TEORIAS DE AÇÃO A DISTÂNCIA UMA TRADUÇÃO COMENTADA DE UM TEXTO DE JAMES CLERK MAXWELL

ANDRÉ K.T. ASSIS

Resumo - Apresentamos uma tradução comentada do último capítulo do livro A Treatise on Electricity and Magnetism, *de J. C. Maxwell. Neste capítulo Maxwell discute as teorias eletromagnéticas de ação a distância proposta por Gauss, Weber, Riemann, Neumann, etc. Comentamos o trabalho de Maxwell e enfatizamos a relação de vários dos tópicos aqui discutidos com experimentos recentes ligados com a eletrodinâmica clássica.*

Introdução

Este trabalho constitui a tradução comentada do último capítulo da obra máxima de James Clerk Maxwell (1831 - 1879): *A Treatise on Electricity and Magnetism* (New York: Dover, 1954). Este livro foi publicado pela primeira vez em 1873, em inglês. O título original deste capítulo é "Theories of Action at a Distance". A tradução é baseada na terceira e última edição do livro de Maxwell, de 1891, preparada por J. J. Thomson (1856 - 1940).

Este livro é o coroamento da obra de Maxwell em eletromagnetismo e é onde expõe com mais clareza e profundidade sua teoria eletromagnética baseada na existência de um éter. Dentro desta visão uma carga elétrica não interage com outra a distância, mas sim através do éter eletromagnético. A velocidade de propagação da interação é finita e igual à velocidade da luz. Maxwell conclui ainda que a própria luz é composta de ondas eletromagnéticas transversas se propagando neste meio. Ou seja, ele identifica o éter da óptica (responsável pela transmissão da luz) com o éter eletromagnético (responsável na sua concepção pela transmissão das interações entre cargas e correntes elétricas).

Neste último capítulo Maxwell se propõe a discutir uma outra visão do eletromagnetismo, desenvolvida principalmente na Alemanha, e que é baseada em modelos de ação a distância. Analisa as idéias de Gauss, Riemann, Neumann e principalmente as de Wilhelm Weber (1804 - 1891). Vale citar aqui as palavras de Maxwell no Prefácio à primeira edição deste livro:

> "Grande progresso tem sido feito na ciência elétrica, principalmente na Alemanha, pelos cultivadores da teoria de ação a distância. As valiosas medições elétricas de W. Weber são interpretadas por ele de acordo com sua teoria, e a especulação eletromagnética que foi originada por Gauss, e continuada por Weber, Riemann, J.[F.] e C. Neumann, [L.] Lorenz, etc., está baseada na teoria de ação a distância, mas dependendo ou diretamente da velocidade relativa das partículas, ou da propagação gradual de alguma coisa, seja potencial ou força, de uma partícula à outra. O grande sucesso obtido por estes homens eminentes na aplicação da matemática aos fenômenos elétricos fornece, como é natural, peso adicional às suas especulações teóricas, de tal forma que aqueles que, como estudantes da eletricidade, se voltam em direção a eles como as maiores autoridades

na eletricidade matemática, provavelmente assimilariam, junto com seus métodos matemáticos, suas hipóteses físicas.

Estas hipóteses físicas, contudo, são completamente diferentes da maneira de olhar os fenômenos que adoto, e um dos objetivos que tenho em vista é que alguns daqueles que desejam estudar eletricidade podem, ao ler este tratado, ver que há uma outra maneira de tratar o assunto, que não é menos apta a explicar os fenômenos, e que, apesar de que em algumas partes ela possa parecer menos definida, corresponde, como penso, mais fielmente ao nosso conhecimento atual, tanto naquilo que afirma quanto naquilo que deixa indeciso.

De um ponto de vista filosófico, além disto, é extremamente importante que os dois métodos sejam comparados, ambos os quais tiveram sucesso na explicação dos principais fenômenos eletromagnéticos, e ambos os quais tentaram explicar a propagação da luz como um fenômeno eletromagnético e de fato calcularam sua velocidade, enquanto que ao mesmo tempo as concepções fundamentais sobre o que acontece, assim como a maioria das concepções secundárias das quantidades envolvidas, são radicalmente diferentes."

