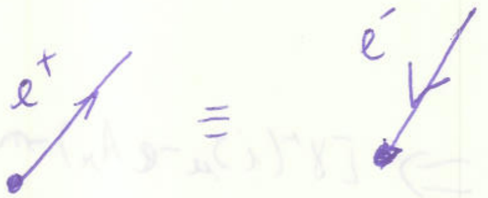
UNICAMP

83

PODEMOS ESCREVER OS DIAGRAMAS DE FEYNMAN INTEIRAMENTE EM TERMOS DOS ESTADOS DE PARTÍCULAS.

TEMOS UM POSITRON DE ENERGIA E (INTERNO) É EQUIVALENTE A UM ELETRON DE ENERGIA −E, SENDO

AGORA PRECISAMOS INCLUIR O COMPORTAMENTO DO SPIN.



IREMOS ANTECIPAR QUE O SPIN TAMBÉM TROCA DE SINAL.

$$h = \frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{2}$$

$\vec{p}, \vec{\Sigma}, h$ $\quad$ $-\vec{p}, -\vec{\Sigma}, +h$

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

PARA FAZERMOS A CONEXÃO ENTRE OS ESTADOS

$\psi^{(1,2)}(p)$ DE POSITRON E OS ESTADOS $\psi^{(3,4)}(p)$ DE ELETRON.

PARA ISTO INTRODUZIREMOS O ACOPLAMENTO DO

ELETRON COM O CAMPO ELETROMAGNÉTICO.

A EQ. DE DIRAC COM CAMPO ELETROMAGNÉTICO É

TROCANDO $i\partial^\mu \to i\partial^\mu + eA^\mu$,

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu + eA^\mu) - m]\psi = 0$$

DE FORMA ANÁLOGA AO CASO DA EQ. K-G.

SE ESTA É A EQUAÇÃO PARA O ELETRON COM CARGA $-e$,

ENTÃO TEMOS

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\psi = 0 \implies [\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi_C = 0$$

A TD SOLUÇÃO ψ DEVE CORRESPONDER UMA SOLUÇÃO ψ_C.

PODEMOS TENTAR ACHAR ESTA SOLUÇÃO, TOMANDO O COMPLEXO

CONJUGADO,

$$[\gamma^{\mu *}(-i\partial_\mu + eA^*_\mu) - m]\psi^* = 0 \quad [(-\gamma^{\mu *})(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi^* = 0$$

SE ACHARMOS UM OPERADOR C, DE CONJUGAÇÃO COMPLEXA

TAL QUE PODEMOS REESCREVER A EQUAÇÃO COMO SE

A EQUAÇÃO DE ψ^c. ISTO É POSSÍVEL SE

$$(C\gamma^0)\; -\gamma^{\mu *}(\;)\psi^* \to \underbrace{-C\gamma^0\gamma^{\mu *}}_{\gamma^\mu C\gamma^0}(\;)\psi^* = \gamma^\mu \underbrace{C\gamma^0\psi^*}_{\psi_C}$$

UNICAMP

85

PARA ISTO OCORRER

$\bar{\psi} = \psi^* \gamma^0$

$\psi^c = C\gamma^0\psi^*$ E $(\bar{\psi})^T = \gamma^{0T}\psi^{*T}$

$\bar{\psi}^c = $

$$\boxed{-C\gamma^0\gamma^{\mu *} = \gamma^\mu C \gamma^0}$$

$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$

$\gamma^{\mu *} = \gamma^{0T}\gamma^{\mu T}\gamma^{0T}$

USANDO A REPRESENTAÇÃO DAS MATRIZES

$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$ $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$

