas resultantes m_3 e m_4 podem ser vistos. Determine a energia da partícula incidente, em termos de m_1 , m_2 , m_3 , m_4 e Q , e os ângulos θ_3 e θ_4 medidos entre o traço da partícula incidente e os dois traços das partículas espalhadas. O que acontecerá se $Q = 0$?

25. Uma bola de bilhar desliza sobre uma mesa sem atrito e colide com uma bola idêntica em repouso. As bolas são espalhadas em ângulos $\pm \vartheta$ em relação à direção original do movimento. Mostre que depois da colisão as bolas devem ter uma energia de rotação igual a $1 - \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta$ da energia cinética inicial, supondo que não há energia dissipada por atrito.

26. Uma partícula neutra, de momento linear e direção desconhecidos, produz uma reação numa câmara de bolhas, na qual duas partículas carregadas de massas m_3 e m_4 emergem com momentos lineares p_3 e p_4 . O ângulo entre os seus traços é α . Determine a direção e o momento linear da partícula incidente. Se a massa m_1 da partícula incidente for conhecida, determine a energia Q liberada na reação. (Considere velocidades não-relativísticas.)

27. O espalhamento Compton de raios X pode ser interpretado como o resultado de colisões elásticas entre fótons de raios X e elétrons livres. De acordo com a Teoria Quântica, um fóton de comprimento de onda λ tem uma energia cinética hc/λ e momento linear de módulo h/λ , onde h é a constante de Planck e c é a velocidade da luz. No efeito Compton, um feixe incidente de raios X, cujo comprimento de onda é λ_i e direção conhecida, é espalhado ao passar pela matéria; a radiação, espalhada num ângulo ϑ_1 , em relação à direção do feixe incidente, tem comprimento de onda maior λ_f , que é função do ângulo ϑ_1 . Supondo que a colisão entre o fóton incidente e um elétron de massa m em repouso seja clássica, escreva as equações que expressam a conservação de energia e de momento linear. Use as expressões relativísticas para a energia e o momento linear do elétron. Mostre que a variação no comprimento de onda do raio X é

$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{mc} (1 - \cos \vartheta_1),$$

e que o elétron espalhado aparece num ângulo dado por

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{\operatorname{sen} \vartheta_1}{[1 + (h/\lambda_i mc)] (1 - \cos \vartheta_1)}$$

28. Faça a correção da Eq. (3.267), levando em conta o movimento da massa central M sobre a influência da massa m que gira em torno dela. Um par de estrelas gira, uma em torno da outra, tão próximas que elas aparecem no telescópio como uma única estrela. Determinou-se através de observações espectroscópicas que as duas estrelas têm massas iguais e cada uma gira em círculo com velocidade v e período τ sob a ação da força da outra. Determine a massa de cada uma das estrelas usando a fórmula obtida acima.

29. Uma nave espacial de massa m e velocidade inicial v_0 aproxima-se da Lua e passa por ela. A distância de maior aproximação é R (medida a partir do centro do satélite). A velocidade v_0 é perpendicular à velocidade V da Lua. Mostre que se a nave espacial

passar atrás da Lua, ganhará energia, é calcule o acréscimo em sua energia cinética, quando deixa as vizinhanças da Lua. Suponha que $M \gg m$, onde M é a massa lunar.

30. Uma estrela de massa m e velocidade inicial v_0 aproxima-se de uma segunda estrela de massa $2m$ e em repouso. A primeira estrela desloca-se inicialmente ao longo de uma linha que, se não fosse desviada, passaria a uma distância s da segunda estrela. Determine a velocidade e a direção finais de cada estrela.

31. Mostre que se a partícula incidente for muito mais pesada do que a partícula-alvo ($m_1 \gg m_2$), a seção de choque de Rutherford [Eq. (3.276)] no sistema de coordenadas do laboratório será aproximadamente

$$d\sigma \approx \left(\frac{q_1 q_2}{2m_2 v_0^2} \right)^2 \frac{4\gamma^2}{[1 - (1 - \gamma^2 \vartheta_1^2)^{1/2}]^2 (1 - \gamma^2 \vartheta_2^2)^{1/2}} 2\pi \sin \vartheta_1 d\vartheta_1$$

se $\gamma \vartheta_1 < 1$, onde $\gamma = m_1/m_2$. Caso contrário, $d\sigma = 0$.