Em todos os seus trabalhos Maxwell sempre ficou admirado como concepções e modelos tão distintos pudessem explicar tão bem os mesmos fenômenos eletromagnéticos. Para uma discussão aprofundada dos trabalhos de Maxwell e de suas relações com os modelos alternativos da época sugerimos os trabalhos excelentes de Paulo C.C. Abrantes: *La réception en France des théories de Maxwell concèrnant l'électricité et le magnétisme* (Paris, tese de doutorado não publicada, 1985); e *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, Volume 5 (número especial), p. 58-75 (1988), "A metodologia de J. C. Maxwell e o desenvolvimento da teoria eletromagnética".

Apresentamos agora alguns aspectos que ilustram a importância deste trabalho dentro da obra de Maxwell.

A força de Weber entre cargas elétricas aparece pela primeira vez em 1846. Ela unifica em uma única lei de força os fenômenos da eletrostática (força de Coulomb e lei de Gauss), da magnetostática (força entre ímãs) e do galvanismo (correntes elétricas, força entre elementos de corrente de Ampère), e da indução de correntes (lei de Faraday). Esta é a primeira força que surge na física que não depende apenas da distância entre as cargas, mas também de suas velocidades e acelerações. No ano seguinte aparece o importante trabalho de Helmholtz sobre a conservação da energia, onde ele afirma (H. Helmholtz, On the conservation of force; a physical memoir, em TAYLOR, R. (ed.), *Scientific Memoirs*. New York: Johnson Reprint Corporation, v. 7, p. 114-162, 1966, ver especialmente a p. 126, nossas observações entre colchetes):

"As proposições precedentes podem ser reunidas como:

1 - Sempre que os corpos naturais agem uns sobre os outros por forças atrativas ou repulsivas, que são independentes do tempo e da velocidade, a soma de suas *vires vivae* [historicamente se chamava de vis viva à quantidade mv^2, mas neste trabalho Helmholtz chama explicitamente de *vis viva* à quantidade $mv^2/2$, que atualmente denominamos de energia cinética] e tensões [aquilo que hoje em dia chamamos de energia potencial] deve ser constante; e é portanto uma quantidade limitada o valor máximo de trabalho que pode ser obtido.

2 - Se, ao contrário, os corpos naturais possuem forças que dependem do tempo e da velocidade, ou que agem em direções diferentes das retas que unem cada par de pontos materiais separados, como por exemplo, forças rotatórias, então seria possível combinações destes corpos tal que a força [energia] poderia ser perdida ou aumentada *ad infinitum*."

Devido a esta observação se pensou durante 25 anos que a lei de Weber era incompatível com o princípio de conservação da energia. Isto impediu uma penetração e influência maior de sua eletrodinâmica. Embora Weber apresentasse em 1848 uma energia potencial generalizada da qual podia derivar sua força, e que dependia da distância e da velocidade entre as cargas, não discutiu neste trabalho a conservação da energia. Só provou a conservação da energia para sua lei em dois trabalhos que publicou em 1869 e 1871, utilizando um formalismo Lagrangeano. A prova de Helmholtz não se aplica à força de Weber devido ao fato de que esta força não depende apenas da distância e da velocidade entre as cargas, mas depende também de suas acelerações. E este caso mais geral não havia sido discutido por Helmholtz.

De qualquer forma este trabalho de Helmholtz de 1847 influenciou fortemente a Maxwell por muito tempo. Em seu primeiro trabalho sobre eletromagnetismo, de 1855/6, após tecer vários elogios à eletrodinâmica de Weber, lhe faz uma única crítica (Maxwell, J. C. On Faraday's lines of force, em NIVEN, W. D. (ed.), *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Cambridge: Cambridge University Press, 1890; (republicado recentemente pela editora Dover, de New York), p. 155-229, ver especialmente as p. 207-208):

> "Há também objeções em fazer quaisquer forças fundamentais na natureza dependerem da velocidade dos corpos entre os quais ela age. Se as forças na natureza devem ser reduzidas a forças agindo entre partículas, o princípio de Conservação da Força [Energia] requer que estas forças devem estar ao longo da reta que une as partículas e devem ser função apenas da distância."

