UNICAMP

1

P. 37 DO PLEITEZ

COMO PODEMOS ESCREVER AS SEÇÕES DE CHOQUE RELATIVÍSTICAS?

VAMOS DEFINIR n_a e n_b COMO DENSIDADE DO NÚMERO DE PARTÍCULAS, COM VELOCIDADES $\vec{V}_a$ e $\vec{V}_b$.
NO SISTEMA DE REPOUSO DA PARTÍCULA 2, A COLISÃO DE 1 COM UM ALVO ESTACIONÁRIO, E A SEÇÃO DE CHOQUE É DEFINIDA COMO UM FATOR COM DIMENSÃO DE ÁREA

$$dN = \sigma\, v_{rel}\, n_a n_b\, dV dt$$

E v_{rel} É A VELOCIDADE RELATIVA NO REFERENCIAL DA PARTÍCULA

2.
COMO dN CONTA O NÚMERO DE EVENTOS DEVE SER INVARIANTE. IREMOS ESCREVER A EXPRESSÃO GERAL COMO

$$dN = A\, n_a n_b\, dV dt$$

COM A A SER DETERMINADO NO REFERENCIAL DE REPOUSO DA PARTÍCULA 2, $A = \sigma v_{rel}$.

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil
Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

SEJA A UM INVARIANTE RELATIVÍSTICO, A QUANTIDADE

$dVdt$ É UM INVARIANTE

$$dVdt = (dV')\gamma^{-1}\,\gamma\,dt' = dV'dt'$$ ENTÃO O

PRODUTO $A\,m_a\,m_b$ DEVE SER INVARIANTE.

COMO SE TRANSFORMA m_a e m_b?

O NÚMERO DE PARTÍCULAS NUM ELEMENTO dV É

$n\,dV = n'\,dV'$ COMO $dV = \gamma^{-1}dV'$

$$n\,dV = n'dV' = n\,\gamma^{-1}dV' = n'dV' \qquad \boxed{n' = n\gamma^{-1}}$$

$$n = \gamma n'$$

ENTÃO n SE TRANSFORMA DA MESMA FORMA QUE ENERGIA,

$$n = n'(E/m) \qquad \frac{A\,E_a E_b}{p_a \cdot p_b} \overset{\text{INVAR}}{=} \frac{A\,E_a m_b}{E_a E_b}\Big|_{m_b} = A = \sigma v_{rel}$$

$E_b = m_b \quad \vec{p}_b = 0 \quad A = \sigma v_{rel}$

NO REFERENCIAL DE REPOUSO

ENTÃO

$$\boxed{A = \sigma v_{rel}\,\frac{p_a\,p_b}{E_a E_b}}$$

UNICAMP

ENTÃO

$$dN = \sigma N_{vol} \frac{\phi_a \cdot \phi_b\, n_a n_b}{t_a \tau_b} dV\, dt$$

PORTANTO

$$\boxed{\sigma = \left(\frac{dN}{dN_{at}}\right)\left(\frac{1}{V_{vol}} \underbrace{\frac{t_a \tau_b}{\phi_a \phi_b\, n_a n_b}}_{\text{FLUXO INICIAL}}\right)}$$

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

CAPÍTULO 3: HALZEN

(4)

IREMOS ESTUDAR COMO INTRODUZIR INTERAÇÕES.

EM MECÂNICA QUÂNTICA NÃO RELATIVÍSTICA TEMOS QUE PODEMOS DE FORMA HEURÍSTICA INTRODUZIR A QUANTIZAÇÃO

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

E TEREMOS $E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ $\vec{p} \Rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$.

SEJA $\psi(\vec{x}, t)$ UMA FUNÇÃO DE ONDA, ENTÃO

$$E\psi = \frac{p^2}{2m}\psi \longrightarrow \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{(-i\hbar\vec{\nabla})^2}{2m}\psi}$$ → EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER.

IREMOS USAR $\rho = |\psi|^2$ COMO A PROBABILIDADE DE ENCONTRAR A PARTÍCULA NO VOLUME d^3x. COMO EM GERAL PRECISAMOS USAR O FLUXO DE FEIXE DE PARTÍCULAS, $\vec{J}$. COMO A PROBABILIDADE É CONSERVADA A TAXA DE DECRÉSCIMO DO NÚMERO DE PARTÍCULAS NO VOLUME DADO É IGUAL AO FLUXO SAINDO DO VOLUME

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV = \int_S \vec{J}\cdot\hat{n}\, dS = \int(\vec{\nabla}\cdot\vec{J})\, dV$$

UNICAMP

5

PARA UM VOLUME FIXO TEMOS,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$

COMO PODEMOS DETERMINAR $\vec{j}$? $\rho = |\psi|^2 = \psi\psi^*$

$$i\frac{\partial \rho}{\partial t} = i\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi + i\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