32. Escreva uma expressão análoga à Eq. (4.116) para o ângulo de recuo da partícula-alvo (ϑ_2 na Fig. 4.7), em termos do ângulo de espalhamento Θ do problema equivalente de um só corpo. Mostre que, no caso de uma colisão elástica,

$$\vartheta_2 = \frac{1}{2}(\pi - \Theta).$$

33. Suponha que $m_2 \gg m_1$, e que $\Theta = \vartheta_1 + \delta$, na Eq. (4.117). Encontre uma fórmula para δ em termos de ϑ_1 . Mostre que a correção de primeira ordem para a seção de choque de espalhamento de Rutherford [Eq. (3.276)], devido à massa finita de m_2 , se anula.

34. Uma esfera elástica de raio a colide com uma esfera idêntica em repouso. Suponha que, no sistema de coordenadas do centro de massa, as partículas colidem de tal forma que as velocidades relativas antes e após o choque fazem ângulos iguais com a normal às duas esferas no ponto de contato. Determine a seção de choque para espalhamento da esfera incidente num ângulo θ_1 .

35. Um par de massas, m_1 e m_2 , ligadas por uma mola de constante k , desliza sem atrito ao longo do eixo x . Mostre que o centro de massa se move em velocidade uniforme e que as massas oscilam com frequência $k(m_1 + m_2)/m_1 m_2^{1/2}$.

36. Escreva as equações do movimento representado na Fig. 4.10, supondo que o comprimento de cada mola relaxada seja l e que a distância entre as paredes seja $3l + a$, de tal forma que as molas estejam esticadas, mesmo na posição de equilíbrio. Mostre que as equações podem ser escritas da mesma forma que as Eqs. (4.135) e (4.136).

37. Para os modos normais de vibração dados pelas Eqs. (4.162) e (4.163), determine a força exercida sobre m_1 através da mola de acoplamento; mostre que o movimento

de x_1 satisfaz a equação para um oscilador harmônico simples sujeito a uma força adicional.

38. Na Fig. 4.10, $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2$, $k_2 = 0,9k$ e $k_3 = 0,1k$. A massa m_2 é mantida inicialmente fixa na posição de equilíbrio e a massa m_1 é deslocada numa distância A a partir de sua posição de equilíbrio; e, então, as duas massas são largadas. Determine $x_1(t)$ e $x_2(t)$, mostrando que o seu resultado concorda qualitativamente com a Fig. 4.13.

39. Determine os dois modos normais de vibração para um par de osciladores harmônicos amortecidos, idênticos e acoplados [Eq. (4.180) e (4.181)]. Isto é, $m_1 = m_2$, $b_1 = b_2$ e $k_1 = k_2$. [Sugestão. Se $k_3 = 0$, o leitor certamente achará a solução. Verifique que este ponto é importante na fatoração da equação secular.]

40. Estabeleça as equações de movimento para o sistema mostrado na Fig. 4.16. Os comprimentos relaxados das duas molas são l_1 e l_2 . Separe o problema em dois: um envolvendo o movimento do centro de massa e o outro envolvendo o "movimento interno", descrito pelas duas coordenadas: x_1 e x_2 . Determine os modos normais de vibração.

41. O sistema de osciladores acoplados, mostrado na Fig. 4.10, é submetido à ação de uma força

$$F = F_0 \cos \omega t,$$

aplicada à massa m_1 . Estabeleça as equações do movimento e determine a solução estacionária. Faça um gráfico da amplitude e da fase das oscilações de cada oscilador como função de ω .

$$\rho = \rho_0 \exp \left(\int_{p_0}^p \frac{dp}{B} \right). \quad (5.184)$$

Em geral, a densidade de um fluido é determinada pela equação de estado, em termos de pressão e de temperatura. A equação de estado para um gás perfeito é

$$pV = RT, \quad (5.185)$$

onde T é a temperatura absoluta, V o volume em moles e R , a constante universal dos gases:

$$R = 8,314 \times 10^7 \text{ erg-deg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \text{ mol}^{-1} \quad (5.186)$$

Substituindo-se este resultado na Eq. (5.181), obtém-se a densidade em termos de pressão e de temperatura:

$$\rho = \frac{Mp}{RT}, \quad (5.187)$$

onde M é o peso molecular.