$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}$

PORTANTO

$\gamma^{1*} = \gamma^1$

$\gamma^{3*} = \gamma^3$

$-C\gamma^0\underbrace{\gamma^{0*}}_{\gamma^0} = \gamma^0 C\gamma^0$

$\gamma^{2*} = -\gamma^2$

$$\boxed{-C\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0 C\gamma^0}$$

$-C\gamma^0 = \gamma^0 C$

$\{C, \gamma^0\} = 0$

$\gamma^{0*} = \gamma^0$

$\gamma^0(C\gamma^0) + (C\gamma^0)\gamma^0 = 0$

$\{\gamma^0, C\gamma^0\} = 0$

TEMOS QUE $-C\gamma^0\gamma^{1*} = \gamma^1 C\gamma^0$

$-C\gamma^0\gamma^1 = \gamma^1 C\gamma^0$

$\{C\gamma^0, \gamma^1\} = 0$

$-C\gamma^0\gamma^{2*} = \gamma^2 C\gamma^0$

$C\gamma^0\gamma^2 = \gamma^2 C\gamma^0$ $(C\gamma^0)\gamma^2 = \gamma^2 C\gamma^0$ $[C\gamma^0, \gamma^2] = 0$

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

$$\{C\gamma^0, \gamma^{0,1,3}\} = 0$$

$$[C\gamma^0, \gamma^2] = 0$$

$$\boxed{C\gamma^0 = \alpha\gamma^2}$$

USAREMOS $\alpha = i$

$$C\gamma^0 = i\gamma^2 = \begin{pmatrix} \emptyset & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & \emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & \emptyset \end{pmatrix}$$

A AÇÃO EXPLICITA NUM ESPINOR

$$\psi_c^{(1)} = C\gamma^0\psi^* = C\gamma^0 [u^{(1)}(p)\, e^{-ipx}]^* = \underbrace{C\gamma^0}_{i\gamma_2} u^{(1)*}(p)\, e^{ipx}$$

TEMOS QUE

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u^{(1)}(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \chi^{(1)} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$u^{(1)}(\vec{p})^* = N^* \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^*}{E+m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}^*\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x + ip_y \\ p_x - ip_y & -p_z \end{pmatrix}$$

E PORTANTO

$$\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^*}{E+m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_z & p_x + ip_y \\ p_x - ip_y & -p_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_z \\ p_x - ip_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi^{(1)} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma_2 \frac{\vec{\sigma}^*\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_1 \\ -i\sigma_2\chi^1 \end{pmatrix}$$

(87)

UNICAMP

$$i\sigma_2\,\sigma^*\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_z & p_x+ip_y \\ p_x-ip_y & -p_z \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2\sigma^* = \begin{cases} \sigma_2\,\sigma^{1,3} = -\sigma^{1,3}\sigma^2 \\ \sigma_2\,\sigma_2^* = -\sigma_2^*\sigma_2 \end{cases}$$

$$i\sigma_2\,\sigma^*\cdot\vec{p}\,\chi_1 = -i\,\vec{\sigma}\cdot\sigma_2\,\vec{p}\,\chi_1 = -i\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,(\sigma_2\chi_1)$$

$$\sigma_2\chi_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i\chi^{(2)}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_c^{(1)} = e^{ipx}\left\{\begin{pmatrix} i\dfrac{\sigma_2\sigma^* p}{E+m}\chi_1 \\ -i\sigma_2\chi^1 \end{pmatrix}\right. = \begin{pmatrix} \dfrac{-i\,\vec{\sigma}\cdot p\,\sigma_2\chi^1}{E+m} \\ -i\sigma_2\chi^1 \end{pmatrix}$$

$$\psi_c^{(1)} = e^{ipx}(-i)N^* \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\cdot p}{E+m}\,\sigma_2\chi^{(1)} \\ \sigma_2\chi^{(1)} \end{pmatrix} = e^{ipx}(-i)N^*\begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\cdot p}{E+m}\,i\chi^{(2)} \\ i\chi^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\psi_c^{(1)} = e^{ipx}N^*\begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(2)} \\ \chi^{(2)} \end{pmatrix} = e^{ipx}N^*\underline{\begin{pmatrix} \dfrac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(2)} \\ \chi^{(2)} \end{pmatrix}}$$

$$u^{(2)}(-\vec{p}) \equiv v^{(2)}(p)e^{ipx}$$

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

A SOLUÇÃO $u^{(1)}(p)$ SE TRANSFORMA EM $v^{(1)}(p)$.

