

$$s = (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2$$

$$u = (p_A - p_B)^2 = (p_C - p_D)^2$$

$$t = (p_A - p_D)^2 = (p_C - p_B)^2$$

VALORES REESCRITOS ESTAS
 AMPLITUDES EM FUNÇÃO DE s, t e u .

numeroso $(p_A + p_C) \cdot (-p_B - p_D) = -p_A \cdot p_B - p_A \cdot p_D - p_C \cdot p_B - p_C \cdot p_D$

$$s = (p_A + p_D)^2 = p_A^2 + p_D^2 + 2p_A p_D$$

$$s - u = p_B^2 + p_D^2 + 2p_A(p_B + p_D)$$

$$u = (p_A - p_D)^2 = p_A^2 + p_D^2 - 2p_A p_D$$

$$s - u = (p_B - p_D)(p_D + p_D) + 2p_A(p_B + p_D)$$

$$s - u = (p_B + p_D) \{ p_B - p_D + 2p_A \}$$

$$p_B - p_D = p_C - p_A$$

$$s - u = (p_B + p_D) \{ p_C - p_A + 2p_A \}$$

$$s - u = (p_D + p_D) (p_C + p_A)$$

O OUTRO DEFORMANDO

$$(p_A - p_D) (p_D + p_C)$$

$$u - t = (p_A - p_D)^2 - (p_A - p_C)^2 = -2p_A \cdot p_D + p_D^2 + 2p_A \cdot p_C - p_C^2$$

$$u - t = 2p_A(p_C - p_D) + p_D^2 - p_C^2 = 2p_A(p_C - p_D) + (p_D - p_C)(p_D + p_C)$$

$$u - t = (p_C - p_D) \{ 2p_A - p_D - p_C \} = (p_C - p_D) (2p_A - p_A - p_B)$$

$$u-t = (p_c - b_D) (p_A - b_B) \quad s-u = (p_D + b_B) \cdot (p_c + b_A)$$

ENTÃO O DENOMINADOR

TAMBÉM PORÉMOS

$$(p_D - b_B)^2 = t$$

$$u-t + s-u = s-t = (p_c - b_D) (p_A - b_B)$$

$$(p_c + b_D)^2 = s$$

$$+ (p_D - b_B) (p_c + b_A) = p_c b_A - p_c b_B - p_D b_A$$

JUNTAMO TUDO

$$+ p_D b_B + p_D p_c + b_D b_A + p_D b_C + p_B b_A = p_A (p_B + b_C) + p_D (b_B + b_C) = (p_A + b_D) (p_D + b_C)$$

$$i\mathcal{L} = -i \int_{e^t \rightarrow e^s} \left[\frac{+e^z (s-u)}{t} \frac{+e^z (t-u)}{s} \right]$$

COMPLETAMENTE ESCOLTA EM TERMOS DAS VARIÁVEIS DE

MADEIRAM. ESTA EQUAÇÃO TEM A INDEPENDÊNCIA DE

TROCAR $s \leftrightarrow t$.

A EXPRESSÃO DE AMPLITUDE DE $e^s \rightarrow e^t$ TAMBÉM PODE

SER TRANSFORMADA, USANDO $s-u$ E $u-t$ ACUM DESMONTANDO

$$-i\mathcal{L}_{e^s \rightarrow e^t} = -i \int \left[\frac{-e^z (s-u)}{t} \frac{-e^z (s-t)}{u} \right]$$

$$i\mathcal{L}_{e^s \rightarrow e^t} = e^z \left\{ \frac{(u-s)}{t} + \frac{(t-s)}{u} \right\}$$

PODERAMOS TAMBÉM
OBTIÑO FAZENDO
CROSSING.

~~COMPARANDO AS EXPRESSÕES~~

NO ESPARMIAMENTO

ESTA EXPRESSÃO É DIFERENTE SE T OU U SÃO MÚLTIPLOS

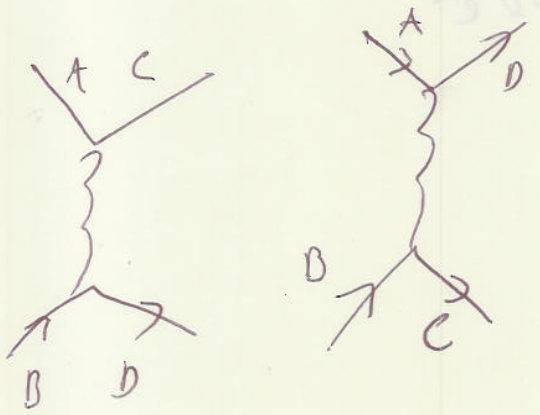
$$M_{e^-e^- \rightarrow e^-e^-} = e^2 \left(\frac{u-s}{t} + \frac{t-s}{u} \right)$$