Aplicam-se estes resultados ao caso mais comum, em que a força gravitacional que atua sobre o fluido tem origem no campo gravitacional vertical [Eq. (5.169)]. Aplicando-se a Eq. (5.173) neste caso, tem-se

$$\nabla \times f = \nabla \times (\rho g) = 0. \quad (5.188)$$

Como g é constante, a derivação indicada pelo símbolo ∇ atua somente em p e pode-se deslocar o escalar p de um fator do produto vetorial para outro, obtendo-se

$$(\nabla \rho) \times g = 0, \quad (5.189)$$

isto é, o gradiente da densidade deve ser paralelo ao campo gravitacional. A densidade deve ser constante em qualquer plano horizontal no interior do fluido. A Eq. (5.189) também pode ser derivada a partir da Eq. (5.188), escrevendo-se explicitamente os componentes dos vetores $\nabla \times (\rho g)$ e $(\nabla p) \times g$ e verificando que eles são iguais⁴. De acordo com a Eq. (5.172), a pressão também é constante em qualquer plano horizontal dentro do fluido. Portanto, a pressão e a densidade só serão funções da altura vertical z no interior do fluido. A partir das Eqs. (5.172) e (5.169), obtém-se uma equação diferencial para a pressão como função de z :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (5.190)$$

Se o fluido for incompressível e ρ uniforme, a solução desta equação será

$$p = p_0 - \rho g z, \quad (5.191)$$

⁴ A Eq. (5.189) é válida também em campo gravitacional não-uniforme, pois $\nabla \times g = 0$, de acordo com a Eq. (6.21).

onde p_0 é a pressão em $z = 0$. Se o fluido for um gás perfeito, p , ou ρ , pode ser eliminado da Eq. (5.190) por meio da Eq. (5.187). Eliminando-se a densidade, tem-se

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{Mg}{RT} p. \quad (5.192)$$

Por exemplo, admitindo-se que a temperatura e a composição da atmosfera sejam uniformes, pode-se resolver a Eq. (5.192) e obter a pressão atmosférica como função da altitude:

$$p = p_0 \exp \left(-\frac{Mg}{RT} z \right). \quad (5.193)$$

PROBLEMAS

1. (a) Prove que a energia cinética total de um sistema de partículas que constituem um corpo rígido, conforme foi definido pela Eq. (4.37), é dada corretamente pela Eq. (5.16), quando o corpo gira em torno de um eixo fixo. (b) Prove que a energia potencial dada pela Eq. (5.14) é o trabalho total realizado contra as forças externas, quando o corpo gira de θ_s para θ , se N_z for a soma dos torques em torno do eixo devido às forças externas.

2. Usando o esquema de analogia dado na Sec. 5.2, formule um teorema análogo ao dado pela Eq. (2.8) e demonstre-o a partir da Eq. (5.13).

3. Demonstre, a partir da equação do movimento (5.13) para rotação, que se N_z for somente função de θ , então $T + V$ será uma constante.

4. O balancim de um relógio consiste num anel de massa M , raio a e raios de massa desprezíveis. A mola (cabelo) exerce um torque restaurador $N_z = -k\theta$. Determine o movimento, no caso de o balancim ser deslocado num ângulo θ_0 e tirado do repouso.

5. Um roda de massa M e raio de giração k gira em torno de um eixo horizontal fixo de raio a , que passa por um orifício de raio ligeiramente maior no cubo da roda. O coeficiente de atrito entre as superfícies em contato é μ . Se a roda girar inicialmente com velocidade angular ω_0 , determine o tempo e o número de voltas dadas pela roda até parar.

6. Uma roda de massa M e raio de giração k está montada num eixo horizontal. Uma mola adaptada ao eixo exerce um torque $N = -k\theta$, que tende a restaurar a posição de equilíbrio da roda, $\theta = 0$. Uma massa m é colocada na borda da roda numa distância $2k$ do eixo, num ponto vertical colocado acima dele, quando $\theta = 0$. Descreva os tipos de movimento que podem ocorrer; localize as posições de equilíbrio estável ou instável da roda, se existirem, e determine as frequências para pequenas oscilações em torno dos pontos de equilíbrio. Considere dois casos: (a) $K > 2mgk$. (b) $K = 4mgk/\pi$. (c) que acontece se $K < 4mgk/5\pi$? [Sugestão. Resolva graficamente a equação trigonométrica.]

