SOBRE OS CORPOS FLUTUANTES, TRADUÇÃO COMENTADA DE UM TEXTO DE ARQUIMEDES

ANDRÉ KOCH TORRES ASSIS

RESUMO - Esta é uma tradução do tratado de Arquimedes intitulado Sobre os Corpos Flutuantes. *Neste trabalho Arquimedes apresenta o princípio fundamental da hidrostática.*

ABSTRACT - This is a translation of Archimedes work entitled On floating bodies. *In this work Archimedes presents the fundamental principles of hydrostatics.*

1 Introdução

Esta é uma tradução do primeiro livro do tratado de Arquimedes (287-212 a. C.) intitulado *Sobre os Corpos Flutuantes*. Neste trabalho Arquimedes apresenta o princípio fundamental da hidrostática. Esta tradução é feita a partir da tradução em inglês dos trabalhos de Arquimedes feita por T. L. Heath: (*Arquimedes*, 1912 e 1952). As notas entre colchetes na tradução são de Heath (algumas incluídas aqui aparecem em (*Arquimedes*, 1912), mas não em (*Arquimedes*, 1952)). Não tenho conhecimento de qualquer trabalho de Arquimedes traduzido e publicado em português.

Sua descoberta do princípio fundamental da hidrostática foi descrita nos seguintes termos por Vitrúvio em seu trabalho *De Architectura* (citado em Mach, 1960, p. 107-108):

> "Embora Arquimedes tenha descoberto muitas coisas curiosas que demonstram grande inteligência, aquela que vou mencionar é a mais extraordinária. Quando obteve o poder real em Siracusa, Hiero mandou, devido a afortunada mudança em sua situação, que uma coroa votiva de ouro fosse colocada em um certo templo para os deuses imortais, que fosse feita de grande valor, e designou para este fim um peso apropriado do metal para o fabricante. Este, em tempo devido, apresentou o trabalho ao rei, lindamente forjado; e o peso parecia corresponder com aquele do ouro que havia sido designado para isto. Mas ao circular um rumor de que parte do ouro havia sido retirada, e que a quantidade que faltava havia sido completada com prata, Hiero ficou indignado com a fraude e, sem saber o método pelo qual o roubo poderia ser detectado, solicitou que Arquimedes desse sua atenção ao problema. Encarregado deste assunto, ele foi por acaso a um banho, e ao entrar na banheira percebeu que na mesma proporção em que seu corpo afundava, saía água do recipiente. De onde, compreendendo o método a ser adotado para a solução da proposição, ele o perseguiu persistentemente no mesmo instante, saiu alegre do banho e, retornando nú para casa, gritou em voz alta que havia encontrado o que estava procurando, pois continuou exclamando, em grego, ευρηχα , ευρηχα [eureca, eureca] (encontrei, encontrei!)"

Para referências e uma discussão sobre este trabalho de Arquimedes ver: (Heath, 1912, p. xv-xxii), (Dijksterhuis, 1956, p. 373-398), (Mach, 1960, p. 106-130), (Boyer, 1974, p. 91), (Lucie, 1986). A maneira proposta por Galileo para resolver o problema da coroa já se encontra traduzida para o português: (Galileo, 1986). Após Arquimedes um dos grandes desenvolvimentos que ocorre na hidrostática aparece com os trabalhos de Pascal, que também já se encontram traduzidos para o português: (Pascal, 1989). Ver também o importante artigo de Martins discutindo os antecedentes ao trabalho de Pascal: (Martins, 1989).

Deve-se observar que nas Proposições 4 a 7, quando Arquimedes afirma que um sólido é mais leve ou mais pesado do que um fluido, ele está se referindo ao peso relativo ou específico, isto é, se o sólido é menos ou mais denso do que o fluido.

Após esta introdução apresentamos a tradução.