QUANDO APLICAMOS O COMPLEXO CONJUGADO.

$$\boxed{\psi_c^{(1)} = v^{(1)}(\vec{p})e^{ipx}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} & C = i\gamma^2\gamma^0 \\ CC^{-1}=1 & C^\dagger = -i\gamma^{0\dagger}\gamma^{2\dagger} = i\gamma^0\gamma^2 = -i\gamma^2\gamma^0 = -C \\ i\gamma^2\gamma^0 C^{-1} = 1 & C^T = C^{\dagger *} = (-C)^* = -C^* = +i\gamma^{2*}\gamma^{0*} = i\gamma^2\gamma^0 = C \\ C^{-1} = -i\gamma^0(\gamma^2) = i\gamma^2\gamma^0 = -C & \end{array}}$$

$$C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T$$

PODEMOS MOSTRAR QUE A CORRENTE J^μ TROCA

$$J^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

E PORTANTO A CORRENTE ASSOCIADA COM O POSITRON É

$$J_\mu^c = -e\bar{\psi}_c\gamma^\mu\psi_c = -e$$

$$\bar{\psi}_c = (C\bar{\psi}^T)^\dagger\gamma^0 = \bar{\psi}^* C^\dagger = (\psi^\dagger\gamma^0)^* C^\dagger = \psi^T\gamma^{0*}C^\dagger - \psi^T\gamma^0 C^\dagger$$

$$\bar{\psi}_c = \psi^T\gamma^0 C^{-1}$$

$$J_\mu^c = -e\bar{\psi}_c\gamma^\mu\psi_c = -e(\cancel{\psi}^{-1} - \psi^T\gamma^0 C^{-1}\gamma^\mu C\bar{\psi}^T)$$

$$J_\mu^c = e\psi^T \underbrace{C^{-1}\gamma_\mu C}_{-(\gamma^\mu)^T}\bar{\psi}^T = -e\psi^T(\gamma^\mu)^T\bar{\psi}^T$$

ψ SÃO GRASSMANN

$$J_\mu^c = +e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$$

UNICAMP

84

OBTEMOS DE OUTRA FORMA OS ESTADOS,

SE $(\gamma^\mu p_\mu - m)\, u(p) = 0$, PODEMOS ESCOLHER

$$u(p) = (\gamma^\nu p_\nu + m)\, g(p)$$

ENTÃO

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)(\gamma^\nu p_\nu + m)\, g(p) = (p^2 - m^2)\, g(p) = 0 \quad \forall g(p)$$

ENTÃO

$u(p) = (\gamma^\nu p_\nu + m)\, g(p)$ É UMA SOLUÇÃO. COMO $\vec{p} \to 0$ A SOLUÇÃO É $u(\vec{p}=0)$. DAÍ

PODEMOS ESCOLHER $g(p) = u(\vec{p}=0)$

$$\boxed{u(p) = \frac{1}{m}(\gamma^\nu p_\nu + m)\, u(\vec{p}=0)}$$

É UMA SOLUÇÃO

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

NORMALIZAÇÃO DE ESTADOS

VAMOS UTILIZAR A NORMALIZAÇÃO DE $2E$ PARTÍCULAS POR UNIDADE DE VOLUME,

$$\int_{\text{unidade}}^{\text{volume}} \rho \, dV = \int \psi^{\dagger} \psi \, dV = u^{\dagger} u = 2E$$

AS CONDIÇÕES DE ORTOGONALIDADE SÃO

$$u^{(r)\dagger} u^{(s)} = 2E\,\delta_{rs} \qquad v^{\dagger(r)} v^{(s)} = 2E\,\delta_{rs}$$

EXPLICITAMENTE

$$u^{(s)\dagger} u^{(s)} = |N|^2 \left[1 + \left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \right)^2 \right] = |N|^2 \left[1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{(E+m)^2} \right] = |N|^2 \frac{2E}{E+m} = 2E$$

$$\frac{(E+m)^2 + \vec{p}^{\,2}}{(E+m)^2} = \frac{E^2 + 2Em + \overbrace{m^2 + p^2}^{E^2}}{(E+m)^2} = \frac{2E(E+m)}{(E+m)^2} = \frac{2E}{E+m}$$