7. A hélice de um avião de momento de inércia I está sujeita à ação de um torque acelerador

$$N = N_0(1 + \alpha \cos \omega_0 t),$$

e de um torque de atrito devido à resistência do ar:

$$N_f = -b\dot{\theta}.$$

Determine o estado estacionário do movimento.

8. A armadura de um motor pesando 2 kg tem um raio de giração de 5 cm. A sua velocidade sem carga é de 1 500 rpm. Ela foi enrolada de tal maneira que o seu torque é independente da velocidade. Quando atinge a velocidade final, o motor puxa uma corrente de 2 ampères em 110 volts. Admita que a eficiência elétrica seja de 80% e que o atrito seja proporcional ao quadrado da velocidade angular. Determine o tempo necessário para atingir a velocidade de 1 200 rpm após ter sido ligado sem carga.

9. Derive as Eqs. (5.35) e (5.36).

10. Suponha que um pêndulo simples sofra um torque igual a $-mb_1\dot{\theta}$, devido ao atrito com os pontos de sustentação, e uma força de atrito $-b_2v$ sobre o pêndulo devido à resistência do ar, onde v é a velocidade do pêndulo. O pêndulo tem massa m e está suspenso por um fio de comprimento l . Determine o tempo necessário para que a amplitude seja amortecida a $1/e$ de seu valor inicial (pequeno). Como m e l devem ser escolhidos para que o pêndulo oscile durante o tempo mais longo possível? Como m e l devem ser escolhidos para que o pêndulo oscile o maior número de ciclos possível?

11. Uma criança de massa m senta-se num balanço de massa desprezível, cujos cabos têm um comprimento l . Suponha que as dimensões sejam desprezíveis comparadas com l . O pai puxa a criança pelas costas até o cabo fazer um ângulo de um radiano com a vertical e, então, a empurra com uma força $F = mg$ ao longo do arco de círculo até que o cabo esteja na vertical e solta o balanço. (a) Que altura atinge o balanço? (b) Por quanto tempo o pai empurrou o balanço? (Suponha que seja permitido escrever $\text{seno } \theta \approx \theta$ para $\theta < 1$.) Compare com o tempo necessário para o balanço atingir a vertical, caso ele seja largado sem ser empurrado.

12. Um bastão de beisebol mantido em repouso na horizontal é atingido no ponto O' por uma bola que lhe fornece um impulso horizontal J' perpendicular ao bastão. Considere que a posição inicial do bastão é paralela ao eixo y . O centro de massa G do bastão encontra-se inicialmente na origem e o ponto O' a uma distância h' de G . Supondo-se que o bastão seja deixado livre após a colisão da bola, e desprezando-se o efeito da gravidade, calcule e faça gráficos dos movimentos $x(t)$ e $y(t)$ do centro de massa e também do centro de percussão, durante os primeiros momentos após a colisão, por exemplo, até que o bastão tenha girado um quarto de volta. Faça um comentário sobre a diferença entre o movimento inicial do centro de massa e o movimento do centro de percussão.

13. Um pêndulo composto é montado de forma a oscilar em relação a um dos dois eixos paralelos que passam pelos dois pontos O e O' , localizados sobre uma linha que passa pelo centro de massa. As distâncias h e h' , de O e O' ao centro de massa, e os períodos τ e τ' , para vibrações de pequenas amplitudes em torno de eixos que passam por O e O' , são medidos. Os pontos O e O' são escolhidos de forma que cada um deles seja aproximadamente o centro de oscilação em relação ao outro. Se $\tau = \tau'$, ache uma fórmula para g em termos das grandezas medidas. Se $\tau' = \tau(1 + \delta)$ onde $\delta \ll 1$, determine a correção que deve ser somada à fórmula anterior, de maneira a corrigi-la em termos de ordem δ .

14. Prove que, no caso de um corpo ser composto de duas ou mais partes cujos centros de massa são conhecidos, seja possível determinar seu centro de massa, considerando-se as suas partes componentes como partículas localizadas nos centros de massa respectivos. Suponha que cada parte componente k seja descrita por uma densidade de massa $\rho_k(r)$ distribuída continuamente sobre a região ocupada pela parte k .