2 Tradução

SOBRE OS CORPOS FLUTUANTES

Postulado 1

Vai-se supor que um fluido tem tal propriedade que, suas partes estando situadas uniformemente e sendo contínuas, aquela parte que é menos pressionada é impelida pela parte que é mais pressionada; e que cada uma de suas partes é pressionada pelo fluido que está acima dela numa direção perpendicular se o fluido for afundado em qualquer coisa e comprimido por qualquer outra coisa.

Proposição 1

Se uma superfície for cortada por um plano que sempre passa através de um certo ponto, e se a seção for sempre uma circunferência [de um círculo] cujo centro é este ponto, a superfície será a de uma esfera.

Pois, caso não seja, haverão duas linhas estendendo-se do ponto até a superfície que não serão iguais.

Suponha que O seja o ponto fixo, e que A e B sejam dois pontos sobre a superfície tal que OA e OB sejam diferentes. Cortamos a superfície por um plano passando por OA e OB. Então, pela hipótese, a seção é um círculo cujo centro é O.

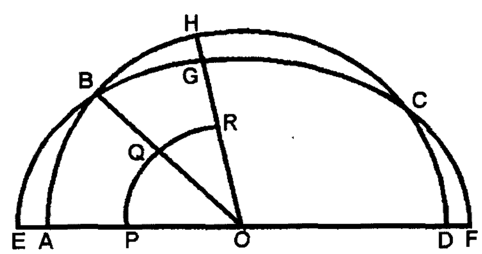
Assim OA = OB; o que é contrário a suposição [inicial]. Portanto a superfície só pode ser uma esfera.

Proposição 2

A superfície de qualquer fluido em repouso é a superfície de uma esfera cujo centro é o mesmo centro que aquele da terra.

Suponha a superfície do fluido cortada por um plano através de O, o centro da terra, na curva ABCD.

Então ABCD será a circunferência de um círculo.



Pois, caso não seja, algumas das linhas estendendo-se de O até a curva serão desiguais. Tome uma delas, OB, tal que OB seja maior do que algumas estendendo-se de O até a curva e menor do que outras. Desenhe um círculo tendo OB como raio. Seja ele EBF, que portanto estará parcialmente dentro e parcialmente fora da superfície do fluido.

Desenhe OGH fazendo com OB um ângulo igual ao ângulo EOB, encontrando-se com a superfície [do fluido] em H e com o círculo em G. Desenhe também no plano um arco de círculo PQR com centro O e dentro do fluido.

Então as partes do fluido ao longo de PQR são uniformes e contínuas, e a parte PQ é comprimida pela parte entre ela e AB, enquanto que a parte QR é comprimida pela parte entre QR e BH. Portanto, as partes ao longo de PQ e QR serão comprimidas desigualmente, e a parte que é menos comprimida será colocada em movimento por aquela parte que é mais comprimida.

Portanto não haverá repouso; o que é contrário a hipótese.

Portanto a seção da superfície será a circunferência de um círculo cujo centro é O; e assim serão todas as outras seções [cortadas] por planos através de O.

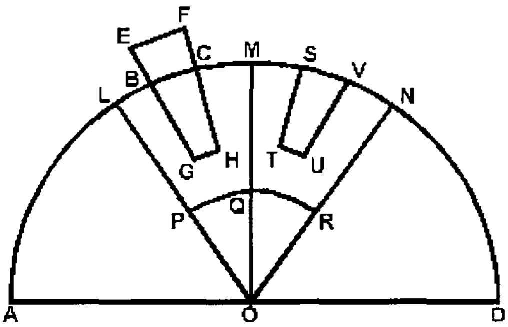
Portanto a superfície é aquela de uma esfera com centro O.

Proposição 3

Os sólidos que, tamanho por tamanho, têm o mesmo peso que um fluido irão, se soltos no fluido, submergir de tal forma que não se projetarão acima da superfície nem afundarão abaixo dela.

Se possível, deixe um certo sólido EFHG de peso igual, volume por volume, que o fluido permanecer submerso nele de tal forma que parte dele, EBCF, projete-se acima da superfície.

Desenhe a partir de O, o centro da terra, e através do sólido um plano cortando a superfície do fluido no círculo ABCD.



