Propagação de sinais em condutores com a eletrodinâmica de Weber e comparação com o eletromagnetismo clássico

J. A. Hernandes* e A. K. T. Assis†

Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas
13083-970, Campinas, São Paulo, Brasil

Trabalho publicado nos anais do *XXI Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos*. Ver também
`http://www.sbf1.if.usp.br/eventos/enfpc/xxi/procs/res89/`

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre a equação da telegrafia, pioneiramente obtida por Kirchhoff e Weber. Seguimos o procedimento adotado por Kirchhoff para derivar esta equação. Consideramos casos não tratados na literatura. Concluímos que a teoria de Weber leva à equação da telegrafia.

1 Introdução

Kirchhoff e Weber foram os primeiros a derivar a equação da telegrafia levando em conta a capacitância, a auto-indutância e a resistência do fio, em 1857, [Whi73, págs. 230–232]. Kirchhoff mostrou que um sinal elétrico em um fio sem resistência se propaga à velocidade da luz, [Kir57] e [GA94]. O trabalho de Weber só foi publicado em 1864. Ambos consideraram a propagação em fios condutores (de comprimento ℓ) de seção reta circular (de raio a, tal que $\ell \gg a$).

Ambos utilizaram a força eletrodinâmica de Weber para chegar à equação que rege o comportamento das cargas na propagação de um sinal. A forma clássica da equação da telegrafia utiliza a teoria eletromagnética de Maxwell.

*E-mail: `julioher@ifi.unicamp.br`

†E-mail: `assis@ifi.unicamp.br`; homepage: `http://www.ifi.unicamp.br/~assis`

Ela foi, nessa forma, primeiramente obtida por Heaviside em 1876, [Whi73, págs. 228–229] e é dada por:

$$\frac{\partial^2 j}{\partial z^2} - \frac{LC}{\ell^2}\frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = \frac{RC}{\ell^2}\frac{\partial j}{\partial t}, \tag{1}$$

onde j é a densidade de corrente, sendo L, C e R a auto-indutância, capacitância e resistência totais do circuito.

Neste trabalho, seguimos a abordagem de Kirchhoff. As fontes de carga que exercem força na carga-teste q_1 podem ser divididas em três: as cargas superficiais livres $\sigma_f(z,t)$ no fio, responsáveis pelo campo elétrico dentro e fora do fio, e mantidas pela fonte de energia elétrica; as cargas positivas paradas dq_{2+} (dadas por uma densidade volumétrica ρ_{2+} ou superficial σ_{2+}), que constituem o corpo do condutor; e as cargas negativas dq_{2-} (densidade volumétrica ρ_{2-} ou superficial σ_{2-}) que constituem a corrente de condução.

Consideramos como primeira aproximação que as densidades positivas de carga volumétrica ρ_{2+} (ou superficial σ_{2+}, no caso de termos uma corrente superficial) se anulam com as cargas negativas ρ_{2-} (ou σ_{2-}):

$$\rho_{2-} = -\rho_{2+}, \qquad \text{ou} \qquad \sigma_{2-} = -\sigma_{2+}. \tag{2}$$

Além disso, podemos considerá-las essencialmente constantes ao longo do condutor, de tal modo que não dependem nem do tempo t nem da posição $\vec{r}$.

2 Forças

Consideraremos as forças elétricas atuantes segundo a expressão dada pela teoria eletrodinâmica de Weber, [Ass94]. Por esta teoria, a força que um elemento de carga dq_2 (de posição $\vec{r}_2$, velocidade $\vec{v}_2$ e aceleração $\vec{a}_2$ em relação a um referencial inercial S), exerce na carga-teste q_1 (de posição $\vec{r}_1$, velocidade $\vec{v}_1$ e aceleração $\vec{a}_1$ no mesmo referencial inercial S) é dado por:

$$d\vec{F}_{21} = \frac{q_1 dq_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left[\vec{v}_{12}\cdot\vec{v}_{12} - \frac{3}{2}\left(\hat{r}_{12}\cdot\vec{v}_{12}\right)^2 + \vec{r}_{12}\cdot\vec{a}_{12}\right]\right\}. \tag{3}$$

Aqui $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$, ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo, μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo, e estão envolvidas as grandezas relativas $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ e $\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$.

De acordo com nossa suposição da neutralidade no interior do condutor, a parte coulombiana das forças devidas a ρ_{2+} e ρ_{2-} se anulam. Além disso, mostraremos mais para a frente que a magnitude das cargas superficiais é muito menor que a das cargas que constituem o condutor. Por este motivo desprezamos os efeitos devidos ao movimento destas cargas superficiais.