15. Um disco circular de raio a , localizado no plano xy , tem seu centro na origem. A parte do disco acima do eixo x tem uma densidade σ , por unidade de área, e a metade abaixo do eixo x tem uma densidade 2σ . Determine o centro de massa G e os momentos de inércia, em relação aos eixos x , y e z e a um eixo paralelo que passa por G . Utilize sempre que possível os teoremas simplificados.

16. a) Determine a fórmula para o momento de inércia de um cone de massa m , altura h e ângulo gerador α , em relação ao seu eixo de simetria e a um eixo que passa pelo cume e é perpendicular ao eixo de simetria. Determine o centro de massa do cone.

b) Use os resultados do item anterior para determinar o centro de massa do tronco de cone, mostrado na Fig. 5.28, e calcule os momentos de inércia, em relação aos eixos horizontais que passam por cada uma das bases e pelo centro de massa. A massa do tronco de cone é M .

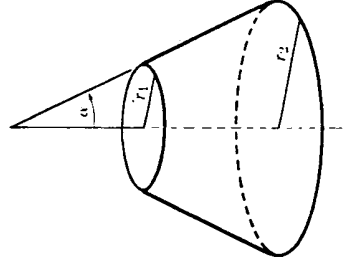


Fig. 5.28 Tronco de cone.

17. Determine os momentos de inércia do bloco mostrado na Fig. 5.8, em relação aos eixos que passam pelo centro de massa e são paralelos a cada uma das três arestas do bloco.

18. Através de uma esfera de massa M e raio R , faz-se um corte plano a uma distância $1/2R$ a partir do centro e descarta-se a parte menor. Determine o centro de massa da parte restante e os momentos de inércia, em relação aos seus eixos de simetria e a um eixo perpendicular que passa pelo centro de massa.

19. Quantos metros de fio de $0,075$ cm de diâmetro podem ser enrolados em carretel, como o mostrado na Fig. 5.29?

20. Sabendo-se que o volume de um cone é um terço da área da base multiplicado pela altura, determine, usando o Teorema de Pappus, o centróide de um triângulo cujos catetos sejam a e b .

21. Prove que o Segundo Teorema de Pappus é válido, mesmo que o eixo de revolução intercepte a superfície, admitindo-se como volume a diferença entre os volumes gerados pelas duas partes em que a superfície foi dividida pelo eixo. Qual a generalização correspondente ao Primeiro Teorema?

22. Determine o centro de massa de um arame encurvado na forma de uma semicircunferência de raio a . Determine os três raios de giração em relação aos eixos x , y e z que passam pelo centro de massa, onde z é perpendicular ao plano da semicircunferência e x a divide em partes iguais. Use a sua engenhosidade para reduzir o número de cálculos a um mínimo possível.

23. a) Determine uma fórmula para o raio de giração de uma haste de comprimento l , em relação ao eixo situado na sua extremidade e fazendo um ângulo α com ela.

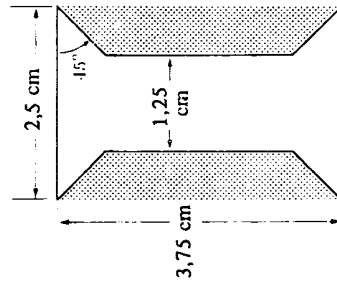


Fig. 5.29 Qual a quantidade de fio que pode ser enrolado neste carretel?

b) Usando este resultado, determine o momento de inércia de uma pirâmide triangular de lados iguais, construída com seis hastas uniformes, em relação ao eixo que passa pelo seu centróide e por um dos seus vértices.

24. Determine o raio de giração de uma lâmina plana em forma de elipse, cujo semi-eixo maior é a e excentricidade e , em relação ao seu eixo maior, ao seu eixo menor e a um eixo perpendicular ao plano que passa por um foco.

25. Forças de 1 kgf, 2 kgf, 3 kgf e 4 kgf agem em uma seqüência no sentido dos ponteiros de um relógio ao longo dos quatro lados de um quadrado de $0,5 \times 0,5$ m². As forças estão orientadas no sentido do movimento dos ponteiros do relógio em torno do quadrado. Determine o equilibrante.