Esta aparente violação do princípio de conservação da energia parece ser o motivo principal pelo qual Maxwell descartou a teoria de Weber tão cedo. Isto pode ser visto em seu terceiro artigo sobre eletromagnetismo, escrito em 1864, onde completa sua teoria eletromagnética da luz (Maxwell, J. C. A dynamical theory of the electromagnetic field, em NIVEN (obra citada), p. 526-597). Após elogiar mais uma vez a teoria de Weber e seus resultados experimentais afirma (ver p. 527):

> Contudo, as dificuldades mecânicas que estão envolvidas na suposição de partículas agindo a distância com forças que dependem de suas velocidades são tais que me impedem de considerar esta teoria como fundamental, embora ela possa ter sido e possa ainda vir a ser útil em levar à coordenação dos fenômenos."

Maxwell estava errado a este respeito, mas só mudou de ponto de vista em 1871, após os artigos de Weber de 1869 e 1871. No livro de Harman há um postal de Maxwell para Tait, datado de 1871, onde Maxwell informa a Tait de que é inválido afirmar que a força de Weber viola a lei de conservação de energia (HARMAN, P. M. *Energy, Force, and Matter - The conceptual development of nineteenth-century physics* Cambridge: Cambridge University Press, 1982, p. 96-7).

Um aspecto importante deste último capítulo do livro de Maxwell é que esta é a primeira vez em que ele publica esta nova visão de que nenhum trabalho será produzido em quaisquer operações cíclicas nas quais uma carga interage com outras através da força de Weber.

Há também um outro fato muito relevante ligando Maxwell e Weber. Maxwell introduziu a idéia de variações de um deslocamento elétrico ocorrendo nos meios dielétricos (variações de polarização) constituindo as famosas correntes de deslocamento em seu segundo trabalho de eletromagnetismo, de 1861/2 (Maxwell, J. C. On physical lines of force, em NIVEN (obra citada), p. 451-513), embora a idéia de estas correntes gerarem campo magnético só viesse em 1864. Neste segundo trabalho Maxwell obtém a possibilidade de o meio eletromagnético transmitir vibrações transversas com uma certa velocidade V. No caso do ar ou do vácuo esta velocidade V é a razão das unidades eletromagnéticas e eletrostáticas de carga. A primeira vez em que esta grandeza surgiu na física foi justamente na força de Weber, de 1846. Neste trabalho Weber representou esta grandeza (a menos de um fator de $\sqrt{2}$ devido ao sistema de unidades) pela letra c, símbolo ainda adotado hoje em dia. Em termos do Sistema Internacional de Unidades vem que $c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2}$. Embora esta grandeza tivesse sido introduzida em 1846, só foi medida pela primeira vez dez anos depois. Mais uma vez a pessoa responsável por isto foi justamente Weber, juntamente com seu colaborador Kohlrausch. O valor que obtiveram, publicado em 1856, foi que $c = 3{,}11 \times 10^8$ *m/s*.

Neste segundo artigo, após chegar nesta possibilidade de o meio transmitir vibrações eletromagnéticas transversas, MAXWELL fez a seguinte afirmação famosa (ver p. 500, seus itálicos):

> "A velocidade da luz no ar, como determinada pelo Sr. Fizeau, é 70843 léguas por segundo (25 léguas por grau) o que dá V = 314 858 000 000 milímetros [por segundo] = 195647 milhas por segundo (137). A velocidade das ondas transversas em nosso meio hipotético, calculada a partir dos experimentos eletro-

magnéticos dos Srs. Kohlrausch e Weber, concorda tão exatamente com a velocidade da luz calculada a partir dos experimentos ópticos do Sr. Fizeau, que dificilmente podemos evitar a dedução de que *a luz consiste de ondas transversas do mesmo meio que é responsável pelos fenômenos elétricos e magnéticos.*"

Após esta breve introdução apresentamos a tradução comentada deste importante texto de Maxwell.

