

1ª Prova de F-589- Solução

1. Duas espaçonaves de comprimento próprio 200 m passam uma pela outra se movendo em direções opostas ao longo do eixo-x. Um astronauta na parte dianteira de uma das espaçonaves mede um intervalo de tempo de 0.5 μs para a passagem da outra espaçonave por ele.
- Qual é a velocidade relativa entre as espaçonaves?
 - Após o cruzamento das espaçonaves, o astronauta da espaçonave que se move na direção positiva de x, vê no seu referencial um cometa que se desloca com velocidade $u'_y = 0.6c$ ao longo da direção positiva do eixo-y. Calcule a velocidade (módulo e direção) do cometa no referencial da outra espaçonave.

a) $L_0 = 200 \text{ m}$, $\Delta t_0 = 0.5 \mu\text{s}$

O comprimento da nave em movimento para o astronauta em repouso é:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad \text{logo,} \quad \Delta t_0 = \frac{L_0}{\gamma v} \Rightarrow \gamma v = \frac{L_0}{\Delta t_0} = \frac{200}{0.5 \mu\text{s}} = 4,0 \times 10^8$$

Então,

$$\gamma^2 v^2 = 16 \times 10^{16} \Rightarrow \frac{c^2}{c^2 - v^2} v^2 = 16 \times 10^{16}$$

$$c^2 v^2 = 16 \times 10^{16} c^2 - 16 \times 10^{16} v^2 \Rightarrow v^2 (c^2 + 16 \times 10^{16}) = 16 \times 10^{16} c^2$$

$$v^2 = \frac{1,44 \times 10^{34}}{25 \times 10^{16}} \Rightarrow v = 2,4 \times 10^8 \text{ m/s ou } v = 0.8c$$

b) Para o referencial da espaçonave se movendo para direita (S'): $u'_y = 0,6 c$ e $u'_x = u'_z = 0$

Pelas transformações das velocidades:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2} = v = 0.8c$$

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{(0,36c)^2 + (0,8c)^2} = 0,88c$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_x v / c^2} = 0,6c \sqrt{1 - 0,64} = 0,36c$$

$$\text{tg } \theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{0,36c}{0,8c} = 0,45$$

No plano xy com uma direção $\theta = 27^\circ$ com o eixo - x

$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_x v / c^2} = 0$$

P.S Resultados aproximados, quando corretos, serão considerados.

2. Um corpo de massa em repouso m_0 se propagando em alta velocidade sofre uma colisão inelástica com um corpo de massa $4m_0$ inicialmente em repouso. Após a colisão os dois corpos emergem como um corpo-único com uma velocidade de $0.6c$ na mesma direção do corpo incidente.
- a) Qual é a velocidade do corpo incidente?
 b) Qual é a massa em repouso do corpo único que emerge da colisão?

a) Seja a massa em repouso do corpo-único M_0 e como ele emerge com $u = 0,6c$

$$\gamma_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0,6)^2}} = 1,25$$

Da conservação do momento relativístico:

$$p_i = p_f$$

$$\gamma m_0 v = 1,25 M_0 u = 0,75 M_0 c \quad (1)$$

Da conservação da Energia total relativística:

$$\gamma m_0 c^2 + 4m_0 c^2 = 1,25 M_0 c^2 \Rightarrow (\gamma + 4)m_0 = 1,25 M_0 \quad (2)$$

De (1) e (2):

$$\gamma m_0 v = \frac{(\gamma + 4)}{1,25} m_0 0,75c \Rightarrow \gamma v = (\gamma + 4)0,6c \Rightarrow \gamma(v - 0,6c) = 2,4c \Rightarrow \gamma^2(v - 0,6)^2 = 5,76c^2$$

$$\Rightarrow 6,76v^2 - 1,2vc - 5,4c^2 = 0 \text{ para qual a solução válida é } v = 0,9869 c$$

b) Para $v = 0,9869 c$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0,9869)^2}} = 6,2$

Usando (1)

$$6,2m_0 0,9869c = 0,75M_0 c \Rightarrow M_0 = 8,2m_0$$

PS. Outras aproximações para o cálculo de v e m_0 , quando corretas, serão consideradas.

