UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FISICA
GLEB WATAGHIN

DRCC - IFGW

SIMETRIAS DE GAUGE

O LAGRANGIANO E AS EQUAÇÕES DE PARTÍCULA ÚNICA,

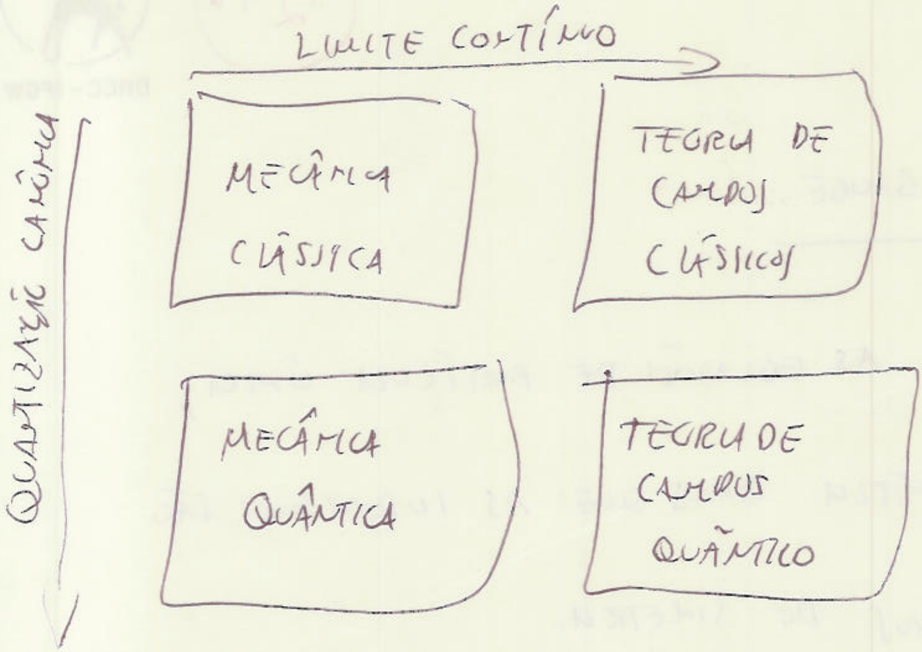
EM VÁRIAS ÁREAS DA FÍSICA TEMOS QUE AS INTERAÇÕES SÃO REGIDAS POR PRINCÍPIOS DE SIMETRIA.

ATUALMENTE SE ACREDITA QUE TODAS AS INTERAÇÕES SÃO DETERMINADAS PELAS SIMETRIAS DE GAUGE.

ATÉ ESTE MOMENTO TEMOS TRATADO DAS INTERAÇÕES DO PONTO DE VISTA DE INTERAÇÃO DE UMA PARTÍCULA ÚNICA. PARA DESCRIÇÃO DAS PARTÍCULAS ELEMENTARES PRECISAMOS RECORRER NOÇÃO DE INTERAÇÃO DE SISTEMAS DE MUITAS PARTÍCULAS.

...tamento de Raios Cósmicos e Cronologia
...tuto de Física Gleb Wataghin-UNICAMP
...Postal 6165 13.083-970 Campinas SP Brasil
Tel.:(0192
Telex:(01
Fax:(019

TEMOS JÁ



A ~~TEORIA LAGRANGEANA DE CAMPOS~~ MECÂNICA CLÁSSICA PODE SER INTRODUZIDA ~~POR~~

PELAS EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

E PELA FUNÇÃO LAGRANGEANA

$$L(q^1,\dots q^N,\dot{q}^1,\dots \dot{q}^N) \qquad L=\frac{m\dot{q}^2}{2}-V(q)$$

A AÇÃO É $\quad S=\int_{t_1}^{t_2} dt\, L$

COM AS CONDIÇÕES $\quad \delta q^a(t_1)=\delta q^a(t_0)=0$

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FISICA
GLEB WATAGHIN

281

DRCC - IFGW

P+4 CONDIÇÃO DE MÍNIMA AÇÃO

$$\delta S = 0$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta \dot{q}^a \right)$$

INTEGRANDO POR PARTES

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a + \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta q^a \right) - \delta q^a \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \right] \right) dt$$

mas $\delta q^a \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$

ENTÃO TEMOS

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_a \left[\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \right] \delta q^a dt$$

E VISTO QUE δq^a É ARBITRÁRIO ENTÃO

EM GERAL DEFINIMOS

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) = 0 \qquad p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$$

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia
Instituto de Física Gleb Wataghin - UNICAMP
Caixa Postal 6165 13.083-970 Campinas SP Brasil
Tel.: (0192) 39-8112
Telex: (019) 1150
Fax: (0192) 39-3127

ENTÃO

$$\boxed{\dot{p}_a = \frac{\partial L}{\partial q_a}}$$

ESTES SÃO A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE.