CAPÍTULO XXIII

Teorias de Ação a Distância

Sobre a explicação da fórmula de Ampère dada por Gauss e Weber.

846.] A atração entre os elementos *ds* e *ds'* de dois circuitos, conduzindo correntes elétricas de intensidade *i* e *i'*, é, pela fórmula de Ampère,(NOTA 1)

$$\frac{ii'dsds'}{r^2}\left(2\cos\varepsilon + \frac{3dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right); \tag{1}$$

ou

$$-\frac{ii'dsds'}{r^2}\left(2r\frac{d^2r}{dsds'} - \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right); \tag{2}$$

sendo as correntes estimadas em unidades eletromagnéticas. Ver Art. 526 (NOTA 2)

As quantidades cujo significado nessas expressões temos agora que interpretar, são

$$\cos\,\varepsilon,\ \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'},\ e\ \frac{d^2r}{dsds'};$$

e o fenômeno mais óbvio no qual procurar por uma interpretação fundamentada numa relação direta entre as correntes é a velocidade relativa da eletricidade nos dois elementos.

847.] Consideremos, portanto, o movimento relativo de duas partículas, movendo-se com velocidades constantes (NOTA 3) v e v' ao longo dos elementos *ds* e *ds'*, respectivamente. O quadrado da velocidade relativa dessas partículas é

$$u^2 = v^2 - 2vv'\cos\,\varepsilon + v'^2; \tag{3}$$

e se denotarmos por r a distância entre as partículas,

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v\frac{dr}{ds} + v'\frac{dr}{ds'}, \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = v^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + 2vv'\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + v'^2\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 r}{ds^2} + 2vv' \frac{d^2 r}{ds ds'} + v'^2 \frac{d^2 r}{ds'^2} \ , \tag{6}$$

onde o símbolo ∂ indica que, na quantidade diferenciada, as coordenadas das partículas devem ser expressas em termos do tempo.(NOTA 4)

Parece, portanto, que os termos envolvendo o produto vv' nas equações (3), (5) e (6) contêm as quantidades que aparecem em (1) e (2), as quais temos que interpretar. Nosso intento, portanto, é expressar (1) e (2) em termos de

$$u^2, \ \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2, \ e \ \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}.$$

Mas para fazê-lo devemos nos livrar do primeiro e terceiro termos de cada uma dessas expressões, pois eles envolvem quantidades que não aparecem na fórmula de Ampère. Em conseqüência, não podemos explicar a corrente elétrica como uma transferência de eletricidade numa direção apenas, mas devemos combinar dois feixes opostos em cada corrente, de tal forma que o efeito combinado dos termos envolvendo v^2 e v'^2 possa ser zero.

848.] Suponhamos, portanto, que no primeiro elemento, *ds*, temos uma partícula elétrica, *e*, movendo-se com velocidade *v*, e uma outra, e_1, movendo-se com velocidade v_1, e do mesmo modo duas partículas e' e e'_1 em ds', movendo-se com velocidades v' v'_1, respectivamente.

O termo envolvendo v^2 para a ação combinada dessas partículas é

$$\sum(v^2 ee') = (v^2 e + v_1^2 e_1)(e' + e'_1) \ . \tag{7}$$

Similarmente

$$\sum (v'^2 ee') = (v'^2 e' + v'^2_1 e'_1)(e' + e'_1) \tag{8}$$

$$\sum(vv'ee') = (ve + v_1 e_1)(v'e' + v'_1 e'_1) \tag{9}$$

Para que $\sum (v^2 \ ee')$ possa ser zero, devemos ter ou

$$e' + e'_1 = 0, \ \text{ou} \ v^2 e + v_1^2 e_1 = 0. \tag{10}$$

De acordo com a hipótese de Fechner,(NOTA 5) a corrente elétrica consiste em uma corrente de eletricidade positiva na direção positiva, combinada a uma corrente de eletricidade negativa na direção negativa, as duas correntes sendo exatamente iguais em magnitude numérica, tanto com respeito à quantidade de eletricidade em movimento, quanto à velocidade com a qual se move. Em conseqüência, ambas as condições de (10) são satisfeitas pela hipótese de Fechner.

