# F 315 B    Mecânica Geral I

Prof. Antonio Vidiella Barranco

Departamento de Eletrônica Quântica (Prédio A-6) S218

Fone: (19) 3521-5442

vidiella@ifi.unicamp.br ou vidiella@unicamp.br

http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella

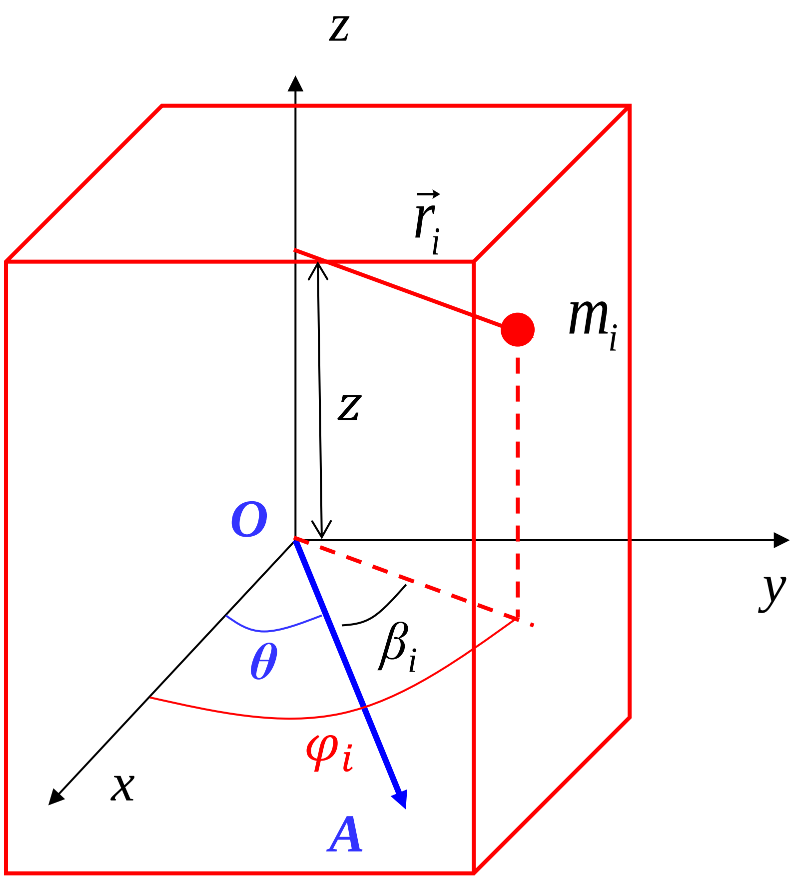
Google Classroom: opwan6e

Videoaulas no canal “Antonio Vidiella” do YouTube

Atendimentos de monitoria:
Ver Programa da Disciplina no Material do Google Classroom

# Dinâmica de um corpo rígido: rotação em torno de z

Coordenadas cilíndricas




Momento Angular (componente z)

$$L_z = \sum_i m_i r_i^{\,2} \dot{\varphi}_i = \sum_i m_i r_i^{\,2} \dot{\theta}$$

Momento de inércia em relação a z

$$I_z = \sum_i m_i r_i^{\,2}$$

# Rotação de um corpo rígido em torno do eixo z

| Movimento em 1D | Rotação em torno de z |
|---|---|
| Posição $x$ | Posição angular $\theta$ |
| Velocidade $v = \dot{x}$ | Velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$ |
| Aceleração $a = \ddot{x}$ | Aceleração angular $\alpha = \ddot{\theta}$ |
| Força $F$ | Torque $\tau_z$ |
| Massa $m$ | Momento de Inércia $I_z$ |
| Momento linear $p = m\dot{x}$ | Momento angular $L_z = I_z\dot{\theta}$ |
| 2ª Lei $\dfrac{dp}{dt} = m\ddot{x} = F$ | $\dfrac{dL_z}{dt} = I_z\ddot{\theta} = \tau_z$ |
| Energia cinética $T = mv^2/2$ | Energia cinética $T = I_z\omega^2/2$ |