Conceba uma pirâmide com vértice O e com base um paralelogramo na superfície do fluido, de tal forma que ela inclua a parte submersa do sólido. Seja esta pirâmide cortada por um plano de ABCD em OL e OM. Descreva também uma esfera dentro do fluido abaixo de GH com centro O, e seja esta esfera cortada em PQR pelo plano ABCD.

Conceba também um outra pirâmide no fluido com vértice O, contínua com a pirâmide anterior, igual e similar a ela. Seja esta pirâmide assim descrita cortada em OM e ON pelo plano ABCD.

Por último, seja STUV uma parte do fluido dentro da segunda pirâmide igual e similar à parte BGHC do sólido, e esteja SV na superfície do fluido.

Então as pressões sobre PQ e QR serão desiguais, aquela sobre PQ sendo a maior. Portanto, a parte em QR será colocada em movimento por aquela em PQ, e o fluido não permanecerá em repouso; o que é contrário a hipótese.

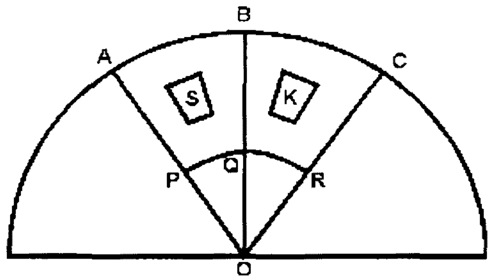
Portanto, o sólido não permanecerá acima da superfície.

Nem irá ele afundar além da superfície, pois todas as partes do fluido estarão sobre a mesma pressão.

Proposição 4

Um sólido mais leve do que um fluido não ficará, caso colocado nele, totalmente submerso, mas parte dele vai se projetar acima da superfície.

Neste caso, da mesma forma que na proposição precedente, assumimos o sólido, se possível, completamente submerso e o fluido em repouso nesta posição, e concebemos (1) um pirâmide com vértice em *O*, o centro da terra, incluindo o sólido, (2) um outra pirâmide contínua com a primeira e igual e similar a ela, com o mesmo vértice *O*, (3) uma porção do fluido dentro desta última pirâmide igual ao sólido submerso na outra pirâmide, (4) uma esfera com centro *O* cuja superfície esteja abaixo do sólido submerso e da parte do fluido na segunda pirâmide correspondendo a esta parte. Supomos um plano desenhado através do centro *O* cortando a superfície do fluido no círculo ABC, o sólido em S, a primeira pirâmide em OA e OB, a segunda pirâmide em OB e OC, a porção do fluido na segunda pirâmide em K, e a esfera interior em PQR.

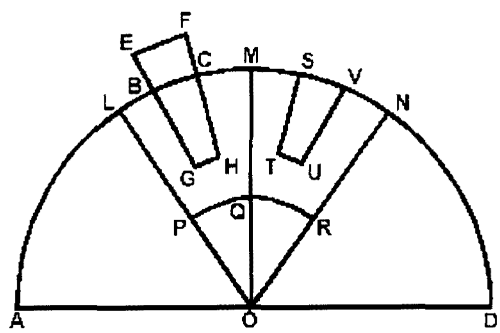


Então as pressões sobre as partes do fluido em PQ e QR são desiguais, pois S é mais leve do que K. Portanto não haverá repouso; o que é contrário a hipótese.

Portanto, numa condição de repouso, o sólido S não pode estar completamente submerso.

Proposição 5

Qualquer sólido mais leve do que um fluido ficará, caso colocado no fluido, submerso de tal forma que o peso do sólido será igual ao peso do fluido deslocado.