26. Forças de $1,0$ N, $1,5$ N e $2,5$ N são exercidas em seqüência no sentido do movimento dos ponteiros do relógio ao longo dos três lados de um triângulo equilátero. Os lados do triângulo têm comprimento de $1,0$ m. Determine a resultante.

27. a) Reduza o sistema de forças que age sobre o cubo mostrado na Fig. 5.30 a uma força equivalente exercida no centro do cubo, mais um conjugado de duas forças exercidas em vértices adjacentes.

b) Reduza o sistema a um outro de duas forças e determine onde estas forças agem.
c) Reduza o sistema a uma única força mais um torque paralelo a ele.

28. Uma pessoa segura uma esfera pesando 500 g entre o polegar e o indicador, em pontos opostos de um diâmetro horizontal. Ata-se uma mola num ponto sobre a superfície da esfera na extremidade de um diâmetro perpendicular à horizontal. A mola é puxada com uma força de 300 g em direção paralela à linha que une o polegar ao indicador. Determine as forças que devem ser exercidas pelo polegar e pelo indicador para manter a esfera estacionária. Existe somente uma resposta? A resposta corresponde a sua intuição física em relação ao problema?

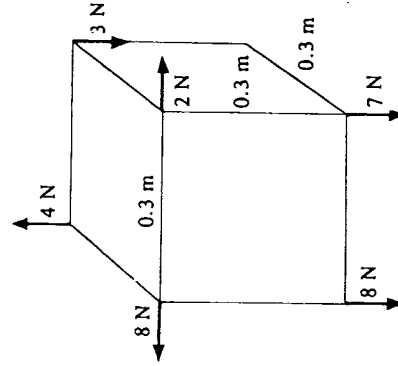


Fig. 5.30 Sistema de forças exercidas sobre um cubo.

29. Um barco a vela navega numa direção que faz um ângulo α com a direção do vento. Suponha que a vela seja uma superfície plana e que é puxada até formar o ângulo β com a quilha do barco. (Se a vela deve pegar o vento, $\beta < \alpha$.) Suponha que a força exercida sobre o barco pelo vento é perpendicular à vela e proporcional ao componente da velocidade do vento perpendicular à vela. Determine o melhor ângulo β para orientar a vela de forma que o componente da força, na direção do deslocamento, seja máximo. Se o piloto desejar atingir um ponto diretamente oposto à direção do vento velejando para direita e para esquerda com um ângulo α em relação à direção do vento, e se o atrito que limita a velocidade do barco for proporcional à velocidade, qual o melhor ângulo α (admitindo-se que β também seja o melhor) que maximiza o componente da velocidade na direção contrária à do vento? Quantas aproximações você pode encontrar nas suposições feitas, e que efeitos cada uma delas teria nos ângulos β e α otimizados?

30. Um cabo de 10 m de comprimento é suspenso entre dois pontos separados horizontalmente numa distância de 5 m. Uma massa de 50 kg é pendurada no ponto intermediário do cabo. A área da seção transversal do cabo é 1 cm^2 e $Y = 500 \text{ kg/cm}^2$. Determine a tração no cabo, tomando a sua deformação em primeira aproximação.

31. Um cabo é desenhado especialmente para suspender uma carga W a uma distância l abaixo do ponto de apoio. O cabo deve ser construído com material cujo módulo de Young é Y e peso w por unidade de volume. Visto que o comprimento l do cabo deve ser razoavelmente longo, deseja-se manter seu peso em um mínimo, fazendo a área da seção transversal $A(z)$ do cabo, a altura z acima da extremidade inferior e de tamanho suficiente para sustentar a carga abaixo dela. O material do cabo pode sustentar seguramente uma carga que produza um esticamento de 1%. Determine a função $A(z)$ quando o cabo estiver sustentando a carga W .

32. a) Um cabo é ligado em linha reta entre dois pontos fixos. Aplicando-se uma força W para o lado no centro do cabo, uma força τ consideravelmente grande pode ser aplicada nos pontos de apoio em cada uma de suas extremidades. Determine uma fórmula para τ e função de W , da área A e do módulo de Young Y do cabo, supondo-se que o ângulo em que o cabo é puxado seja pequeno.

b) Mostre que esta suposição é satisfeita se $W = 450 \text{ N}$, $A = 20 \text{ cm}^2$ e $Y = 41\,000 \text{ N cm}^{-2}$. Determine τ .