Mas é suficiente para os nossos propósitos assumir, ou que a quantidade de eletricidade positiva em cada elemento seja numericamente igual à quantidade de eletricidade negativa; ou que as quantidades dos dois tipos de eletricidade estejam inversamente como os quadrados de suas velocidades.

Sabemos contudo que ao carregar o segundo fio condutor como um todo, podemos fazer $e' + e'_1$ ou positivo ou negativo. Um tal fio carregado, até sem corrente, de acordo com esta fórmula, agiria no primeiro fio levando uma corrente na qual $v^2 e + v^2_1 e_1$ tem um valor diferente de zero. Tal ação nunca foi observada.(NOTA 6)

Portanto, como pode ser mostrado experimentalmente que a quantidade $e' + e'_1$ não é sempre nula, e como não é possível testar experimentalmente o valor da quantidade $v^2e+v^2{}_1e_1$, é melhor para estas especulações assumir que é a última quantidade que sempre desaparece.

849.] Qualquer hipótese que adotemos, não há dúvidas que a transferência total de eletricidade, computada algebricamente, ao longo do primeiro circuito, é representada por:

$$ve + v_1e_1 = cids,$$

onde c é o número de unidades de eletricidade estática que são transmitidas pela corrente elétrica unitária numa unidade de tempo, de tal forma que podemos escrever a equação (9) como:

$$\sum (vv'ee') = e^2ii'dsds'. \tag{11}$$

Portanto, as somas dos quatro valores de (3), (5) e (6) tornam-se:

$$\sum (ee'u^2) = -2c^2ii'dsds' \cos \varepsilon , \tag{12}$$

$$\sum \left(ee' (\frac{\partial r}{\partial t})^2\right) = 2c^2ii' \, dsds' \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} , \tag{13}$$

$$\sum (ee'r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}) = 2c^2ii'dsds' \, r \frac{d^2 r}{dsds'} , \tag{14}$$

e podemos escrever as duas expressões (1) e (2) para a atração entre ds e ds' como:

$$-\frac{1}{c^2}\sum \left[\frac{ee'}{r^2}\left(u^2 - \frac{3}{2}(\frac{\partial r}{\partial t})^2\right)\right] , \tag{15}$$

e

$$-\frac{1}{c^2}\sum \left[\frac{ee'}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2}(\frac{\partial r}{\partial t})^2\right)\right] . \tag{16}$$

850.] A expressão comum, na teoria da eletricidade estática, para a repulsão de duas partículas elétricas e e e', é $\frac{ee'}{r^2}$, e

$$\sum (\frac{ee'}{r^2}) = \frac{(e + e_1)(e' + e'_1)}{r^2} , \tag{17}$$

o que fornece a repulsão eletrostática entre os dois elementos se eles estiverem carregados.

Então, se assumirmos para a repulsão de duas partículas qualquer uma das expressões modificadas

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(u^2 - \frac{3}{2}(\frac{\partial r}{\partial t})^2\right)\right] , \tag{18}$$

ou*

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1+\frac{1}{c^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right)\right], \tag{19}$$

podemos deduzir delas as forças eletrostáticas comuns, e as forças agindo entre correntes como determinado por Ampère.(NOTA 8)

851.] A primeira dessas expressões, (18), foi descoberta por Gauss** em julho de 1835, e interpretada por ele como uma lei fundamental de ação elétrica, que "dois elementos de eletricidade num estado de movimento relativo atraem ou repelem um ao outro, mas não do mesmo modo como se eles estivessem em estado de repouso relativo". Essa descoberta não foi, tanto quanto sei, publicada enquanto Gauss era vivo, de tal forma que a segunda expressão, descoberta independentemente por W. Weber, e publicada na primeira parte do seu célebre *Elektrodinamische Maasbestimmungen*,† foi o primeiro resultado do tipo tornado conhecido ao mundo científico.(NOTA 9)