3. Um corpo negro encontra-se inicialmente a uma temperatura absoluta T_i . O corpo é então aquecido até atingir o equilíbrio a uma temperatura $T_f = 4 T_i$. Qual é a razão entre os valores final e inicial:
- Do número médio total de fótons emitidos pela superfície do corpo.
 - Do comprimento de onda em que a emissão é máxima.
 - Da energia eletromagnética emitida em um intervalo infinitesimal $d\lambda$ em torno do comprimento de onda máximo.

$$a) \frac{\overline{N}_f}{\overline{N}_i} = \frac{\frac{R_{Tf}}{h\overline{\nu}_f}}{\frac{R_{Ti}}{h\overline{\nu}_i}} \approx \frac{\frac{\sigma T_f^4}{h\nu_{f\max}}}{\frac{\sigma T_i^4}{h\nu_{i\max}}} = \frac{T_f^4}{T_i^4} = 4^3 = 64 \text{ onde } h\overline{\nu} \sim h\nu_{\max}$$

PS. Uma solução mais rigorosa pode ser feita pela integral abaixo, a qual leva ao

mesmo resultado com:
$$\frac{\overline{N}_f}{\overline{N}_i} = \frac{\int_0^\infty \frac{R_{Tf}(\nu)}{h\nu} d\nu}{\int_0^\infty \frac{R_{Ti}(\nu)}{h\nu} d\nu} = 4^3 = 64$$

Muita gente considerou $\frac{\overline{N}_f}{\overline{N}_i} = \frac{R_{Tf}}{R_{Ti}} = \frac{\sigma T_f^4}{\sigma T_i^4} = 4^4 = 256$ que será parcialmente pontuado.

b) Pela Lei do deslocamento de Wien: $\lambda_{\max} \cdot T = C$

$$\frac{\lambda_{f\max}}{\lambda_{i\max}} = \frac{T_i}{T_f} = \frac{1}{4}$$

$$c) R_{Tf}(\lambda_f) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda_{f\max}^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda_{f\max} k_B T_f} - 1}$$

$$R_{Ti}(\lambda_i) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda_{i\max}^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda_{i\max} k_B T_i} - 1}$$

$$\frac{R_{Tf}(\lambda_f)}{R_{Ti}(\lambda_i)} = \frac{\lambda_{i\max}^5}{\lambda_{f\max}^5} \frac{e^{hc/\lambda_{i\max} k_B T_i} - 1}{e^{hc/\lambda_{f\max} k_B T_f} - 1}$$

mas como $\lambda_{\max} \cdot T = C$

$$\frac{R_{Tf}(\lambda_f)}{R_{Ti}(\lambda_i)} = \frac{\lambda_{i\max}^5}{\lambda_{f\max}^5} = 4^5 = 1024$$

4. Numa experiência de física moderna, incidi-se radiação de diferentes comprimentos de onda sobre um filme de potássio.

a) Em um experimento com luz monocromática com $\lambda = 4000 \text{ \AA}$, observa-se um efeito fotoelétrico com um potencial de corte $V_0 = 1,0 \text{ V}$. Qual é a função trabalho do potássio?

b) Sob incidência de raios-x com $\lambda = 1,0 \text{ \AA}$, observa-se radiação espalhada pelos elétrons do metal a 90° do feixe incidente. Qual a energia cinética transferida ao elétron devido ao efeito Compton?

c) Que outro processo de absorção de fótons pode ocorrer para comprimentos de onda ainda menores? Explique com suas palavras o que determina a probabilidade de ocorrência de cada um desses processos.

$$a) h\nu - \phi_0 = eV_0$$

$$\frac{hc}{\lambda} - \phi_0 = eV_0$$

$$\frac{12,4 \times 10^3 \text{ eV} - \text{\AA}}{4000 \text{ \AA}} - \phi_0 = 1,0 \text{ eV} \Rightarrow 3,1 - \phi_0 = 1,0 \Rightarrow \phi_0 = 2,1 \text{ eV}$$

$$b) \Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{h}{mc} = 0,0243 \text{ \AA} \Rightarrow \lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 1,0243 \text{ \AA}$$

$$K_{el} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = 294 \text{ eV}$$

c) Para comprimentos de ondas ainda menores pode ocorrer a formação de pares elétron-pósitron pela absorção de um fóton ao redor do núcleo alvo. A probabilidade de ocorrência de cada processo depende de sua seção de choque que é função da frequência da radiação incidente e do material do alvo.