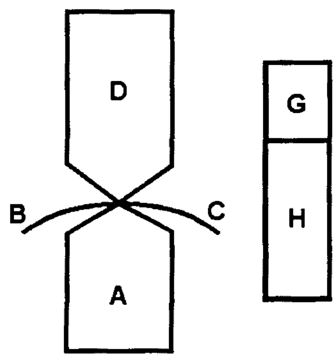
Pois seja o sólido EGHF e BGHC sua porção submersa quando o fluido está em repouso. Como na

Prop. 3, conceba uma pirâmide com vértice O incluindo o sólido, e uma outra pirâmide com o mesmo vértice contínua com a primeira, sendo igual e similar a ela. Suponha uma porção do fluido STUV na base da segunda pirâmide sendo igual e similar à porção submersa do sólido; e seja a construção a mesma que na Prop. 3.

Então, como a pressão sobre as partes do fluido em PQ e QR têm de ser iguais para que o fluido possa permanecer em repouso, segue-se que o peso da porção STUV do fluido tem de ser igual ao peso do sólido EGHF. E a primeira porção é igual ao peso do fluido deslocado pela porção submersa do sólido BGHC.

Proposição 6

Se um sólido mais leve do que um fluido for forçadamente submerso nele, o sólido será impelido para cima com uma força igual a diferença entre seu peso e o peso do fluido deslocado.



Pois esteja A completamente submerso no fluido, e representemos o peso de A por G, e por (G + H) o peso de um volume igual de líquido. Tome um sólido D, com peso H, e o adicione a A. Então o peso de (A + D) é menor do que o peso de um volume igual de líquido; e, se (A + D) for submerso no líquido, ele vai se projetar de tal forma que seu peso seja igual ao peso do volume deslocado. Mas seu peso é (G + H).

Portanto, o peso do fluido deslocado é (G + H), e portanto o volume do fluido deslocado é o volume do sólido A. De acordo com isto haverá repouso com A submerso e com D projetando-se [para fora do fluido].

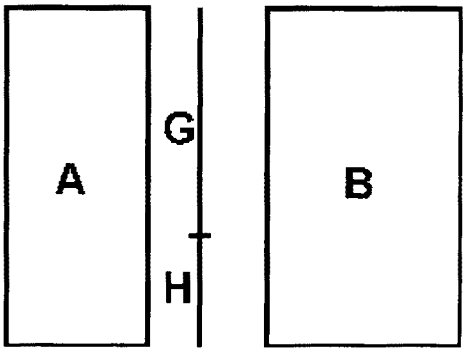
Assim o peso de D equilibra a força para cima exercida pelo fluido sobre A, e portanto esta força é igual a H, que é a diferença entre o peso de A e o peso do fluido que A desloca.

Proposição 7

Um sólido mais pesado do que um fluido descerá, se colocado nele, ao fundo do fluido, e o sólido será, quando pesado no fluido, mais leve do que seu peso real pelo peso do fluido deslocado.

(1) A primeira parte da proposição é óbvia, pois a parte do fluido sob o sólido estará sofrendo uma pressão maior, e portanto as outras partes darão passagem até o sólido atingir o fundo.

(2) Seja A um sólido mais pesado do que um mesmo volume do fluido, e represente seu peso por (G + H), sendo que G representa o peso de um mesmo volume do fluido.



Tome um sólido B mais leve do que o mesmo volume do fluido, e tal que o peso de B seja G, enquanto que o peso do mesmo volume do fluido seja (G + H).

Combine agora A e B num único sólido submerso. Então, como (A + B) terá o mesmo peso que o mesmo volume do fluido, ambos os pesos sendo iguais a (G + H) + G, segue-se que (A + B) permanecerá estacionário no fluido.

Portanto, a força que faz com que A afunde por si próprio tem de ser igual a força para cima exercida pelo fluido sobre B por si próprio. Esta última é igual a diferença entre (G + H) e G [Prop. 6]. Portanto, A é pressionado por uma força igual a H, isto é, seu peso no fluido é H, ou a diferença entre (G + H) e G.

[Nota escrita por T. L. Heath como aparece em (*Arquimedes*, 1912), mas não em (*Arquimedes*, 1952): Penso que esta proposição pode seguramente ser considerada como decisiva na questão de como Arquimedes determinou as proporções de ouro e prata contidas na famosa coroa (conferir a Introdução, Capítulo I, de *The Works of Archimedes*, T. L. Heath (ed.), New York: Dover, 1912). De fato a proposição sugere o seguinte método.