USAR EQ. SCHRODINGER

E O COMPLEXO CONJUGADO

$$\boxed{i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi}$$

$$-i\frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla^2\psi^* = 0$$

$$\boxed{i\frac{\partial}{\partial t}\psi^* - \frac{1}{2m}\nabla^2\psi^* = 0}$$

ENTÃO,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{1}{2m}\nabla^2\psi^*\psi + \psi^*\left(\frac{1}{2m}\right)\nabla^2\psi$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{i}{2m}\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right]$$

PARA OBTER $\vec{j}$ DEVEMOS DETERMINAR,

$$\frac{-i}{2m}\left\{\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right\} = \vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

PARA ACHAR $\vec{j}$, USAREMOS UMA TENTATIVA DE

$$\vec{j} = A(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \quad \text{ENTÃO}$$

$$\cancel{\psi^*\nabla^2\psi = \nabla(\psi^*\vec{\nabla}\psi) = (\nabla\psi^*)\cdot\nabla\psi}$$

$$\nabla(\psi^*\nabla\psi) = \nabla\psi^*\cdot\nabla\psi + \psi^*\nabla^2\psi \quad \text{PORTANTO}$$

$$\boxed{\psi^*\nabla^2\psi = \nabla(\psi^*\nabla\psi) - \nabla\psi^*\cdot\nabla\psi}$$

E O COMPLEXO CONJUGADO

$$\psi\nabla^2\psi^* = \nabla(\psi\nabla\psi^*) - \nabla\psi\cdot\nabla\psi^*$$

PORTANTO

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \frac{-i}{2m}\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right] = \frac{-i}{2m}\left\{\nabla(\psi^*\nabla\psi) - \cancel{\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi} - \nabla(\psi\nabla\psi^*) + \cancel{\nabla\psi\cdot\nabla\psi^*}\right\}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \frac{-i}{2m}\left[\nabla(\psi^*\nabla\psi) - \nabla(\psi\nabla\psi^*)\right]$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \nabla\left(\frac{-i}{2m}\left[\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right]\right)$$

PORTANTO

$$\boxed{\vec{j} = \frac{-i}{2m}\left[\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right]}$$

A DENSIDADE DO FLUXO DE PROBABILIDADE

UNICAMP

7

UMA POSSÍVEL SOLUÇÃO DA EQ. SCHRÖDINGER

$$\psi = N e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - iEt} \rightarrow$$ PARTÍCULA LIVRE DE ENERGIA E E MOMENTO $\vec{p}$

$$\psi^* = N^* e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x} + iEt}$$

NESTE CASO

$$\vec{j} = \frac{-i}{2m}\left\{ \psi^* i\vec{p}\,\psi - \psi(-i\vec{p})\psi^* \right\}$$

$$\rho = |N|^2$$

$$\boxed{\vec{j} = \frac{\vec{p}}{2m} 2|\psi|^2 = \frac{\vec{p}\,|N|^2}{m}}$$

INTRODUZINDO RELATIVIDADE,

$$p^0 = E/c \quad p^1 = p_x \quad p^2 = p_y \quad p^3 = p_z$$

$$p = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = (p^0, p^1, p^2, p^3)$$

A NORMA DESTE 4-VETOR

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2 = cte > 0$$

4-VETOR DO TIPO TEMPO

PODEMOS FORMAR OS SEGUINTES PRODUTOS ESCALARES

$$p^\mu x_\mu = \cancel{} \quad p^0 x_0 + p^i x_i = \frac{E}{c} ct + p^i x_i$$

$$(\vec{p})_i (-\vec{x})_i$$

$$\boxed{p^\mu x_\mu = Et - \vec{p}\cdot\vec{x}}$$

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

UM OUTRO EXEMPLO É

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \qquad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$

~~APODEMOS~~ AGORA PODEMOS

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$$

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) \to i\partial^\mu$$

O ESCALAR ASSOCIADO É $\Box^2 = \partial_\mu \partial^\mu$.

AGORA PODEMOS CONSTRUIR UMA VERSÃO RELATIVÍSTICA DA EQ. SCHRÖDINGER,

$E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ → USAMOS O PRINCÍPIO DE CORRESPONDÊNCIA.

$$\frac{E^2}{c^2}\psi = (\vec{p}^2 + m^2c^2)\psi \qquad \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi = \left((-i\hbar\nabla)^2 + m^2\right)\psi$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = -\hbar^2\nabla^2\psi + m^2c^2\psi}$$

→ EQUAÇÃO KLEIN-GORDON

OU $\boxed{-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \nabla^2\phi = m^2\phi}$

9

ENTÃO

$$i\left[\phi^* \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \phi\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2}\right] = i\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right]$$