852.] As duas expressões levam precisamente ao mesmo resultado quando elas são aplicadas à determinação da força mecânica entre duas correntes elétricas, e este resultado é idêntico ao de Ampère(NOTA 10). Mas quando elas são consideradas como expressões da lei física de ação entre duas partículas elétricas, somos levados a perguntar se elas são consistentes com outros fatos da natureza já conhecidos.

Ambas as expressões envolvem a velocidade relativa das partículas. Ora, ao estabelecer por raciocínio matemático o princípio bem conhecido da conservação da energia, é geralmente assumido que a força agindo entre duas partículas é uma função apenas da distância, e é comumente afirmado que se é função de qualquer outra coisa, tal como o tempo, ou a velocidade das partículas, a prova não se manteria.

Portanto uma lei de ação elétrica, envolvendo a velocidade das partículas, tem sido suposta algumas vezes ser inconsistente com o princípio da conservação da energia.

853.] A fórmula de Gauss é inconsistente com este princípio, e deve, portanto, ser abandonada, pois ela leva à conclusão de que a energia poderia ser gerada indefinidamente num sistema finito por meios físicos. Esta objeção não se aplica à fórmula de Weber, pois ele mostrou‡ (NOTA 11) que se assumirmos como energia potencial de um sistema de duas partículas elétricas,(NOTA 12)

$$\psi=\frac{ee'}{r}\left[1-\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right], \tag{20}$$

a repulsão entre elas, que é encontrada na diferenciação desta quantidade com respeito a *r*, e mudando o sinal, é aquela dada pela fórmula (19).(NOTA 13)

Portanto o trabalho feito numa partícula em movimento pela repulsão de uma partícula fixa é $\psi_0-\psi_1$, onde ψ_0 *e* ψ_1 são os valores de ψ no começo e no fim de sua trajetória. Agora ψ depende apenas da distância, *r*, e da velocidade na direção de *r*. Se, portanto, a partícula descreve qualquer caminho fechado, de tal forma que sua posição, velocidade e direção de movimento são os mesmos ao final como no começo, ψ_1 será igual a ψ_0, e nenhum trabalho será feito durante o ciclo completo de operações.

* Para uma descrição de outras teorias desse tipo, ver *Report on Electrical Theories*, por J.J. Thompson, B. A. Report, 1885, pp. 97-155 (NOTA 7)

** .*Werke*, edição de Göttingen, 1867, v. 5, p. 616.

† *Abh. Leibnizens Ges.*, Leipzig (1846), p. 316.

‡ *Pogg. Ann.*, lxxiii, p. 229, 1848.

Então uma quantidade indefinida de trabalho não pode ser gerada por uma partícula em movimento periódico sob a ação da força assumida por Weber.(NOTA 14)

854.] Mas Helmholtz, em seu trabalho muito influente sobre as "Equações de movimento da eletricidade em condutores em repouso,"* enquanto mostra que a fórmula de Weber não é inconsistente com o princípio de conservação de energia, no que diz respeito apenas ao trabalho feito durante uma operação cíclica completa, mostra que ela leva à conclusão de que duas partículas eletrificadas, que se movem de acordo com a lei de Weber, podem ter de início velocidades finitas, e todavia, enquanto ainda a uma distância finita uma da outra, podem adquirir uma energia cinética infinita, e podem perfazer uma quantidade infinita de trabalho.

A isso, Weber** replica que a velocidade inicial relativa das partículas no exemplo de Helmholtz, embora finita, é maior que a velocidade da luz; e que a distância na qual a energia cinética torna-se infinita, embora finita, é menor que qualquer magnitude que podemos perceber, de tal forma que pode ser fisicamente impossível trazer duas moléculas para ficarem tão próximas. O exemplo, portanto, não pode ser testado por qualquer método experimental.