33. Um cabo de 6 m de comprimento é suspenso entre dois pontos A e B , separados numa distância de 4,5 m. A linha AB faz um ângulo de 30° com a horizontal (B mais alto). Um peso de 900 kg está pendurado em um ponto C a 2,4 m da extremidade do cabo A .

a) Determine a posição do ponto C e a tração no cabo, considerando-se que o cabo não estica.

b) Se o cabo tiver 1,3 cm de diâmetro e módulo de Young de $35,0 \times 10^7 \text{ N m}^2$, determine a posição do ponto C e as trações, levando-se em conta o estiramento do cabo. Calcule duas aproximações sucessivas e estime a precisão do seu resultado.

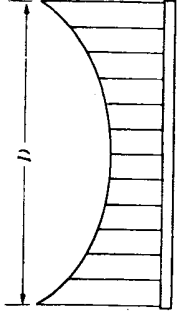


Fig. 5.31 Ponte suspensa.

34. a) Um cabo de comprimento l e peso w , por unidade de comprimento, é suspenso entre os pontos $x = \pm a$ sobre o eixo x . O eixo y é vertical. Fazendo-se $y = 0$ em $x = \pm a$ e o comprimento total do cabo l , mostre que $\alpha = 0$ na Eq. (5.134), e escreva as equações que devem ser resolvidas para obter-se β e C .
b) Mostre que o mesmo resultado pode ser obtido para α e C sendo o cabo simétrico em relação ao eixo y e que as forças nas extremidades equilibram o seu peso.

35. Uma ponte de peso W por unidade de comprimento está pendurada por cabos de peso desprezível, como é mostrado na Fig. 5.31. Deseja-se determinar a forma dos cabos de apoio de forma que os cabos verticais, igualmente espaçados, suportem pesos iguais. Suponha que os cabos verticais estejam distribuídos suficientemente próximos para que se possa considerar que o peso w , por unidade de comprimento, esteja distribuído continuamente ao longo do cabo de apoio. O problema difere do problema tratado no texto, onde o fio tinha um peso w por unidade de comprimento s ao longo do fio, porque aqui existe um peso w , por unidade de comprimento, na distância horizontal x . Escreva uma equação diferencial para a forma $y(x)$ do cabo de apoio; obtenha $y(x)$, considerando que as extremidades estejam nos pontos $y = 0$, $x = \pm 1/2D$, e que a tração máxima no cabo seja τ_0 .

36. Um cabo de comprimento l e peso w , por unidade de comprimento, é suspenso dos pontos $x = \pm a$ sobre o eixo x . O eixo y é vertical. Um peso W é pendurado no ponto intermediário do cabo. Escreva as equações que permitam determinar β , α e C .

37. Uma viga uniforme de área da seção transversal $(l \times t)$ com extremidades cortadas em ângulos retos é feita de material tal que $Y = n$. A viga está apoiada num canal quadrado e horizontal mantendo uma distância livre L para fora do canal. Para que valor de L a deflexão na extremidade da viga e devido igualmente a cisalhamento e encurvamento? Para este valor de L , que ângulo faz a face da extremidade com o plano vertical? Que ângulo a superfície superior da viga na extremidade faz com a horizontal? Suponha $W \ll Yl^2$.

38. Uma gangorra é feita com uma prancha de madeira retangular, cuja área de seção transversal mede $5 \times 30 \text{ cm}^2$, o comprimento é 3 m e pesa 27 kg. O módulo de Young é $10,3425 \times 10^9 \text{ N/m}^2$. A prancha é equilibrada por intermédio de um apoio estreito em seu centro. Duas crianças pesando 45 kg cada sentam-se a 30 cm das extremidades. Determine a forma da prancha quando se acha equilibrada em posição horizontal estacionária. Despreze o cisalhamento.

39. Um tubo oco de raio interno a e externo b é construído de material cujo módulo de Young é Y , módulo de cisalhamento n e densidade ρ . Uma extensão de comprimento L é fixada em ambas as extremidades. Determine a deflexão no centro do tubo. Determine o acréscimo na deflexão quando se enche o tubo com o fluido de densidade ρ_0 .