Vamos tratar aqui apenas de condutores retilíneos longos nos quais as densidades de carga, velocidades e acelerações dependem apenas da componente longitudinal z e do tempo t. O potencial devido às cargas superficiais livres σ_f e a força eletrostática na carga-teste q_1 são dadas respectivamente por:

$$\phi(\vec{r}_1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\int_{S_f} \frac{\sigma_f(z_2, t) dA_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \qquad \vec{F}_\phi(\vec{r}_1, t) = -q_1 \nabla_1 \phi, \tag{4}$$

onde S_f é a superfície lateral do condutor e dA_2 é um elemento de área.

Estamos interessados apenas na componente longitudinal das forças para tratar a propagação de sinais. Kirchhoff introduziu uma aproximação neste ponto, [Kir57]. A idéia principal é que, na integral acima para o potencial, o denominador $u = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ se torna da ordem do comprimento do condutor, ℓ, quando z_2 está longe de z_1 ($|z_1 - z_2| \gg a$). Já para $z_2 \approx z_1$, o denominador é da ordem do raio a. Como estamos supondo $\ell \gg a$, o integrando se torna muito pequeno, exceto para $\vec{r}_2 \approx \vec{r}_1$. Isto nos permite remover $\sigma_f(z_2, t)$ do integrando, tomando seu valor em $z_2 = z_1$:

$$\phi(\vec{r}_1, t) = \frac{\sigma_f(z_1, t)}{4\pi\epsilon_0} \int\int_{S_f} \frac{dA_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \tag{5}$$

Da mesma forma, a componente longitudinal da soma das forças exercidas pelas cargas que constituem o condutor resulta, por (3) e desprezando os termos de ordem v^2/c^2 supondo $v^2 \ll c^2$:

$$\begin{aligned} F_{W,z}(\vec{r}_1, t) &= \frac{\mu_0 q_1 \rho_{2-}}{4\pi} \int\int\int_{V_2} \frac{\hat{r}_{12} \cdot \hat{z}}{r_{12}} \hat{r}_{12} \cdot \vec{a}_{2-}(z_2, t) dV_2 \\ &\approx \frac{\mu_0 q_1 \rho_{2-}}{4\pi} a_{2-}(\vec{r}_1, t) \int\int\int_{V_2} \frac{(\hat{r}_{12} \cdot \hat{z})^2}{r_{12}} dV_2, \end{aligned} \tag{6}$$

onde na última passagem utilizamos novamente a aproximação de Kirchhoff para tirar $\vec{a}_{2-} = a_{2-}\hat{z}$ do integrando, e dV_2 é um elemento de volume.

3 Equação da telegrafia

Fazemos com que a carga-teste seja um dos elétrons de condução, $q_1 = -e$. Devemos incluir também uma força de atrito ôhmica:

$$\vec{F}_R = -b\vec{v}_1, \tag{7}$$

onde b é uma constante que depende da constituição do condutor. Neste ponto, consideramos uma estimativa do efeito gerado pela movimentação da carga superficial na carga-teste. Podemos imaginar que ela se move junto com os elétrons de condução. Neste caso, obteríamos essencialmente a Equação (6) ao invés de (5). A densidade de carga dos elétrons de condução em um metal é tipicamente $|\rho_c| = 10^{10} C/m^3$. Podemos tomar como exemplo um cabo coaxial de raio interno a e externo b, de condutividade g. A densidade de carga na superfície interior, σ_f^a, quando uma corrente i flui é uma função linear da coordenada longitudinal [Hea84], e é dada por ([Som64, págs. 125–130]): $\sigma_f^a = -\epsilon_0 I z / \pi g a^3 \ln(b/a)$.

Para um fio de cobre com $a = 1mm$, $b = 2mm$, conduzindo uma corrente de $100A$ a densidade de carga a uma distância de $100m$ é $\sigma_f^a = 10^{-7}C/m^2$. Temos então que $\sigma_f^a = 10^{-7}C/m^2 \ll a\rho_{c-}/2 = 10^7 C/m^2$. Com isto podemos desprezar o efeito do movimento das cargas superficiais na propagação de sinais.