2ª Prova de F-589

Turma A
Primeiro Semestre de 2007
30/05/2007

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____

Nota: _____

Nome: _____ **RA:** _____

4. Em um experimento de difração, utiliza-se um feixe de nêutrons com energia cinética de 30 meV para se obter um conjunto de picos de difração para um composto cristalino.
- a) Usando a mesma configuração experimental (ângulos de incidência e detecção), qual deve ser a energia cinética no caso de um feixe de elétrons, afim de que se obtenha o mesmo padrão de difração (picos de Bragg para os mesmos ângulos) do experimento com nêutrons?
- b) Qual é o comprimento de onda de de Broglie para átomos de Hélio com a mesma energia cinética dos nêutrons?

Solução:

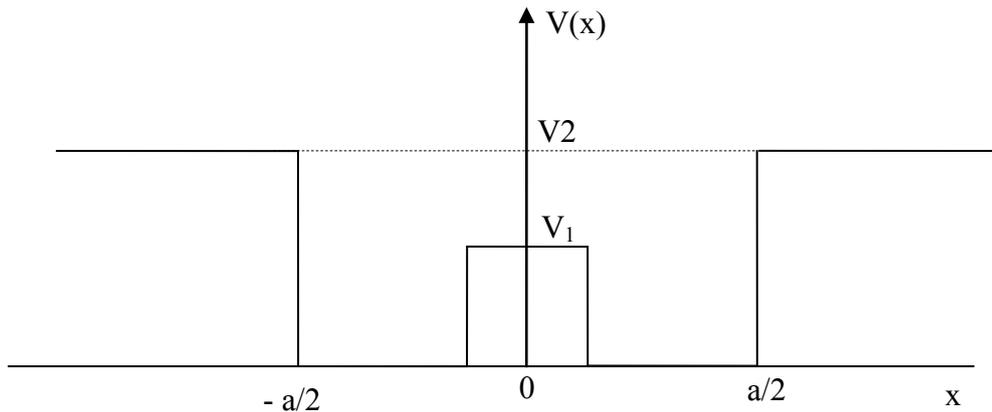
- a) Para se obter o mesmo padrão de difração, devemos ter $\lambda_e = \lambda_n$.
Assim:

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} = \lambda_n = \frac{h}{p_n} \Rightarrow p_e = p_n \Rightarrow \sqrt{2m_e K_e} = \sqrt{2m_n K_n}$$

$$K_e = \frac{m_n}{m_e} K_n = 55 \text{ eV}$$

$$\text{b) } \lambda_{He} = \frac{h}{p_{He}} = \frac{h}{\sqrt{2m_{He} K_{He}}} = \boxed{0,83 \text{ \AA}}$$

2) Considere uma partícula se movendo no potencial $V(x)$ ilustrado na figura abaixo.



- a) Para os seguintes intervalos de valores de energia total E , responda e justifique quando há um possível valor de E , e se isto ocorre, se o espectro de energia é discreto ou contínuo. i) $E < 0$, ii) $0 < E < V_1$, iii) $V_1 < E < V_2$ iv) $E > V_2$.
- b) Assuma que a autofunção solução da equação de Schrödinger independente do tempo para o potencial acima é dada por $\psi(x) = \frac{20}{\sqrt{a}} e^{-\frac{4x}{a}}$ para $x > a/2$ e calcule a probabilidade de se encontrar a partícula no intervalo $a < x < 2a$.

Solução:

- a) i) $E < 0$ é impossível nesse caso, pois $\langle p^2 \rangle$ e $\langle V_0 \rangle$ são sempre maior que zero.
 ii) $0 < E < V_1$, existem valores possíveis de energia e seu o espectro é quantizado, pois a partícula está confinada (movimento limitado).
 iii) $V_1 < E < V_2$, existem valores possíveis de energia e seu o espectro é quantizado, pois a partícula está confinada (movimento limitado).
 iv) $E > V_2$, existem valores possíveis de energia e seu o espectro é contínuo, pois o movimento partícula ilimitado.

b) $P(x)dx = |\psi(x)|^2 dx$

$$P(a < x < 2a) = \int_a^{2a} |\psi(x)|^2 dx$$

$$P(a < x < 2a) = \int_a^{2a} \frac{400}{a} e^{-\frac{8x}{a}} dx = \frac{400}{a} \left(-\frac{a}{8}\right) [e^{-16} - e^{-8}] = \boxed{0,02}$$

3. A função de onda do primeiro estado excitado de um poço infinito de largura a é:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a} e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}} & -a/2 < x < a/2 \\ 0 & x < -a/2 \text{ e } x > a/2 \end{cases}$$

- Determine o valor da energia E_2 ?
- Qual é o valor da incerteza Δp para este estado?
- Usando o resultado do item anterior, calcule a incerteza mínima correspondente Δx ?