40. Os flanges superior e inferior de uma viga em I têm largura a e são conectados por uma junta de comprimento b . A junta e os flanges têm a mesma espessura c , considerada desprezível em relação a a e b e são feitas de material cujo módulo de Young é Y e módulo de cisalhamento n . A viga tem peso W , comprimento L e repousa sobre apoios em ambas as extremidades. Uma carga W' está apoiada no ponto médio da viga. Determine a deflexão da viga em seu ponto médio. Separe a deflexão devido ao cisalhamento e ao encurvamento, em termos devidos ao peso W e à carga W' .

41. Uma vez foi sugerida a construção de uma plataforma espacial permanente, soltando-se um balão piramidal de 100 km de altura e em repouso na superfície da Terra, cheio de gás cuja pressão fosse pouco maior que a atmosférica. A pressão de $7,0 \times 10^3 \text{ N m}^{-2}$ no topo seria adequada para sustentar cargas razoavelmente pesadas. A parte de outras objeções, mostre que esta idéia não é prática calculando-se a pressão do balão no nível do mar, supondo que este esteja cheio de ar a 0° C e que a pressão a 100 km é $7,0 \times 10^3 \text{ N m}^{-2}$.

42. Se o módulo volumétrico da água for B e a pressão atmosférica na superfície do oceano p_0 , determine a pressão como função da profundidade do oceano, levando em conta a compressibilidade da água. Suponha que B seja constante. Use um valor tabulado de B para a água do mar e estime o erro que seria cometido na profundidade de 8 km se a compressibilidade fosse desprezada.

43. Determine a pressão atmosférica como função da altitude, supondo que a temperatura decresce com a altitude e que o decréscimo é proporcional a ela.

44. Existe uma ligeira falha no argumento usado no início da Sec. 5.11 devido ao fato de se desprezarem as possíveis forças dos corpos na Eq. (5.166). Mostre que, mesmo quando as forças dos corpos estão presentes, a tensão, em qualquer ponto de um fluido em equilíbrio, é a mesma em todas as direções. [Sugestão. Considere que o tamanho do prisma encolhe até se tornar igual a zero, mostrando que, neste limite, a força do corpo é desprezível comparada à tensão através da superfície.]

CAPÍTULO 6 GRAVITAÇÃO

6.1 CENTROS DE GRAVIDADE DE CORPOS DE GRANDES DIMENSÕES

O leitor deve estar lembrado da Lei da Gravitação, formulada na Sec. 1.5. Duas partículas quaisquer de massas m_1 e m_2 , separadas por uma distância r , atraem uma à outra com uma força cujo módulo é dado pela Eq. (1.11):

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \quad (6.1)$$

onde

$$G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ dina-cm}^2 \text{-g}^{-2}, \quad (6.2)$$

conforme foi determinado pela medida da força existente entre grandes esferas de chumbo, realizada com balanços de torção extremamente sensíveis. Pode-se escrever a Eq. (6.1) em forma vetorial, para determinação da direção e do módulo das forças atrativas. Logo, a força gravitacional exercida sobre m_2 devido a m_1 é

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{Gm_1m_2}{|r_1 - r_2|^3}(r_1 - r_2). \quad (6.3)$$

O vetor $(r_1 - r_2)$ dá à força a direção correta, e o seu módulo é dividido por um fator extra $|r_1 - r_2|$ que aparece no denominador.

A Lei da Gravitação conforme foi formulada na Eq. (6.3) aplica-se somente às partículas ou a corpos de dimensões desprezíveis, quando comparadas à distância entre eles; caso contrário, a distância $|r_1 - r_2|$ não é precisamente definida, nem ficam muito claros os pontos e a direção em que a força age. No caso de corpos de grandes dimensões, deve-se imaginar cada corpo dividido em pedaços, ou elementos, pequenos em comparação com as distâncias existentes entre eles e calcular as forças que agem em cada um dos elementos do corpo devido a cada elemento dos outros corpos.

Considere, agora, um corpo de grandes dimensões e massa M e uma partícula de massa m em um ponto P (Fig. 6.1). Se o corpo de massa M for dividido em pedaços pequenos de massas m_i , cada pedaço será atraído para m por uma força que se chamará F_i . O sistema de forças F_i pode ser reduzido, de acordo com o Teorema 1 da Sec. 5.6 (5.107), a uma força aplicada num ponto arbitrário, mais um conjugado. Considere que esta força seja F :

$$F = \sum_i F_i, \quad (6.4)$$