# Dinâmica: casos típicos

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \tau_z$$

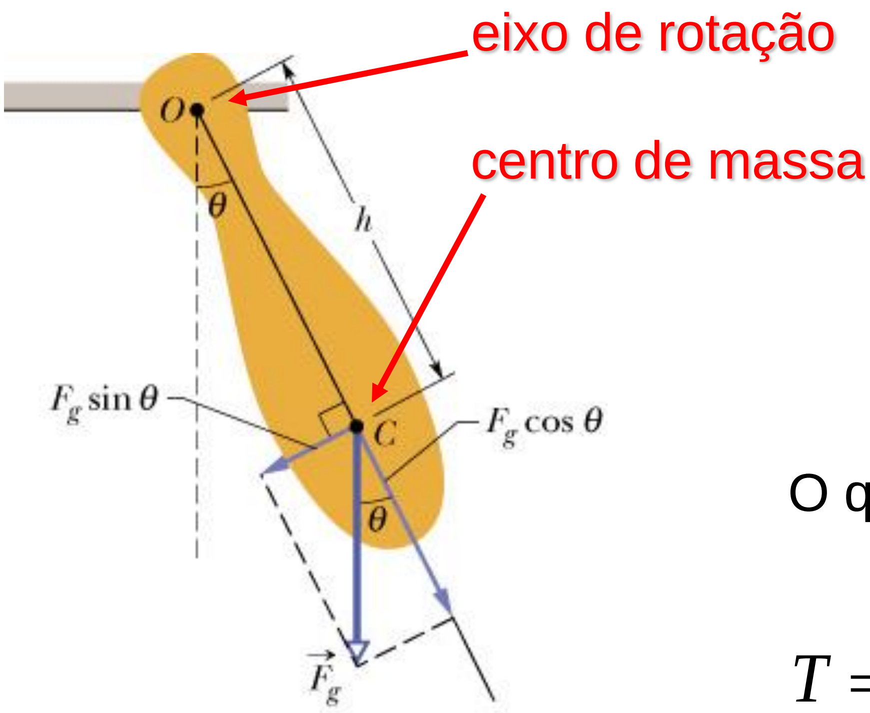
Torque externo nulo: $\tau_z = 0$ $\Rightarrow$ $\omega(t) = \omega_0$

Torque dissipativo: $\tau_z = -b\dot{\theta}$ $\Rightarrow$ $\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{b}{I_z}t}$

Torque elástico: $\tau_z = -\kappa\theta$ $\Rightarrow$ $\omega(t) = \omega_m \cos(\Omega t + \varphi)$

$$\Omega = \sqrt{\kappa / I_z}$$

# Pêndulo composto (físico)




$$\operatorname{sen}\theta \approx \theta$$

para pequenas oscilações

$$I_z\ddot{\theta} \approx -Mgh\,\theta$$

O que resulta num período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{Mgh}}$$

# Distribuições contínuas de massa – 3D

Massa total de um corpo: $M = \iiint \rho \, dV$

Centro de massa: $\vec{R} = \dfrac{\iiint \rho \, \vec{r}\,' dV}{M}$

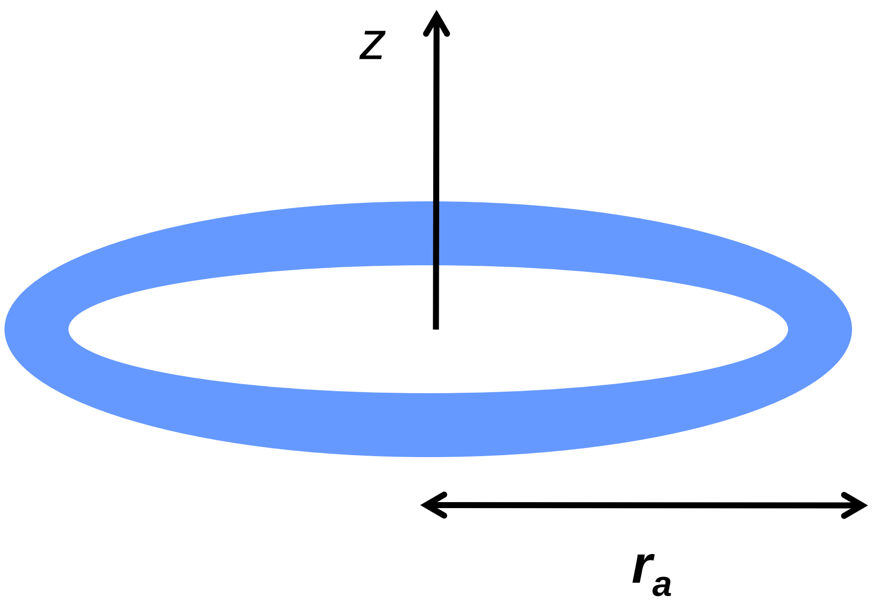
Obs: $\vec{r}\,'$ é o vetor posição do elemento infinitesimal de massa