Solução:

a) Substituindo-se a função acima, para $-a/2 < x < a/2$, na equação de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{2}{a}} \left(-\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a}\right) \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}} = \frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a}\right) \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = i\hbar \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a}\right) \left(-\frac{i}{\hbar} E_2 e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}}\right) = E_2 \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a}\right) e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}} \text{ substituindo na}$$

equação e fazendo $V(x,t) = 0$.

$$\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a}\right) \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}} = E_2 \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a}\right) e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}} \text{ daí:}$$

$$E_2 = 4 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

b) A incerteza Δp é dada por:

$$\Delta p = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2, \quad \text{onde } \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) dx \text{ e}$$

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) dx. \text{ Fazendo os cálculos:}$$

$$\langle p \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{2}{a} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a} \left(-i\hbar\right) \left(\frac{2\pi}{a}\right) \cos \frac{2\pi x}{a} dx = 0, \text{ pois o integrando é uma função}$$

ímpar.

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{2}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} \hbar^2 \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{2\pi x}{a} dx = \frac{2\hbar^2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \sin^2 \frac{2\pi x}{a} dx = \frac{2\hbar^2}{a} \frac{a}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \int_{-a/2}^{a/2} \sin^2 y dy$$

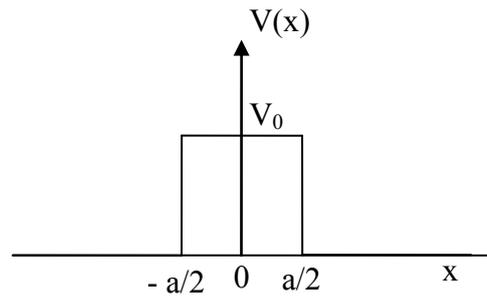
Usando $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x\right)$ têm-se:

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{\pi} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 (\pi) = \left(\frac{2\pi\hbar}{a}\right)^2 \quad \text{logo} \quad \Delta p = \frac{2\pi\hbar}{a} = \frac{h}{a}$$

c) Usando o princípio da incerteza:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{temos} \quad \Delta x_{\min} = \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{a}{4\pi}$$

4) Dado o potencial barreira abaixo de altura V_0 e largura a .



a) Discuta *qualitativamente* a solução da equação de Schrödinger independente do tempo para o potencial barreira para $E > V_0$, usando os conceitos de probabilidade de transmissão e probabilidade de reflexão e discutindo as principais diferenças entre o resultado quântico e a previsão clássica do comportamento da partícula?

b) Assuma que uma solução particular para uma partícula sujeita a um potencial barreira é dada por:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} e^{ikx} + \frac{1}{5}e^{-ikx} & x < -a/2 \\ Ce^{ikx} & x > a/2 \end{cases}$$

Calcule o coeficiente de reflexão R e o módulo da constante C ?

Solução:

a) As soluções de $\psi(x)$ para o potencial dado e $E > 0$ terão a forma

$$\Psi(x,t) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad \text{onde } k = k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{para } x < -a/2 \text{ e } x > a/2 \text{ e}$$

$$k = k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \quad \text{para } -a/2 < x < a/2$$

Nas regiões de fronteira do potencial, onde o vetor de onda da partícula muda, haverá uma probabilidade de reflexão ou transmissão da partícula. A probabilidade destes eventos é dada pelos coeficientes de reflexão R e o de transmissão T . Estes coeficientes dependem de energia E , e quanto maior E menor R e maior T . Para este problema em particular, existem valores de k_2 tal que $\text{sen}k_2a = 0$, onde $T = 1$ e $R = 0$, que são conhecidas como condições de ressonância.

Esta descrição quântica tem um claro contraste com a descrição clássica da partícula, que nesse caso teria probabilidade de transmissão sempre 1 para $E > 0$, ou seja, a partícula clássica jamais sofreria reflexão quando $E > 0$.

b) Neste caso:

$$R = \frac{(1/5)^2}{1} = \frac{1}{25} \quad \text{mas } R + T = 1 \text{ logo } T = 24/25 \text{ e } T = \frac{|C|^2}{1} = \frac{24}{25} \Rightarrow C = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

3ª Prova de F-589

Turma A
Primeiro Semestre de 2007
27/06/2007

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____

Nota: _____

Nome: _____ **RA:** _____

5. Para um experimento de Rutherford, onde partículas de carga $+ze$ e massa m , inicialmente se propagam com velocidade v e são espalhadas por um núcleo de carga $+Ze$, calcule o que se pede.
- a) A expressão para D , a menor distância de aproximação entre as partículas e o núcleo no caso de uma colisão frontal ($b = 0$)?
- b) O parâmetro de impacto b correspondente a um ângulo de espalhamento de 30° , no caso de partículas α de energia cinética 4,0 MeV incidindo em uma folha de Au ($Z = 79$) (ver figura).