PODEMOS TRADUZIR NUMA FORMULAÇÃO HAMILTONIANA

$$H(p_1, \ldots p_N, q_1 \ldots, q_N) = \sum_a p_a \dot{q}^a - L$$

AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO SÃO

SE CANCELAM POR EL.

$$dH = \sum_a \Big(dp_a \dot{q}_a + \dot{p}_a d\dot{q}_a - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^a}}_{\dot{p}_a} dq^a - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} d\dot{q}^a \Big)$$

$$dH = \sum_a \left[dp_a \dot{q}_a - \dot{p}_a dq^a \right] = \frac{\partial H}{\partial p_a} dp_a + \frac{\partial H}{\partial q_a} dq^a$$

$$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \qquad -\dot{p}_a = \frac{\partial H}{\partial q^a}$$

EQUAÇÕES DE HAMILTON.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FISICA
GLEB WATAGHIN

DRCC-IFGW

SIMETRIAS DE GAUGE

O LAGRANGIANO E AS EQUAÇÕES DE PARTÍCULA ÚNICA,

EM VÁRIAS AREAS DA FÍSICA TEMOS QUE AS INTERAÇÕES SÃO REGIDAS POR PRINCÍPIOS DE SIMETRIA.

ATUALMENTE SE ACREDITA QUE TODAS AS INTERAÇÕES SÃO DETERMINADAS PELAS SIMETRIAS DE GAUGE.

ATÉ ESTE MOMENTO TEMOS TRATADO DAS INTERAÇÕES DO PONTO DE VISTA DE INTERAÇÃO DE UMA PARTÍCULA ÚNICA. PARA DESCRIÇÃO DAS PARTÍCULAS ELEMENTARES PRECISAMOS RECORRER NOÇÃO DE INTERAÇÃO DE SISTEMAS DE MUITAS PARTÍCULAS.

...tamento de Raios Cósmicos e Cronologia
...tuto de Física Gleb Wataghin-UNICAMP
... Postal 6165 13.083-970 Campinas SP Brasil

Tel.: (0192
Telex: (01
Fax: (019

TEMOS JÁ

$$\begin{tikzcd} \text{MECÂNICA CLÁSSICA} \arrow[r, "\text{LIMITE CONTÍNUO}"] \arrow[d, "\text{QUANTIZAÇÃO CANÔNICA}"'] & \text{TEORIA DE CAMPOS CLÁSSICOS} \\ \text{MECÂNICA QUÂNTICA} & \text{TEORIA DE CAMPOS QUÂNTICO} \end{tikzcd}$$

A ~~TEORIA LAGRANGEANA DE CAMPOS~~ MECÂNICA CLÁSSICA PODE SER INTRODUZIDA ~~POR~~ PELAS EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

E PELA FUNÇÃO LAGRANGEANA

$$L(q^1, \dots q^N, \dot{q}^1 \dots \dot{q}^N) \qquad L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q)$$

A AÇÃO É $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L$

COM AS CONDIÇÕES $\delta q^a(t_1) = \delta q^a(t_0) = 0$

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FISICA
GLEB WATAGHIN

281

DRCC - IFGW

Pt4 CONDIÇÃO DE MÍNIMA AÇÃO

$$\delta S = 0$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial q^a}\,\delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot q^a}\,\delta \dot q^a \right)$$

INTEGRANDO POR PARTES

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial q^a}\,\delta q^a + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^a}\,\delta q^a \right) - \delta q^a \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^a} \right) \right] \right) dt$$

mas $\delta q^a \big|_{t_1}^{t_2} = 0$

ENTÃO TEMOS

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_a \left[\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^a} \right) \right] \delta q^a \, dt$$

E VISTO QUE δq^a É ARBITRÁRIO ENTÃO

EM GERAL DEFINIMOS

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^a} \right) = 0 \qquad p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot q^a}$$

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia
Instituto de Física Gleb Wataghin - UNICAMP
Caixa Postal 6165 13.083-970 Campinas SP Brasil

Tel.: (0192) 39-8112
Telex: (019) 1150
Fax: (0192) 39-3127

ENTÃO

$$\boxed{p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot q_a}}$$

ESTAS SÃO A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE.