O peso da coroa é representado por W, w_1 e w_2 os pesos de ouro e prata contidos na coroa, respectivamente, tal que $W = w_1 + w_2$.

(1) Tome um peso W de ouro puro e pese-o num fluido. A perda aparente de peso é então igual ao peso do fluido deslocado. Se F_1 denota este peso, F_1 é conhecido assim como um resultado da operação de pesagem.

Segue-se que o peso do fluido deslocado por um peso w_1 de ouro é $\frac{w_1}{W} \cdot F_1$.

(2) Tome um peso W de prata pura e realize a mesma operação. Se F_2 for a perda de peso quando a prata é pesada no fluido, encontramos de maneira semelhante que o peso do fluido deslocado por w_2 é $\frac{w_2}{W} \cdot F_2$.

(3) Por último, pese a própria coroa no fluido, e seja F a perda de peso. Portanto o peso do fluido deslocado pela coroa é F.

Segue-se que $\frac{w_1}{W} \cdot F_1 + \frac{w_2}{W} \cdot F_2 = F$, ou $w_1 F_1 + w_2 F_2 = (w_1 + w_2)F$, de onde $\frac{w_1}{w_2} = \frac{F_2 - F}{F - F_1}$.

Este procedimento corresponde bem de perto àquele descrito no poema *de ponderibus et mensuris* (escrito provavelmente ao redor de 500 d. C.) com o objetivo de explicar o método de Arquimedes. De acordo com o autor deste poema, primeiro tomamos dois pesos iguais de ouro e prata puros, respectivamente, e os pesamos um contra o outro quando ambos estão submersos na água; isto fornece a relação entre seus pesos na água e, portanto, entre suas perdas de peso na água. Em seguida tomamos a mistura de ouro e prata e um peso igual de prata pura e os pesamos um contra o outro na água da mesma maneira.

A outra versão do método usado por Arquimedes é aquela dada por Vitrúvio, de acordo com a qual ele mediu sucessivamente os *volumes* de fluido deslocados por três pesos iguais, (1) a coroa, (2) o mesmo peso de ouro, (3) o mesmo peso de prata, respectivamente. Assim, se como antes o peso da coroa é W, e ela contém os pesos w_l e w_2 de ouro e prata, respectivamente,

(1) a coroa desloca uma certa quantidade de fluido, digamos V.

(2) o peso W de ouro desloca um certo volume de fluido, digamos V_l; portanto um peso w_l de ouro desloca um volume $\frac{w_1}{W} \cdot V_1$ do fluido.

(3) o peso W de prata desloca um certo volume de fluido, digamos V_2; portanto um peso w_2 de prata desloca um volume $\frac{w_2}{W} \cdot V_2$ do fluido.

Segue-se que $V = \frac{w_1}{W} \cdot V_1 + \frac{w_2}{W} \cdot V_2$, de onde, como $W = w_l + w_2$, vem que $\frac{w_1}{w_2} = \frac{V_2 - V}{V - V_1}$; e esta razão é obviamente igual a obtida anteriormente, a saber, $\frac{F_2 - F}{F - F_1}$.]

Postulado 2

Vamos admitir que os corpos que são forçados para cima num fluido são forçados para cima ao longo da perpendicular [a superfície] que passa através de seus centros de gravidade.

Proposição 8

Se um sólido na forma de um segmento de uma esfera, e de uma substância mais leve do que o fluido, for submerso nele tal que sua base não toque a superfície, o sólido vai permanecer em repouso em tal posição que seu eixo esteja perpendicular a superfície; e, se *o sólido for* forçado em uma tal posição que sua base toque o fluido sobre um lado e depois for solto, ele não vai permanecer nesta posição mas vai retornar a posição simétrica.