$|N|^2 = \sqrt{E+m}$ E DA MESMA FORMA PARA $v^{(s)}$.

$$\boxed{u^{(s)} = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \chi^{(s)} \end{pmatrix}} \qquad E>0$$

UNICAMP

91

$$v^{(1)}(p) = u^{(3)}(-p)\, e^{ipx}$$

u^{1+2}

$v^{(2)} = u^{5-0}$

$$v^{(1)}(p) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \frac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\chi^{(4)}}{|E|+m} \\ \chi^{(4)} \end{pmatrix}$$

$$\chi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v^{(2)}(p) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \frac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\chi^{(3)}}{E+m} \\ \chi^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$\chi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

PRECISAMOS ACHAR A RELAÇÃO DE COMPLETEZA DAS SOLUÇÕES.

VAMOS DEFINIR $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$ e $\bar{v} = v^\dagger \gamma^0$, ENTÃO TEREMOS

$$(\not{p}-m)u = 0 \xrightarrow{\text{DAGGER}} u^\dagger(\not{p}^\dagger - m) = 0 \quad \gamma^{\mu\dagger} \quad \xleftarrow{} \gamma^0$$

$$u^\dagger \underbrace{\not{p}^\dagger \gamma^0}_{p_\mu \gamma^0 \gamma^\mu} - m u^\dagger \gamma^0 = \bar{u}\,\cancel{\not{p}} - m\bar{u} = \bar{u}(\not{p}-m) = 0$$

$$E \quad (\not{p}+m)v(\vec{p}) = 0 \qquad \boxed{\bar{v}(\not{p}+m) = 0}$$

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

TEMOS QUE

$$u^{+}_{(s)} u_{(s)} = 2E\delta_{RS} = u^{+}_{(s)} \gamma^0\gamma^0 u_{(s)} = 2E\delta_{RS}$$

E DA EQUAÇÃO DE u

$$(\not{p} - m) u = 0 \longrightarrow \gamma^0 p_0 - (\vec{\gamma}\cdot\vec{p}) u - mu = 0$$

$u \cdot (\not{p} - m) u = 0$

$$\not{p}(\not{p} - m) u = (p^2 - m\not{p}) u = (m^2 - m\not{p}) u$$

PODEMOS MOSTRAR QUE

$$\boxed{\bar{u}^{(R)} u^{(R)} = 2m \qquad \bar{v}^{(s)} v^{(s)} = -2m}$$

$$\sum_{R=1,2} u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) = \not{p} + m$$

$$\sum_{R=1,2} v^{(s)}(p) \bar{v}^{(s)}(p) = \not{p} - m$$

ONDE $\Lambda_{+} = \dfrac{(\not{p} + m)}{2m}$ $\quad \Lambda_{-} = \dfrac{(\not{p} - m)}{2m}$ SÃO OS PROJETORES

SOBRE ESTADOS DE ENERGIA POSITIVA E NEGATIVA.

UNICAMP

(93)

TEMOS QUE $\begin{cases} \Lambda_+ + \Lambda_- = 1 \\ \Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm \end{cases}$

BILINEARES COVARIANTES

ATÉ AGORA TRABALHAMOS COM A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC, O ESPINOR, QUE É UM OBJETO 4×1 E NÃO TEM ANÁLOGO CLÁSSICO.

QUEREMOS CONSTRUIR QUANTIDADES QUE SE COMPORTAM COMO ESCALARES, QUADRIVETORES E TENSORES POR TL.

A TEORIA QUE CONSTRUIMOS DEVE SER EM TERMOS DESTAS QUANTIDADES.

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

PARA ENTENDERMOS ISTO PRECISAMOS SABER COMO O ESPINOR SE TRANSFORMA POR TL.