PODEMOS TRADUZIR NUMA FORMULAÇÃO HAMILTONIANA

$$H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = \sum_a p_a \dot q^a - L$$

AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO SÃO

SE CANCELAM POR EL.

$$dH = \sum_a \left(dp_a \dot q_a + p_a d\dot q_a - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^a}}_{\dot p_a} dq^a - \frac{\partial L}{\partial \dot q^a} d\dot q^a \right)$$

$$dH = \sum_a \left[dp_a \dot q_a - \dot p_a dq^a \right] = \frac{\partial H}{\partial p_a} dp_a + \frac{\partial H}{\partial q_a} dq^a$$

$$\dot q_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}$$

$$-\dot p_a = \frac{\partial H}{\partial q^a}$$

EQUAÇÕES DE HAMILTON.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FISICA
GLEB WATAGHIN

283

DRCC-IFGW

MECÂNICA QUÂNTICA DE PARTÍCULAS

$p_a, q_a \rightarrow \hat{p}_a, \hat{q}_a$ ~~$[q^a(t), q^b(t)] = i\delta$~~

$[q^a(\vec{x},t), q^b(\vec{y},t)] = 0 = [p^a(x,t), p(y,t)] = 0$

$[p^a_{(x,t)}, q^b(y,t)] = -i\delta^{ab}$

TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

$\phi^a(\vec{x},t) \rightarrow q^a(t)$

$t \rightarrow t$

$a \rightarrow a, \vec{x}$

O LAGRANGIANO É ESCRITO COMO UMA FUNÇÃO

$$\boxed{L(t) = \int d^3x\, \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x), t)}$$

COM A AÇÃO $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(t) = \int d^4x\, \mathcal{L}$

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia
Instituto de Física Gleb Wataghin - UNICAMP
Caixa Postal 6165 13.083-970 Campinas SP Brasil

Tel.: (0192) 39-8112
Telex: (019) 1150
Fax: (0192) 39-3127

PODEMOS OBTER AS EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a}\right)} \qquad \left(\Pi_{\mu a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi_a}\right)$$

TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

COMO ENCONTRAMOS O LAGRANGIANO?

$$\{[\phi_a(x,t), \Pi_b(y,t)]\} = \delta(x-y)\,\delta_{ab}$$

PARA UM CAMPO REAL $\phi = \phi(x)$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi) - \frac{m^2\phi^2}{2}$$

PARA UM CAMPO COMPLEXO,

$$\boxed{\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2|\phi|^2}$$

PARA O CAMPO DE DIRAC

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial^\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \qquad \text{DIRAC} \quad -m\bar{\psi} = \partial_\mu\left(i\bar{\psi}\gamma^\mu\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -m\bar{\psi} \qquad i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FISICA
GLEB WATAGHIN

279

DRCC - IFGW

SIMETRIAS DE GAUGE

O LAGRANGIANO E AS EQUAÇÕES DE PARTÍCULA ÚNICA,

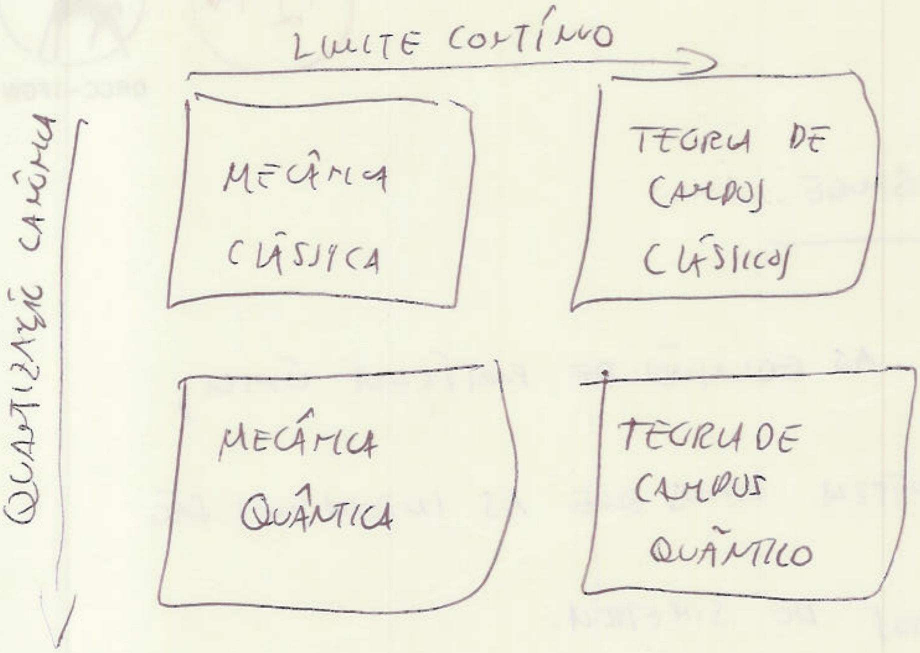
EM VÁRIAS AREAS DA FÍSICA TEMOS QUE AS INTERAÇÕES SÃO REGIDAS POR PRINCÍPIOS DE SIMETRIA.