ESTA NA FORMA DE UMA DENSIDADE DE PROBABILIDADE

DERIVADA TEMPORAL

$$\boxed{\rho = i\left\{\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right\}} \quad \rho^* = -i\left(\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t} - \phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \rho$$

E OBTEMOS $\boxed{\vec{j} = -i(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*)}$

ASSUMINDO UMA SOLUÇÃO $\phi = Ne^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - iEt}$

$$\rho = i\left\{\phi^*(-iE)\phi - \phi(iE)\phi^*\right\} = 2E|N|^2 = 2E|\phi|^2$$

$$E\ \vec{j} = -i\left(\phi^*(i\vec{p})\phi - \phi(-i\vec{p})\phi^*\right] = 2\vec{p}\,|\phi|^2 \Rightarrow \vec{p}\,|N|^2$$

$$\begin{cases} \rho = 2E|N|^2 \\ \vec{j} \Rightarrow \vec{p}\,|N|^2 \end{cases}$$

SCHRÖDINGER

$$\rho = |N|^2$$

$$\vec{j} = \frac{\vec{p}}{m}|N|^2$$

NA EQ. DE KG, A PROBABILIDADE DEPENDE DA ENERGIA.

UNICAMP

QUEREMOS ACHAR A CORRENTE DE PROBABILIDADE DA EQ. KLEIN-GORDON, PODEMOS FAZER ASSIM

$$\left(-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\nabla^2\phi=m^2\phi\right)\times(-i\phi^*)$$

SOMANDO

$$\left(-\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2}+\nabla^2\phi^*=m^2\phi^*\right)\times(-i\phi)$$

$$+\left(i\phi^*\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-i\phi\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2}\right)-i\left(\phi^*\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\phi^*\right)=\underbrace{m^2(-i)\{|\phi|^2-|\phi|^2\}}_{=0}$$

USANDO O MESMO TRUQUE

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\phi^*\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)=\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi^*}{\partial t}+\phi\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2}$$

ENTÃO

$$i\left[\phi^*\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\phi\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2}\right]=i\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)-\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)+\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]$$

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

UNICAMP

(1)

P. 37 DO PLEITEZ

COMO PODEMOS ESCREVER AS SEÇÕES DE CHOQUE RELATIVÍSTICAS?

VAMOS DEFINIR n_a e n_b COMO DENSIDADE DO NÚMERO DE PARTÍCULAS, COM VELOCIDADES $\vec{V}_a$ e $\vec{V}_b$.

NO SISTEMA DE REPOUSO DA PARTÍCULA 2, A COLISÃO DE 1 COM UM ALVO ESTACIONÁRIO, E A SEÇÃO DE CHOQUE É DEFINIDA COMO ~~UM~~ FATOR COM DIMENSÃO DE ÁREA

$$dN = \sigma \; v_{rel} \; n_a n_b \; dV dt$$

E v_{rel} É A VELOCIDADE RELATIVA NO REFERENCIAL DA PARTÍCULA

2.

COMO dN COMO O NÚMERO DE EVENTOS DEVE SER COMO INVARIANTE. IREMOS ESCREVER A EXPRESSÃO GERAL COMO

$$dN = A \; n_a n_b \; dV dt$$

COM A A SER DETERMINADO NO REFERENCIAL DE REPOUSO DA PARTÍCULA 2, $A = \sigma v_{rel}$.

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

SEJA A UM INVARIANTE RELATIVÍSTICO, ~~ENT~~ A QUANTIDADE

$dVdt$ É UM INVARIANTE

$dVdt = (dV')\gamma^{-1}\gamma dt' = dV'dt'$ ENTÃO O

PRODUTO $A n_a n_b$ DEVE SER INVARIANTE.

COMO SE TRANSFORMA n_a e n_b?

O NÚMERO DE PARTÍCULAS NUM ELEMENTO dV É

$n dV = n' dV'$ COMO $dV = \gamma^{-1} dV'$

$$\boxed{n = n'\gamma^{-1}}$$

$$n\,dV = n' dV' = n\gamma^{-1} dV' = n' dV'$$

$$\boxed{n' = n\gamma^{-1}}$$

$n = \gamma n'$

ENTÃO n SE TRANSFORMA DA MESMA FORMA QUE ENERGIA,

$n = n'(E/m)$

$$\frac{A E_a E_b}{p_a \cdot p_b} = \frac{A E_a n_b}{E_a E_b|_{n_b}} = A = \sigma v_{rel}$$

NO REFERENCIAL DE REPOUSO $E_b = m_b$ $\vec{p}_B = 0$ $A = \sigma v_{rel}$

ENTÃO

$$\boxed{A = \sigma v_{rel} \frac{p_a \cdot p_b}{E_a E_b}}$$