DA EQUAÇÃO DE DIRAC, NO REFERENCIAL S

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - m\psi(x) = 0$$

E NO OUTRO REFERENCIAL S',

$$i\gamma^\mu \partial'_\mu \psi'(x') - m\psi'(x') = 0 \qquad \text{COM} \quad \underbrace{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu}_{\text{TL.}}$$

$$\text{COMO } x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Rightarrow \partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$$

ENTÃO

$$i\gamma^\mu (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu \partial_\nu \psi'(x') - m\psi'(x') = 0$$

ADMITA UMA SOLUÇÃO

$$\psi'(x') = S\psi(x)$$

$$i\gamma^\mu (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu \partial_\nu S\psi(x) - mS\psi(x) = 0$$

$\times S^{-1}$

$$iS^{-1}\gamma^\mu S \underbrace{(\Lambda^{-1}{}_\mu{}^\nu)}_{\Lambda^\nu{}_\mu} \partial_\nu \psi(x) - m\psi(x) = 0$$

PARA SER IGUAL A EQUAÇÃO NO REFERENCIAL S

$$i\,[\underbrace{S^{-1}\gamma^\mu S\,\Lambda^\nu{}_\mu}_{\gamma^\nu}]\,\partial_\nu \psi(x) - m\psi(x)$$

$$S^{-1}\gamma^\mu S\,\Lambda^\nu{}_\mu = \gamma^\nu$$

$$\boxed{S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu}$$

ESTA EQUAÇÃO DEFINE A ~~SOLUÇÃO~~ TRANSFORMAÇÃO S DO ESPINOR

UNICAMP

PODEMOS ACHAR UMA SOLUÇÃO PARA DIFERENTES SOLUÇÕES,

$$\Lambda^{\nu}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu} + \varepsilon^{\nu}_{\mu}$$

$\hookrightarrow$ PARÂMETRO DA TRANSFORMAÇÃO

SUBSTITUINDO,

$$S^{-1} \gamma^{\mu} S = (\gamma^{\mu}_{\nu} + \varepsilon^{\mu}_{\nu})\gamma^{\nu} = \gamma^{\mu} + \varepsilon^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}$$

USAMOS A EQUAÇÃO DE BAKER-HAUSDORFF

$$e^{+X} Y e^{-X} = Y + [X, Y] + \frac{[X,[X,Y]]}{2} + [$$

$X = a + bx$

a b CTES.

PODEMOS ASSOCIAR

$$[X, \gamma^{\mu}] = \varepsilon^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}$$

A SOLUÇÃO É

$$\boxed{S_2 = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu}}}$$

ONDE $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

A TRANSFORMAÇÃO $\psi(x) \to \psi'(x') = S\psi(x)$

$$S = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu}}$$

É A CHAMADA REPRESENTAÇÃO ESPINORIAL DA TL, OU DE SPIN=1/2.

A TL ESCALAR DA TL É

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0 \qquad (\Box' + m^2)\phi'(x')$$

CASO $\Box = \Box'$, ENTÃO $\phi'(x') = \phi(x)$

↳ O VALOR DO CAMPO É O MESMO EM QQ. REFERENCIAL, CAMPO ESCALAR S=0.

A REPRESENTAÇÃO DE $\sigma_{\mu\nu}$

$$\sigma^{0i} = \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = \frac{i}{4}\left\{ \overset{1}{\beta\beta}\alpha_i - \beta\alpha_i\beta \right\} = \frac{i\alpha_i}{2} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$+\alpha_i\beta^2$$

$$\sigma^{ij} = \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = \frac{i}{4}\left\{ \beta\alpha^i\beta\alpha^j - \beta\alpha^j\beta\alpha^i \right\} = \frac{i}{4}[\alpha^j, \alpha^i]$$

$$-\alpha^i\beta\beta\alpha^j$$

$$-\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i \qquad \alpha^i\alpha^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{pmatrix} \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k & \\ & \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta^{ij} + i\varepsilon^{jik}\sigma_k & \\ & \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{matrix} \sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^i\sigma^j \end{matrix}$$

UNICAMP

$$\boxed{\sigma^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & \phi \\ \phi & \sigma^k\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\Sigma^k}$$

$$\psi'(x') = S\psi(x) \begin{cases} S^{0i} \to & \text{BOOSTS} \\ S^{ij} \to & \text{ROTAÇÕES} \end{cases}$$

OBSERVE $(S^{0i})^\dagger = \frac{-i}{2}\begin{pmatrix}0 & \sigma^{i\dagger} \\ \sigma^{i\dagger} & 0\end{pmatrix} = -S^{0i}$ NÃO É HERMITIANO.

