Exercícios Extras - Cap. 3 e 5, 6 (Eisberg and Resnick)

1. Considere a função de onda do primeiro estado excitado do oscilador harmônico ($n = 1$)

$$\Psi_1(x,t) = A_1 x e^{-\alpha x^2/2} e^{-3i\omega t/2}. \tag{1}$$

onde as constantes são dadas mais abaixo.
(a) Calcule $\hat{p}_x \psi_1(x)$ e $\hat{p}_x^2 \psi_1(x)$.
(b) Calcule $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p_x \rangle$ e $\langle p_x^2 \rangle$.
(c) Calcule as incertezas Δx e Δp_x e o produto $\Delta x \Delta p_x$.
Conselho: Faça todos os cálculos usando a forma (1), ***sem inserir os valores de*** A_1 ***e*** α*. Só insira os valores das constantes no final.*
Fórmulas úteis:

$$\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
\alpha &= \frac{(mk)^{1/2}}{\hbar}, \\
A_1 &= \frac{1}{\sqrt{I_2}}, \\
I_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \\
I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \\
I_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{4\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

2. Considere o potencial

$$V(x) = -\alpha\delta(x),$$

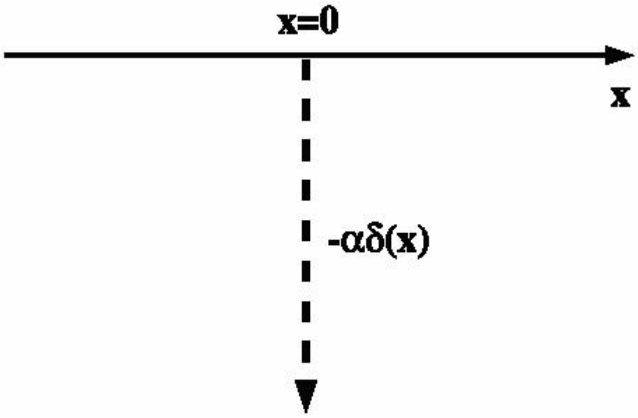
onde $\delta(x)$ é a função delta da Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

e $\alpha > 0$ é uma constante. Nesse caso, a função de onda é contínua em $x = 0$, **mas sua primeira derivada é descontínua** (lembre-se que a primeira derivada só é contínua se o potencial é finito). Pode-se mostrar que a descontinuidade da primeira derivada $\psi'(x)$ em $x = 0$ é dada por

$$\psi'\left(x \to 0^+\right) - \psi'\left(x \to 0^-\right) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0).$$

Calcule a auto-função do único estado ligado desse potencial e sua energia correspondente. Não precisa normalizar a auto-função.



3. Use a função de onda de uma partícula numa caixa (poço infinito) do Exemplo 5-9

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} A\cos\frac{\pi x}{a}e^{-iEt/\hbar} & -a/2 < x < +a/2 \\ 0 & x \leq -a/2 \text{ or } x \geq +a/2 \end{cases},$$

com o valor de A determinado no Exemplo 5-10

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}},$$

para calcular a probabilidade da partícula ser encontrada a uma distância de $a/3$ da extremidade direita da caixa de largura a. A partícula está em seu estado de menor energia. (b) Compare com a probabilidade que seria prevista classicamente a partir de um cálculo bem simples relacionado com aquele do Exemplo 5-6 (exemplo do cálculo da probabilidade clássica para um oscilador harmônico com energia E).

Fórmula:

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right).$$

4. Considere um cristal cujos átomos estão arranjados numa rede cúbica, cada átomo distando de 0.91 A de seu vizinho mais próximo. Examine as condições de Bragg para planos que contenham átomos posicionados ao longo das diagonais do cubo. (a) Encontre os elétrons de maior comprimento de onda capazes de produzir máximos de primeira ordem ($n = 1$). (b) Se elétrons de 300 eV são usados, com qual ângulo **com respeito à normal à superfície do cristal** (atenção para essa definição de ângulo) eles devem incidir para que produzam um máximo de primeira ordem?