CONFORME MOSTRAMOS ANTES,

TOMAS QUE NO PER. CM,

$$-t = (\vec{p}_A - \vec{p}_C)^2$$

$$-u = (\vec{p}_A - \vec{p}_D)^2$$



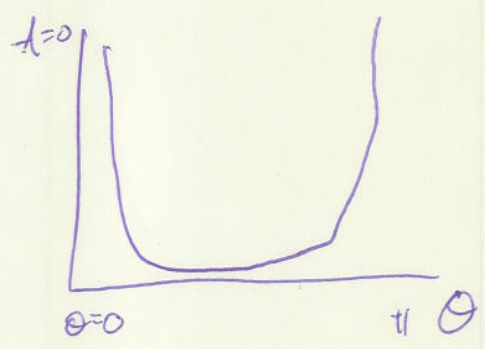
ENTÃO QUANDO $t \rightarrow 0$ O MOMENTO DO FOTON É ZERO.

SE O MOMENTO TRANSMISSO q^2 É PEQUENO $q^2 \approx 0$

ENTÃO O FÓTON É COMO QUASE NA AUSÊNCIA DE MASSA.

$$\left. \begin{aligned} t &= (\vec{p}_A - \vec{p}_C)^2 = -2p^2(1 - \cos\theta) \\ u &= -2p^2(1 + \cos\theta) \end{aligned} \right\}$$

ISTO PODE SER REPRESENTADO VIA



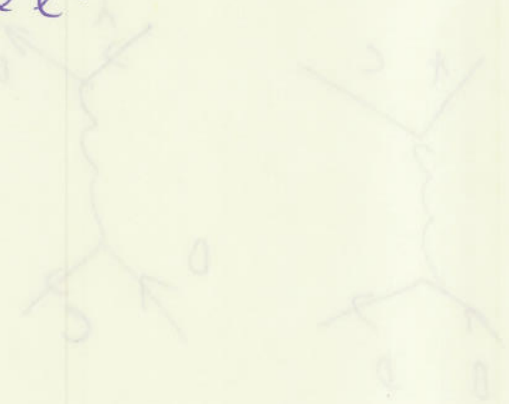


52

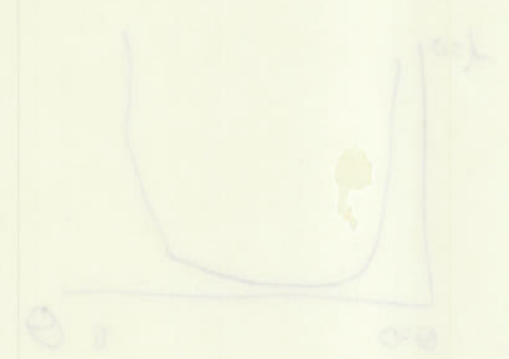


RESUMO

- ~~Resumo~~ discussão A EXPLICAÇÃO EM SÉRIE DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO $i \rightarrow f$.
- APRESENTAÇÃO COMO INTRODUÇÃO A INTERAÇÃO ELETRÔNICA
- MÉTODOS PARA PRÁTICAS SEM SPA
- CÁLCULO OS PROCESSOS DE ESPALHAMENTO
- ESPALHAMENTO MOLLEN : $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$
- ESPALHAMENTO BORN $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$



$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{1}{(1-\cos\theta)} - \frac{1}{(1+\cos\theta)} \right] \\
 & \left[\frac{1}{(1-\cos\theta)} + \frac{1}{(1+\cos\theta)} \right]
 \end{aligned}$$





UNICAMP

CAPÍTULO 5 DO (KRZEW)

EQUAÇÃO DE DIRAC!

NO CAPÍTULO ANTERIOR MOSTRAMOS COMO INTRODUZIR INTERAÇÃO ENTRE PARTÍCULAS SEM SPIN. MAS SABEMOS QUE ELÉTRONS E PÓSTRONS TÊM SPIN 1/2.