Solução:

a) Nesse caso, a expressão para D pode ser obtida pela conservação da energia da partícula, igualando-se a energia cinética da partícula longe do núcleo ao valor da energia potencial Coloumbiana na posição de menor aproximação D .

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{D} \Rightarrow D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{\frac{Mv^2}{2}}$$

b) Para $K_\alpha = 4,0$ MeV, $z = 2$ e $Z = 79$, $D = 5,69 \times 10^{-14}$ m.

A partir da equação da trajetória, $\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \sin\varphi + \frac{D}{2b^2} (\cos\varphi - 1)$ e usando,

$r \rightarrow \infty$, $\sin\varphi = \sin(\pi - \theta)$ pode mostrar que $\cot \frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D}$. Substituindo-se os valores, encontra-se $b = 1,06 \times 10^{-13}$ m ou $0,00106$ Å.

!!Outras aproximações quando corretas serão consideradas!!

2) a) Enuncie os dois postulados pertinentes de Bohr e calcule (o valor em Å) do chamado raio de Bohr (a_0) para um elétron no estado fundamental do átomo de hidrogênio.

b) Obtenha a razão entre a faixa de frequência de emissão da série de Lyman ($n_f = 1$) para um átomo de Hidrogênio e a faixa de frequência de emissão de uma série Paschen ($n_f = 3$) para um positrônio (átomo composto por um elétron e um pósitron).

Solução:

a) Os dois postulados de Bohr relevantes para estes cálculos são:

1) Um elétron em um átomo se move em órbitas circulares em torno do núcleo sob a influência da atração Coulombiana entre o elétron e o núcleo, obedecendo às leis da Mecânica Clássica.

2) As únicas órbitas possíveis para o elétron são aquelas na qual seu momento angular é um múltiplo inteiro de $h/2\pi$.

A partir destes postulados:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} \quad (1) \qquad mvr = n\hbar \quad (2)$$

De (2) temos: $v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2}$ (3) E levando em (1): $\frac{n^2\hbar^2}{mr} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow r = a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0}{Zme^2} n^2\hbar^2$

E para estado fundamental do átomo de hidrogênio $Z = 1$ e $n = 1$, $a_0 = 0,53 \text{ \AA}$

!!Outras aproximações quando corretas serão consideradas!!

b) Como para átomos de um elétron $E = \frac{-\mu Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$, a frequência de emissão para as linhas da série de Lyman ($n_f = 1$) para um átomo de Hidrogênio é dada por:

$v = \frac{1}{h}(E_i - E_f) = \frac{\mu Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2 h} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) = C\mu Z^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, assim a faixa de frequência de emissão será:

$$\Delta v_H = v_\infty - v_{n+1} = C\mu Z^2 \left(1 - 1 + \frac{1}{2^2}\right) = \frac{C\mu Z^2}{4} \quad \text{para o hidrogênio } Z = 1 \text{ e } \mu \approx m_e \text{ e}$$

$$\Delta v = \frac{Cm_e}{4}.$$

De forma similar, para a frequência de emissão para as linhas da série de Paschen ($n_f = 3$) para um positrônio:

$$v = \frac{\mu Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2 h} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \Delta v = v_\infty - v_{n+1} = C\mu Z^2 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) = \frac{C\mu Z^2}{16} \text{ e}$$

para o positrônio $Z = 1$ e $\mu \approx \frac{m_e}{2}$. $\Delta v_p = \frac{Cm_e Z^2}{32}$. Assim: $\frac{\Delta v_H}{\Delta v_p} = 8$

3. Dada a seguinte função de onda do átomo de Hidrogênio, calcule o que se pede.

$$\Psi_{200}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0}$$

- a) A energia cinética média $\langle K \rangle$ de um elétron nesse estado?
 b) A valor da incerteza Δr para a coordenada radial da partícula nesse estado?