Aplicamos a segunda lei de Newton para o elétron (na componente longitudinal que nos interessa aqui):

$$F_{\phi,z} + F_{W,z} + F_R = m_e a_{2-}, \tag{8}$$

onde m_e é a massa do elétron. Desprezamos o termo que envolve a massa no lado direito de (8) comparado com o termo $F_{W,z}$ de (6), [Ass97]. Disto resultam duas incógnitas na equação acima: σ_f e v_{2-} (ou $a_{2-} = \partial v_{2-}/\partial t$). Para relacioná-las, utilizamos a equação de conservação de cargas: $\nabla \cdot \vec{j} = -\partial \rho_f/\partial t$, nas formas:

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -2\pi a \frac{\partial \sigma_f}{\partial t}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial k}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_f}{\partial t}. \tag{9}$$

Aqui i é a corrente elétrica total e k é a densidade de corrente superficial. A equação da telegrafia obtida depende da geometria do problema.

Os casos de um fio cilíndrico cheio e oco, assim como o caso de um cabo coaxial, foram discutidos em [Ass00]. Apresentamos aqui casos novos obtidos através da eletrodinâmica de Weber.

4 Casos novos

Consideramos dois casos novos utilizando o tratamento geral apresentado.

4.1 Caso 1: duas placas paralelas

Sejam duas placas paralelas, de dimensões ℓ_x e ℓ_z, nos eixos x e z, sem espessura, separadas no eixo y por uma distância a. Existe um sinal elétrico caminhando no eixo z. Vale a aproximação $\ell_z \gg \ell_x \gg a$.

A equação da telegrafia que obtivemos integrando as Equações (5) e (6) para esta geometria, e utilizando (4), (7) a (9) é:

$$\frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial t^2} = \frac{\epsilon_0 R}{a\ell_z/\ell_x}\frac{\partial \sigma_f}{\partial t}. \tag{10}$$

Esta equação concorda com (1) substituindo a auto-indutância e a capacitância totais do sistema, dadas por:

$$L = \mu_0 \frac{a\ell_z}{\ell_x}, \qquad C = \epsilon_0 \frac{\ell_x \ell_z}{a}. \tag{11}$$

4.2 Caso 2: dois fios paralelos

Apresentamos o resultado da derivação da equação da telegrafia para o problema de duas cascas cilíndricas de comprimento ℓ e raio a, separadas por uma distância d entre seus eixos. Esta situação é conhecida como linha de transmissão. Utilizando o mesmo procedimento anterior, obtivemos para esta geometria a seguinte equação na aproximação $\ell \gg d \gg a$:

$$\frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \sigma_f}{\partial t^2} = \frac{\pi \epsilon_0 R}{\ell \ln(d/a)}\frac{\partial \sigma_f}{\partial t}. \tag{12}$$

Esta equação também concorda com (1), pois a auto-indutância e a capacitância para esta geometria são dadas por:

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{\pi}\ln\frac{d}{a}, \qquad C = \frac{\pi\epsilon_0\ell}{\ln(d/a)}. \tag{13}$$

5 Conclusões

Podemos concluir que a abordagem utilizada por Kirchhoff e por Weber leva corretamente à equação da telegrafia. Esta abordagem utiliza como fundamental a força de Weber como interação entre cargas, juntamente com a segunda lei de Newton e com a equação de conservação de cargas. Isto é, os dois formalismos levam à Equação (1) nos casos investigados.

Agradecimentos

Um dos autores (J. A. Hernandes) gostaria de agradecer à CNPq pelo auxílio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

Referências

[Ass94] A. K. T. Assis. *Weber's Electrodynamics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[Ass97] A. K. T. Assis. Circuit theory in Weber electrodynamics. *European Journal of Physics*, 18:241–246, 1997.

[Ass00] A. K. T. Assis. On the propagation of electromagnetic signals in wires and coaxial cables according to Weber's electrodynamics. *Foundations of Physics*, 30:1107–1121, 2000.

[GA94] P. Graneau and A. K. T. Assis. Kirchhoff on the motion of electricity in conductors. *Apeiron*, 19:19–25, 1994.

[Hea84] M. A. Heald. Electric fields and charges in elementary circuits. *American Journal of Physics*, 52:522–526, 1984.

[Kir57] G. Kirchhoff. On the motion of electricity in wires. *Philosophical Magazine*, 13:393–412, 1857.

[Som64] A. Sommerfeld. *Electrodynamics*. Academic Press, New York, 1964.

[Whi73] E. Whittaker. *A History of the Theories of Aether and Electricity*, volume 1: The Classical Theories. Humanities Press, New York, 1973.