QUEREMOS UMA EQUAÇÃO RELATIVÍSTICA EM QUE NO LIMITE NÃO RELATIVÍSTICO TEMAMOS UMA LETEIRA DE PÓSS (CAMPOS), SPIN UP E SPIN DOWN.

DIRAC PROPOZ UMA HAMILTONIANO COM DEPENDÊNCIA LINEAR COM O TEMPO, NA EQUAÇÃO DE KG, TEMOS

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\psi = 0 \Rightarrow E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

NA EQ. SINTRODUZIMOS TEMOS

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$H\psi = \frac{\nabla^2 \psi}{2m}$$

1) Parâmetros ESCALARES



UNICAMP

~~ψ~~

$$i) \psi = \cancel{\psi} \quad \mathcal{H} \psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \psi$$

Com $\vec{\alpha}$ e β A SOMMA DEI QUADRADOS DEVE CONSIDERARE
COMO QUE SÓZUÉTONE DIVE SATISFATTORE A ROLLE DE
EIGENVAL, $E^2 = p^2 m^2$, DITTO

$$\mathcal{H}^2 \psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)^2 \psi = (\vec{p}^2 + m^2) \psi$$

$\alpha_i p_i \beta m$

$$(\alpha_i p_i + \beta m) (\alpha_j p_j + \beta m) = \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \beta \alpha_j p_j m + \beta^2 m^2$$

7) Termino LUTTEM EM P_i DITTO

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad \text{E} \quad \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i \neq 0 \quad i \neq j$$

$$\beta^2 = I \quad \alpha_i^2 = I$$

SE α_i E β SÓN NÚMEROS REALES E SÓN EQUILIBRATS ENTRE SI

SÓZUÉTONE.



UNICAMP

(63)

~~PROPOS~~ PROPOSICIONES INTRODUCIR ~~EXPLICACIONES~~

COMO α_i E β FORMAN MATRIZES.

ESTAS MATRIZES TAM

$$\begin{cases} \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 & \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \\ \beta^2 = \alpha^2 = 1 \end{cases}$$

COMO O INDICATORIO É REAL, $K = K^+$.

ENTÃO ISTO SÓ OCORRE SE $\alpha_i^+ = \alpha_i$ E $\beta^+ = \beta$.

PROPRIEDADES

~~$$\ln(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) = \ln(\alpha_i \beta) + \ln(\beta \alpha_i)$$~~

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad \leftarrow \times \beta$$

$$\alpha_i + \beta \alpha_i \beta = 0 \Rightarrow \ln \alpha_i = -\ln(\beta \alpha_i \beta)$$

USANDO PROPRIEDADES CIRCUL

$$\ln \alpha_i = -\ln(\alpha_i \beta^2) = -\ln \alpha_i \Rightarrow \boxed{\ln \alpha_i = 0}$$

$$\beta^+ \alpha_i \beta \alpha_i = 0 \Rightarrow \boxed{\ln \beta = 0}$$

SEJA α_i TM QUE OS AUTOVETORES SÃO η_i

$\rightarrow \alpha_i$
 $\alpha_i | \alpha_i \rangle = \eta_i | \alpha_i \rangle$

$\alpha_i^2 | \alpha_i \rangle = \eta_i \alpha_i | \alpha_i \rangle = (\eta_i)^2 | \alpha_i \rangle = | \alpha_i \rangle$

ENTÃO $\boxed{\eta_i^2 = 1}$ \Rightarrow PORTANTO $\eta_i = \pm 1$.

COMO η_i E β TEM AUTOVETORES ± 1 E NUNCA NULO, ENTÃO POSSA ENCONTRAR UMA REPRESENTAÇÃO EM QUE η_3 É OUTORA.

COM OS VALORES PRÓPRIOS IGUAIS

$$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

A ± 1 OU -1 .

COMO $\eta_i \eta_e = 0$ SÓ POSSAMOS TER

UM NÚMERO IGUAL DE AUTOVETORES

± 1 E -1 , PORTANTO A DIMENSÃO É

PAR.

NECESSARIAMENTE DE 4 MATRIZES α_i, β QUE SÃO ANTICOMUTAM.

COM DIMENSÃO DE 2, TEREMOS 4 MATRIZES DE PAU, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$

AS MATRIZES DE PAU SÃO INDEPENDENTES PORTANTO NÃO

EXISTEM UM QUARTA MATRIZ ANTICOMUTANTE.