Momento de inércia em relação a z: $I_z = \iiint \rho \, r^2 dV$

Obs: r é a distância do eixo z ao elemento infinitesimal de massa

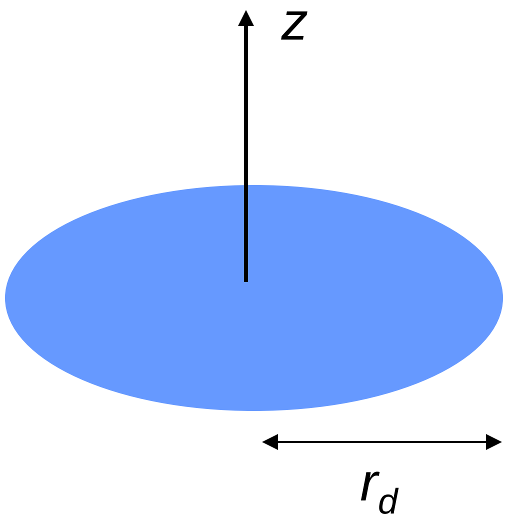
# Problemas

2) Calcular o momento de inércia de um anel circular homogêneo fino de raio $\boldsymbol{r_a}$ e massa total $\boldsymbol{m_a}$ em relação ao eixo z, que passa pelo centro do anel, perpendicularmente ao mesmo.



# Problemas

3) Calcular o momento de inércia de um disco circular homogêneo fino de raio $\boldsymbol{r_d}$ e massa total $\boldsymbol{m_d}$ em relação ao eixo z, que passa pelo centro do disco, perpendicularmente ao mesmo. Obs: considere o disco como um conjunto de anéis finos concêntricos.



# Problema

4) Calcular o momento de inércia de uma esfera homogênea de raio $\boldsymbol{r_e}$ e massa total $\boldsymbol{m_e}$, em relação ao eixo z, que passa pelo centro da esfera. Obs: considere a esfera como um conjunto de cilindros finos concêntricos empilhados.

# Teoremas

**Teorema 1:**
Se um corpo for simétrico em relação a um plano, o seu centro de massa estará neste plano.

**Teorema 2**:
Se um corpo for composto de duas ou mais partes com centros de massa conhecidos, o centro de massa do corpo composto poderá ser calculado considerando suas partes componentes como partículas localizadas nos centros de massa respectivos.