ATUALMENTE SE ACREDITA QUE TODAS AS INTERAÇÕES SÃO DETERMINADAS PELAS SIMETRIAS DE GAUGE.

ATÉ ESTE MOMENTO TEMOS TRATADO DAS INTERAÇÕES DO PONTO DE VISTA DE INTERAÇÃO DE UMA PARTÍCULA ÚNICA. PARA DESCRIÇÃO DAS PARTÍCULAS ELEMENTARES PRECISAMOS RECORRER NOÇÃO DE INTERAÇÃO DE SISTEMAS DE MUITAS PARTÍCULAS.

...tamento de Raios Cósmicos e Cronologia
...tuto de Física Gleb Wataghin - UNICAMP
...Postal 6165 13.083-970 Campinas SP Brasil
Tel.: (0192
Telex: (01
Fax: (019

TEMOS JÁ



A ~~TEORIA LAGRANGIANA DE CAMPOS~~ MECÂNICA CLÁSSICA PODE SER INTRODUZIDA ~~POR~~

PELAS EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

E PELA FUNÇÃO LAGRANGIANA

$$L(q^1,\dots q^N, \dot{q}^1 \dots \dot{q}^N) \qquad L=\frac{m\dot{q}^2}{2}-V(q)$$

A AÇÃO É $\quad S=\int_{t_1}^{t_2} dt\, L$

COM AS CONDIÇÕES $\quad \delta q^a(t_1)=\delta q^a(t_0)=0$

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FISICA
GLEB WATAGHIN

281

DRCC - IFGW

PARA CONDIÇÃO DE MÍNIMA AÇÃO

$$\delta S = 0$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta \dot{q}^a \right)$$

INTEGRANDO POR PARTES

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a + \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta q^a \right) - \delta q^a \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \right] \right) dt$$

mas $\delta q^a \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$

ENTÃO TEMOS

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_a \left[\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \right] \delta q^a \, dt$$

E VISTO QUE δq^a É ARBITRÁRIO ENTÃO

EM GERAL DEFINIMOS

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) = 0 \qquad p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$$

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia
Instituto de Física Gleb Wataghin - UNICAMP
Caixa Postal 6165 13.083-970 Campinas SP Brasil

Tel.: (0192) 39-8112
Telex: (019) 1150
Fax: (0192) 39-3127

ENTÃO

$$\boxed{p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}}$$

ESTAS SÃO A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE.

PODEMOS TRADUZIR NUMA FORMULAÇÃO HAMILTONIANA

$$H(p_1, \ldots p_N, q_1, \ldots, q_N) = \sum_a p_a \dot{q}^a - L$$

AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO SÃO

SE CANCELAM POR EL.

$$dH = \sum_a \left(dp_a \dot{q}_a + p_a d\dot{q}_a - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^a}}_{\dot{p}_a} dq^a - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} d\dot{q}^a \right)$$

$$dH = \sum_a \left[dp_a \dot{q}_a - \dot{p}_a dq^a \right] = \frac{\partial H}{\partial p_a} dp_a + \frac{\partial H}{\partial q_a} dq^a$$

$$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}$$

$$-\dot{p}_a = \frac{\partial H}{\partial q^a}$$

EQUAÇÕES DE HAMILTON.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FISICA
GLEB WATAGHIN

283

DRCC - IFGW

MECÂNICA QUÂNTICA DE PARTÍCULAS

$p_a, q_a \rightarrow \hat{p}_a, \hat{q}_a$ $\cancel{[q^a(t), q^b(t)] = i\delta}$

$[q^a(x,t), q^b(\vec{y},t)] = 0 = [p^a(x,t), p(y,t)] = 0$

$[p^a_{(x,t)}, q^b(y,t)] = -i\,\delta^{ab}$

TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

$\phi^a(\vec{x},t) \rightarrow q^a(t)$

$t \rightarrow t$

$a \rightarrow a, \vec{x}$

O LAGRANGIANO É ESCRITO COMO UMA FUNÇÃO

$$\boxed{L(t) = \int d^3x\, \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu\phi^a(x), t)}$$