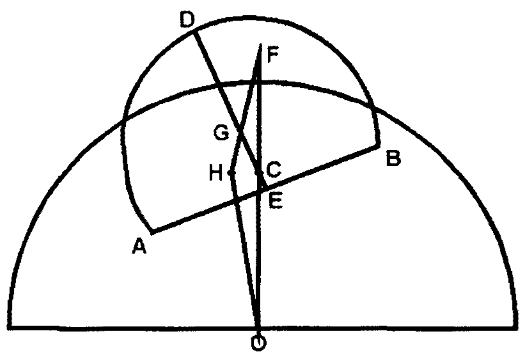
[A prova desta proposição está faltando na versão em latim [das obras de Arquimedes] de Tartaglia.

Commandinus apresentou uma prova devida a ele mesmo em sua edição [das obras de Arquimedes].]

Proposição 9

Se um sólido na forma de um segmento de uma esfera, e de uma substância mais leve do que o fluido, for submerso nele de tal forma que sua base esteja completamente abaixo da superfície, o sólido ficará em repouso numa posição tal que seu eixo seja perpendicular a superfície.

[A prova desta proposição só chegou até nós numa forma mutilada. Além disto ela trata apenas de um caso entre três que são distinguidos no início, a saber, aquele no qual o segmento é maior do que um hemisfério....]



Suponha, em primeiro lugar, que o segmento seja maior do que um hemisfério. Seja ele cortado por um plano através de seu eixo e o centro da terra; e, se possível, suponha que ele permanece em repouso na posição mostrada na figura, onde AB é a interseção do plano com a base do segmento, *DE* seu eixo, *C* o centro da esfera da qual o segmento é uma parte, e *O* o centro da terra.

O centro de gravidade da porção do segmento fora do fluido, como F, está sobre o prolongamento de OC, seu eixo passando através de *C*.

Seja G o centro de gravidade do segmento. Ligue FG, e a prolongue até H tal que FG:GH = (volume da porção submersa):(restante do sólido). Ligue OH.

Então o peso da porção do sólido fora do fluido age ao longo de FO, e a pressão do fluido sobre a porção submersa ao longo de OH, enquanto que o peso da porção submersa age ao longo de HO e é pela hipótese menor do que a pressão do fluido agindo ao longo de OH.

Portanto, não haverá equilíbrio, mas a parte do segmento em direção a *A* subirá e a parte em direção a *B* descerá, até que *DE* assuma a posição perpendicular a superfície do fluido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARQUIMEDES. *The Works of Archimedes.* 1912. Trad. T. L. Heath, New York: Dover.

______. *The Works of Archimedes.* Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1952. Great Books of the Western World, v. 11. Trad. de T. L. Heath.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

DIJKSTERHUIS, E. J. *Archimedes.* Copenhagen: Ejnar Munksgaard, 1956.

GALILEI, G. La bilancetta - a pequena balança ou a balança hidrostática. Trad. P. H. Lucie, *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, v. 9, p. 105-107, 1986.

LUCIE, P. Galileo e a tradição arquimediana - la bilancetta. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, v. 9, p. 95-104, 1986.

MACH, E. *The Science of mechanics - A critical and historical account of its development.* La Salle: Open Court, 1960.

MARTINS, R. de A. O Vácuo e a pressão atmosférica, da antiguidade a Pascal. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência.* v. 1, série 2, número especial, p. 9-48, 1989.

PASCAL, B. Tratados físicos de Blaise Pascal. Trad. R. de A. Martins. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência.* v. 1, série 2, número especial, p. 49-168, 1989.

Agradecimento

Agradeço ao Dr. Roberto de Andrade Martins pelo apoio.

Artigo recebido em novembro de 1996

ANDRÉ KOCH TORRES ASSIS é professor do Instituto de Física da UNICAMP.
Endereço: Instituto de Física 'Gleb Wataghin', Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, 13083-970 Campinas, São Paulo, Brasil.
E-mail: assis@ifi.unicamp.br; Homepage: http://www.ifi.unicamp.br/~assi