# Teoremas

## Teorema dos eixos paralelos

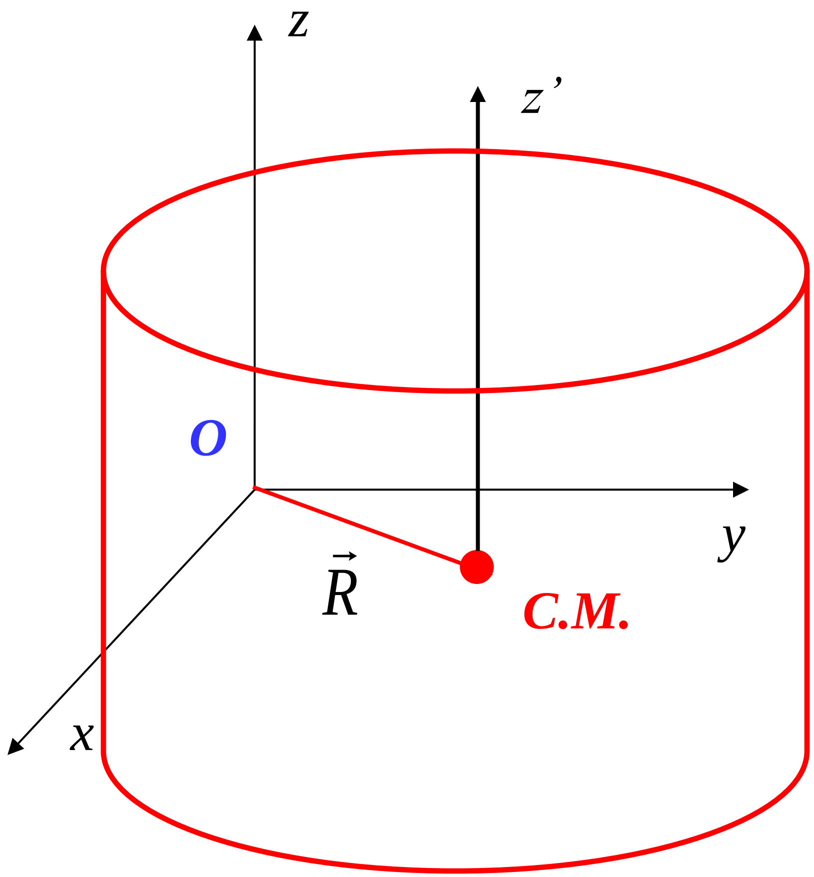
*“O momento de inércia de um corpo em relação a um eixo dado, é igual ao momento de inércia em relação ao eixo paralelo que passa pelo centro de massa mais o momento de inércia em relação ao eixo dado, de uma partícula com a massa total do corpo localizada no seu centro de massa”.*

## Teorema dos eixos perpendiculares

*“A soma dos momentos de inércia de uma lâmina plana em relação a dois eixos perpendiculares, no plano da lâmina, é igual ao momento de inércia em relação a um eixo que passa pela interseção e é perpendicular à lâmina”.*

# Momento de Inércia

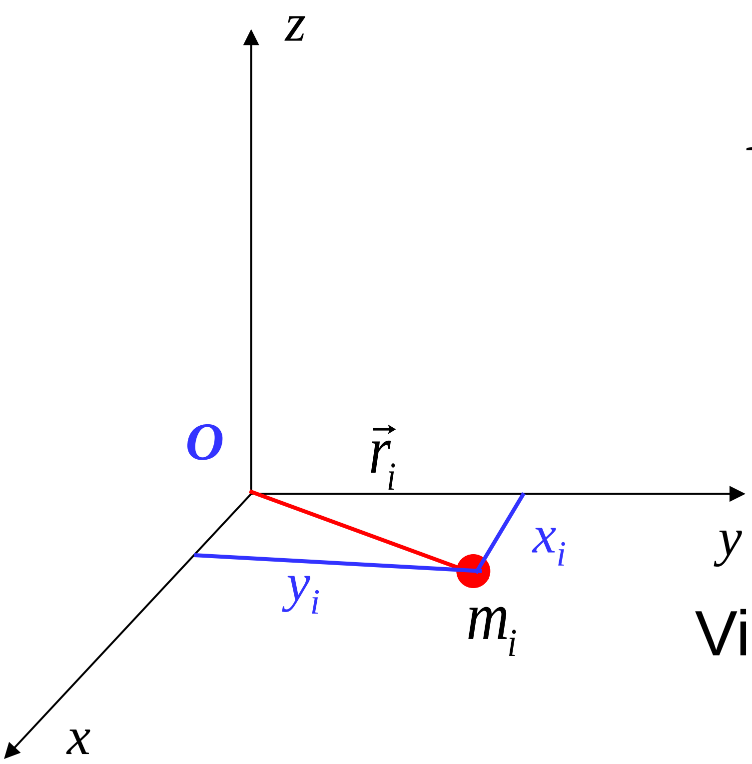
Teorema dos eixos paralelos




$$I_z = I_{z'} + MR^2$$

# Momento de Inércia

## Teorema dos eixos perpendiculares




$$I_z = \sum_i m_i r_i^{\,2} = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

Notar que aqui $r_i$ denota a distância da partícula de massa $m_i$ ao eixo $z$

Visto que $I_x = \sum_i m_i y_i^2$ e $I_y = \sum_i m_i x_i^2$

Obtemos $$I_z = I_y + I_x$$