VAMOS VER O EFEITO DE ROTAÇÕES EM SOLUÇÕES DA EQ. DE DIRAC. ROTAÇÕES:

$$\cancel{\psi'(x') = e^{-\frac{i}{4}\frac{i}{2}\begin{pmatrix}\phi & \sigma_i \\ \sigma_i & \phi\end{pmatrix}\varepsilon^{0i}}\psi(x)}$$

$$\psi(x') = [1 - \frac{i}{4}\sigma_{ij}\varepsilon^{ij}]\psi(x)$$

$$x'^j = R^{jk}x^k = (\delta^{jk} + \varepsilon^{jkl}\delta\varphi_l)x^k$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\omega}\wedge\vec{x}$$

PARA ROTAÇÕES

$$\varepsilon^{kl} = \varepsilon^{jkl}\delta\varphi_l$$

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon^{ijl}\delta\varphi_l$$

$$\psi'(x') = [1 - \frac{i}{4}\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\Sigma^k\varepsilon^{jkl}\delta\varphi_l]\psi(x)$$

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

$$\sigma^{ij}\epsilon^{ij} = \frac{1}{2}\,\epsilon^{ijp}\Sigma^{p}\epsilon^{ijl}\delta\varphi_l$$

UNICAMP

TEMOS

$$\psi'(x') = \left[1 - \frac{i}{4}\frac{1}{2}\frac{\epsilon^{ijp}\epsilon^{ijl}}{\delta^{lp}}\left[\Sigma^{p}\,\delta\varphi_l\right]\psi(x)\right.$$

$$\psi'(x') = \left[1 + \frac{i}{2}\,\vec{\Sigma}\cdot\delta\vec{\varphi}\right]\psi(x)$$

$$\boxed{\psi(x') = \left[1 + i\,\delta\vec{\varphi}\cdot\vec{\Sigma}\right]\psi(R^{-1}x')}$$

TRANSFORMAÇÃO DO PONTO, ASSOCIADO COM MOMENTO ANGULAR.

ROTAÇÃO DEVIDO À PARTE DE SPIN.

SE FIZERMOS $\varphi = 2\pi$,

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\exp\left[2\pi i\begin{pmatrix} \frac{\sigma^3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^3}{2}\end{pmatrix}\right] = \exp\begin{bmatrix} i\pi & & & \\ & -i\pi & & \\ & & i\pi & \\ & & & -i\pi \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

UMA ROTAÇÃO DE 2π MUDA O ESTADO DO ESPINOR,

APENAS ROTAÇÕES DE 4π FAZEM ROTAÇÕES.

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

BILINEARES E PARIDADE

A ROTAÇÃO QUE MANTÉM INVARIANTE A EQUAÇÃO DE DIRAC,

PODEMOS INCLUIR A PARIDADE.

A PARIDADE É A OPERAÇÃO $t \to t' = t$

$x^i \to x'^i = -x^i$

PORTANTO

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

QUAL O EQUIVALENTE DE S_L PARA A PARIDADE?

DA ROTAÇÃO,

$$\boxed{S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu}$$

PARA A PARIDADE

$$\begin{cases} S^{-1}\gamma^0 S = \gamma^0 & \Rightarrow [\gamma^0, S] = 0 \\ S^{-1}\gamma^k S = -\gamma^k & \{\gamma^k, S\} = 0 \end{cases}$$

$$\psi'(x') = \gamma^0 \psi(x) = \gamma^0 \psi(-x, t)$$

ENTÃO $\underline{S = \gamma^0}$, PORTANTO

$$\psi'(x') = \gamma_0 \begin{cases} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\chi^s}{E+m} \end{pmatrix} e^{-ipx} & s=1,2 \\ \begin{pmatrix} \frac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\chi^s}{E+m} \\ \chi^s \end{pmatrix} e^{+ipx} & s=3,4 \end{cases}$$

$= \psi(x) \quad s=1,2$

$= -\psi(x) \quad s=3,4$