UNICAMP

(65)

ENTÃO O MÓDULO DO VETOR É $n=4$.

EXISTEM VÁRIAS REPRESENTAÇÕES DESTAS MATRIZES.

IREMOS CONSTRUIR 4 MATRIZES COMO

$$y^0 = \beta$$

$$y^i = \beta \alpha^i$$

AS PROPRIEDADES $\alpha \in y^0$ E y^i SÃO

$$y^0 \cdot y^0 = (\beta)^2 \quad \beta \alpha_i \beta \alpha_i = -\beta^2 \alpha_i^2 = -1$$

$$t_{y^0} = t_{\beta} = 0 \quad \{y^0, y^i\} = \{\beta, \beta \alpha^i\} = \beta \beta \alpha_i^2 + \beta \alpha_i^i \beta$$

$$= \alpha_i^i + \beta \alpha_i \beta = +\alpha_i^i - \alpha_i \beta^2$$

~~$\{y^i, y^j\} = \beta \alpha^i \beta \alpha^j$~~

$$\{y^i, y^j\} = \{\beta \alpha^i, \beta \alpha^j\} = \beta \alpha^i \beta \alpha^j + \beta \alpha^j \beta \alpha^i$$

$$= -\beta^2 \alpha_i \alpha_j - \alpha^j \beta^2 \alpha^i = -\alpha_i^i \alpha^j - \alpha^j \alpha^i = 0$$

~~PORTANTO y^0 E y^i SÃO~~

ATENÇÃO OUTRO DE FORMA ANTI-COMUTATIVA

$$\{y^i, y^j\} = 0$$

$$y^i y^j + y^j y^i = y^i + y^j$$

~~$\{y^i, y^j\}$~~

~~$$h(\gamma^i) = -h(\beta^i \beta^0)$$~~

CARACTERÍSTICAS



$$h(\gamma^i) = h(\beta^i \beta^0) = -h(\beta^i \beta^0) = -h(\beta^i) = -h(\beta^i)$$

ENTÃO

$$h(\gamma^i) = 0$$

O KATZOR (INTRODUZ UMA REPRESENTAÇÃO NA FORMA COLUNA DIFERENTE

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

LUMOS USAR O MESMO

NOME, MAS DIFERENTE

$$\text{ONDE } \vec{\sigma} = \left\{ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ REPRESENTAÇÃO.}$$

ESTA É A CHAMADA REPRESENTAÇÃO DE PAULI-DIRAC.

OUTRA MUITA USADA É A REPRESENTAÇÃO DE WEYL,

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma^0 = \beta \gamma^i \\ \gamma^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

ENTÃO A EQUAÇÃO QUE PRODUZIMOS É

$$i \partial_t \psi = H \psi = \left(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m \right) \psi$$

(ONDE $\vec{\alpha}$ E β SÃO REPRESENTADOS POR UM MATRIZ 4×4 ,

A SOLUÇÃO ψ É UM VETOR COLUNA DE 4×1 , CHAMADO

ESPINOR DE DIRAC



UNICAMP

67

A EQUAÇÃO DE DIRAC É NO LIMITE NÃO RELATIVÍSTICO

$$i\gamma_t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \text{ (MULTIPLICADO POR TIMMOS)}$$

O SPIN UP = O SPIN DOWN.

$$1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

~~ESTA EQUAÇÃO~~

A FORMA DA EQ. DE DIRAC

$$i\gamma_t \psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \psi$$

SE MULTIPLICAMOS β PELA EQUAÇÃO

$$i\beta\gamma_t \psi = (\beta\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta^2 m) \psi$$

γ^0 $\vec{\gamma}$ I

$$\vec{p} \Rightarrow i\hbar \vec{\nabla}$$

ENTÃO $i\gamma^0 \psi - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} \psi - m\psi = 0$

$$i(\gamma^0 \psi - \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \psi) - m\psi = 0$$

DEFINIMOS $\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) \rightarrow$ $i\gamma^\mu \gamma_\mu \psi - m\psi = 0$ FORMA COVARIANTE DA EQ. DE DIRAC

As propriedades de $\gamma^0, \vec{\gamma}$ são

$$(\gamma^0)^2 = I$$

$$\gamma^0 \vec{\gamma} + \gamma^i \gamma^0 = 0$$

$$\gamma^0 \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^0 = 2I$$

$$(\gamma^i)^2 = -I$$

$$\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = 0$$

$$\gamma^i \gamma^i + \gamma^i \gamma^i = 2I$$

Portanto, satisfazem as seguintes equações

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

Equações da álgebra das matrizes, todas as propriedades

são derivadas desta equação.