Solução:

a) A energia total deste estado é dada por : $E = K + V$. Assim: $K = E - V$ e $\langle K \rangle = \langle E \rangle - \langle V \rangle = E_n - \langle V \rangle$. Mas:

$$\langle V_{200} \rangle = \int_0^\infty \Psi_{200}^* V(r) \Psi_{200} 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty \frac{1}{32\pi} \left(\frac{1}{a_0}\right)^3 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}\right) e^{-r/a_0} 4\pi r^2 dr$$

Esta integral envolve termos de $r^n e^{-r/a_0}$, e usando $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ encontra-se:

$$\langle V_{200} \rangle = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{4a_0} \text{ que é igual ao valor do potencial para } r = n^2 a_0 \text{ que é o raio de Bohr}$$

para camada 2. Assim: $\langle K \rangle = E_n + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{4a_0}$

$$\langle K \rangle = \frac{-\mu e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{4a_0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{8a_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{4a_0} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{8a_0} = -\frac{\langle V_{200} \rangle}{2} = -E}$$

de acordo com o Teorema do virial.

!!O uso direto do Teorema do virial sem justificar ou demonstrar será parcialmente pontuado!!

b) A incerteza em r e dada por $\Delta r^2 = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2$. Mas, $\langle r_{nl} \rangle = \frac{n^2 a_0}{Z} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{l(l+1)}{n^2} \right] \right\}$ e

logo: $\langle r_{20} \rangle = \frac{2^2 a_0}{1} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \right\} = 6a_0$ Calculando $\langle r^2 \rangle$: $\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{1}{32\pi} \left(\frac{1}{a_0}\right)^3 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 r^2 e^{-r/a_0} 4\pi r^2 dr$

Novamente, a integral envolve termos de $r^n e^{-r/a_0}$, e usando $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ encontra-se:

$$\langle r^2 \rangle = 42a_0^2$$

$$\text{Assim: } \Delta r^2 = 42a_0^2 - 36a_0^2 \Rightarrow \boxed{\Delta r = \sqrt{6}a_0}$$

4) a) Em um dado experimento espectroscópico são estudados elétrons da camada $n = 3$ do átomo de hidrogênio. Quais são os possíveis valores da Energia total E (em eV), do momento angular orbital L e da componente z do momento angular orbital L_z para um elétron dessa camada.

b) Dada a seguinte função de onda do átomo de Hidrogênio, calcule os valores médios $\langle L_x \rangle$ e $\langle L_x^2 + L_y^2 \rangle$:

$$\Psi_{210}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \cos \theta$$

Solução:

a) A energia total para todos os estados desta camada tem um único valor:

$$E = -13,6 \text{ eV} \frac{1}{n^2} = \frac{-13,6}{3^2} = -1,51 \text{ eV}$$

Os possíveis valores de ℓ para os estados com $n = 3$ são $\ell = 0, 1, 2$. Logo os possíveis valores de L são:

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = 0, \sqrt{2}\hbar, \sqrt{6}\hbar$$

Os possíveis valores de m_ℓ para cada ℓ , variam de $-\ell$ a ℓ . Logo os possíveis valores de L_z são:

$L_z = 0$ para $\ell = 0$; $L_z = -\hbar, 0$ e \hbar para $\ell = 1$ e $L_z = -2\hbar, -\hbar, 0$ e \hbar e $2\hbar$ para $\ell = 2$, num total de 9 estados.

$$\text{b) } \langle L_x \rangle = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Psi_{210}^* \hat{L}_x \Psi_{210} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$\langle L_x \rangle = \frac{1}{32\pi} \frac{1}{a_0^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \cos \theta i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \cos \theta (r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi)$$

$$\langle L_x \rangle = \frac{1}{32\pi} \frac{1}{a_0^3} \int_0^\infty \frac{r^4}{a_0^2} e^{-r/a_0} dr i\hbar \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \varphi (-\sin \theta) (\sin \theta d\theta d\phi)$$

$$\langle L_x \rangle = \frac{i\hbar}{32\pi} \frac{1}{a_0^3} \int_0^\infty \frac{r^4}{a_0^2} e^{-r/a_0} dr \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} (-\sin \varphi) d\varphi = 0,$$

b) Usando $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ temos $L_x^2 + L_y^2 = L^2 - L_z^2$ e $\langle L_x^2 + L_y^2 \rangle = \langle L^2 \rangle - \langle L_z^2 \rangle$

Assim, para o estado Ψ_{210} , $l=1$ e $m_l=0$, logo $\langle L^2 \rangle = 2\hbar^2$ e $\langle L_z^2 \rangle = \langle L_z \rangle^2 = 0$ e:

$$\langle L_x^2 + L_y^2 \rangle = 2\hbar^2$$