COM A AÇÃO $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(t) = \int d^4x\, \mathcal{L}$

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia
Instituto de Física Gleb Wataghin - UNICAMP
Caixa Postal 6165 13.083-970 Campinas SP Brasil

Tel.: (0192) 39-8112
Telex: (019) 1150
Fax: (0192) 39-3127

PODEMOS OBTER AS EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \right)} \qquad \left(\Pi_\mu{}_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu_a \phi_a} \right)$$

TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

COMO ENCONTRAMOS O LAGRANGIANO?

$$\{ [\phi_a^{(x,t)}, \Pi_b^{(y,t)}] \} = \delta(x-y)\,\delta_{ab}$$

PARA UM CAMPO REAL $\phi = \phi(x)$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi) - \frac{m^2 \phi^2}{2}$$

PARA UM CAMPO COMPLEXO,

$$\boxed{\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 |\phi|^2}$$

PARA O CAMPO DE DIRAC

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \qquad -m\bar{\psi} = \partial_\mu (i \bar{\psi} \gamma^\mu)$$

EU. DIRAC

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -m \bar{\psi} \qquad i (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu + m \bar{\psi} = 0$$

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FISICA
GLEB WATAGHIN

285

DRCC-IFGW

SPIN 1 MASSA ZERO

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -j^\mu \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu A_\mu} = -F^{\nu\mu} = F^{\mu\nu}$$

$$\boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} - j^\nu = 0}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu - \frac{m^2 (A_\mu)^2}{2}$$

TEOREMA NOETHER

A CADA SIMETRIA CONTÍNUA EXISTE UMA QUANTIDADE CONSERVADA

NO LAGRANGIANO DE DIRAC,

SEJA UM EXEMPLO, A MUDANÇA DE FASE GLOBAL ~~NA REGRA~~ $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial^\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$

$$\psi(x) \to \psi'(x') = e^{i\varepsilon}\psi(x) \qquad \varepsilon = \text{cte}$$

ENTÃO $\partial_\mu \psi \to \partial_\mu' \psi'(x') = e^{i\varepsilon} \partial_\mu \psi(x)$

$$\bar{\psi}(x') \to \bar{\psi}'(x') = e^{-i\varepsilon} \bar{\psi}(x)$$

PORTANTO $\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}'(x') = i\bar{\psi}_\mu (\gamma_\mu \partial)_\mu \psi_\mu - m \bar{\psi}_\mu \psi_\mu$

É INVARIANTE.

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia
Instituto de Física Gleb Wataghin - UNICAMP
Caixa Postal 6165 13.083-970 Campinas SP Brasil
Tel.: (0192) 39-8112
Telex: (019) 1150
Fax: (0192) 39-3127

A SIMETRIA É INDEPENDENTE DO PARÂMETRO α,

PORTANTO TEMOS CLASSE DE TRANSFORMAÇÕES DE FASE

$$U(\alpha) = e^{i\alpha}$$

COM ISTO O PARÂMETRO α É UMA VARIÁVEL CONTÍNUA,

E O CONJUNTO DESTAS TRANSFORMAÇÕES FAZEM UMA

REPRESENTAÇÃO DE UM GRUPO ABELIANO,

GRUPO G É DEFINIDO PELAS SEGUINTES PROPRIEDADES

1) FECHAMENTO: SE a e $b \in G$, ENTÃO $a * b$ PERTENCE A G

2) ASSOCIATIVIDADE: SE $(a * b) c = (a)(b * c)$

3) IDENTIDADE: $a * e = e * a = a \quad \forall a$ EM G

4) INVERSA: PARA TODO $a \in G$ $\exists$ UM ELEMENTO

a^{-1} TAL QUE $a a^{-1} = a^{-1} a = e$.

PARA A TRANSFORMAÇÃO $U(\alpha)$

$$U(\alpha_1) U(\alpha_2) = U(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$(U(\alpha_1) U(\alpha_2)) U(\alpha_3) = (U_{\alpha_1 + \alpha_2}) U_{\alpha_3} = U_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = U_{\alpha_1} U_{\alpha_2 + \alpha_3} =$$

$$U(\alpha_1) U(\alpha = 0) = U(\alpha = 0) U(\alpha_1) = U(\alpha_1)$$