• Outras propriedades

$$\gamma^{0T} = \gamma^0$$

$$\alpha^{iT} = \alpha^i$$

$$E \gamma^i ?$$

$$(\gamma^i)^T = (\beta \alpha^i)^T = \alpha^{iT} \beta^T = \alpha^i \beta = -\gamma^i$$

• então

$$\begin{cases} \gamma^{0T} = \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 \\ \gamma^{iT} = -\gamma^i = -\gamma^i (\gamma^0)^2 = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \end{cases}$$

$$\gamma^{\mu T} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

O campo de Dirac é real ou complexo?

$$\bar{\psi} (\gamma^\mu)_\mu \psi = m \psi$$

Tomando o \neq para





UNICAMP

69

SE ESCRITOS EM TOMBOS
 DE ψ^T NAO SAO COVARIANTE.
 $-i \gamma^0 \psi^T \gamma^0 - i \gamma^i \psi^T \gamma^i - m \psi^T \gamma^0 = 0$
 $-i \gamma^0 \psi^T + i \gamma^i \psi^T \gamma^i - m \psi^T = 0$
 NAO ESTA NA FORMA COVARIANTE

$$-i (\gamma^\mu \psi)^T - m \psi^T = 0$$

$$-i (\gamma^\mu \psi^T \gamma^{\mu T}) - m \psi^T = 0$$

$$\hookrightarrow \gamma^{\mu T} \gamma^\mu = \gamma^0$$

$$-i (\gamma^\mu \psi^T \gamma^{\mu T} \gamma^0) - m \psi^T = 0$$

$$-i (\gamma^\mu \psi^T \gamma^0 \gamma^\mu - m \psi^T \gamma^0) = 0$$

MULTIPLICADO POR γ^0

SE DEFINIMOS $\bar{\psi} = \psi^T \gamma^0$

QUE E O CAMPO ADJUNTO.

→ EQUAÇÃO DIFERENCIAL, O CAMPO DE DIRAC E COMPLEXO.

$$+i (\gamma^\mu \bar{\psi} \gamma^\mu) + m \bar{\psi} = 0$$

CORRENTES CONSERVADAS NA EQ. DE DIRAC

PROCEDIMENTO DE FORMA ANLOGA AO DA EQ. KG,

$$i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} \psi + i \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} \psi - m \psi = 0$$

E A EQUAÇÃO CONJUGADA

$$-i \frac{\partial}{\partial x^0} \bar{\psi} \gamma^0 - i \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{\psi} \gamma^k - m \bar{\psi} = 0$$

~~ESTÁO DE REVISAR~~

PARA AQUILO A CORRENTE VAMOS



$$\overrightarrow{x\psi} \quad i \gamma^0 \partial_0 \psi + i \gamma^i \partial_i \psi - m \psi = 0$$

\leftarrow
 $x\psi$

$$i \partial_0 \bar{\psi} \gamma^0 + i \partial_i \bar{\psi} \gamma^i + m \bar{\psi} = 0$$

$$i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi + i \bar{\psi} \gamma^i \partial_i \psi - m \bar{\psi} \psi$$

$$+ \partial_0 \bar{\psi} \gamma^0 \psi + i \partial_i \bar{\psi} \gamma^i \psi + m \bar{\psi} \psi = 0$$

$$i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi = 0$$

USANDO REGRA DA DERIVADA

$$\partial_\mu [i \bar{\psi} \gamma^\mu \psi] = 0 \quad \rightarrow \quad j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

$$\bar{\psi}^\dagger = (\psi^\dagger \gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \psi$$

ESTE TERMO É REAL? $j^{\mu\dagger} = (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^\dagger = \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \bar{\psi}^\dagger = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \in \mathbb{R}$

O TERMO $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ É UMA CORRENTE REAL

É UM NÚMERO!

PO QUE CHAMAMOS BILINEARES: $\bar{\psi} \Gamma \psi$

A PRIMEIRA

$$j^0 = \rho = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = |\psi|^2 > 0$$