Helmholtz† entretanto mostrou um caso no qual as distâncias não são tão pequenas, nem as velocidades tão grandes, para uma verificação experimental. Uma superfície esférica não condutora, fixa, de raio a, é uniformemente carregada com eletricidade até a densidade superficial σ. Uma partícula de massa m e carregando uma carga e de eletricidade move-se dentro da esfera com velocidade v. O potencial eletrodinâmico calculado pela fórmula (20) é:

$$4\pi a\sigma e\left(1-\frac{v^2}{6c^2}\right), \tag{21}$$

e é independente da posição da partícula dentro da esfera. Somando a esse potencial eletrodinâmico o restante da energia potencial com origem na ação de outras forças, V, e a energia cinética da partícula, $\frac{1}{2}mv^2$, encontramos como a equação da energia

$$\frac{1}{2}\left(m-\frac{4}{3}\frac{\pi a\sigma e}{c^2}\right)v^2+4\pi a\sigma e+V=\text{constante}. \tag{22}$$

Como o segundo termo do coeficiente de v^2 pode ser aumentado indefinidamente pelo acréscimo de a, o raio da esfera, enquanto a densidade superficial σ permanece constante, o coeficiente de v^2 pode ser tornado negativo. A aceleração do movimento da partícula corresponderia então à diminuição de sua *vis viva*, e o corpo movendo-se em um caminho fechado e submetido a uma força como o atrito, sempre oposta em direção a seu movimento, aumentaria continuamente em velocidade, e isso sem limites. Este resultado impossível é uma conseqüência necessária da admissão de qualquer fórmula para o potencial que introduz termos negativos no coeficiente de v^2 .(NOTA 16)

855.] Mas temos agora que considerar a aplicação da teoria de Weber para fenômenos que podem ser realizados. Vimos como ela fornece a expressão de Ampère para a força de atração entre dois elementos de correntes elétricas. O potencial de um desses elementos no outro é encontrado tomando a soma dos valores do potencial ψ para as quatro combinações das correntes positivas e negativas nos dois elementos. O resultado é, pela equação (20), tomando a soma dos quatro valores de $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$,(NOTA 17)

$$-\,ii'\,ds\,ds'\,\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\,, \tag{23}$$

* *Crelle's Journal*, 72. p. 57-129, 1870.

** *Elektr. Maasb. inbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie.*

† Berlin Monatsbericht, Abril de 1872, p. 247-256; Phil. Mag., Dez. de 1872, Supp., p. 530-537. (NOTA 15)

e o potencial de uma corrente fechada na outra é:

$$- ii' \iint \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} dsds' = ii'M , \tag{24}$$

onde

$$M = \iint \frac{\cos\varepsilon}{r} dsds' ,$$

como nos Arts. 423, 524.

No caso de correntes fechadas, esta expressão concorda com aquela que nós já tínhamos obtido (Artigo 524).*

Teoria de Weber da indução de correntes elétricas. (NOTA 18)

856.] Depois de deduzir da fórmula de Ampère para a ação entre os elementos de corrente, sua própria fórmula para a ação entre partículas elétricas que se movem, Weber prosseguiu aplicando sua fórmula para a explicação da produção de correntes elétricas por indução eletro-magnética. Nisso ele foi eminentemente bem sucedido, e indicaremos o método pelo qual as leis de correntes induzidas podem ser deduzidas da fórmula de Weber. Mas devemos observar que o fato de uma lei deduzida do fenômeno descoberto por Ampère ser capaz de também justificar o fenômeno descoberto depois por Faraday, não dá muito peso adicional à evidência da realidade física da lei como poderíamos supor de início.

Pois foi mostrado por Helmholtz e Thomson (ver Art. 543), que se os fenômenos de Ampère são verdadeiros, e se for admitido o princípio da conservação da energia, então segue necessariamente o fenômeno da indução descoberto por Faraday. Ora, a lei de Weber, com as várias suposições sobre a natureza das correntes elétricas que nela estão envolvidas, leva à fórmula de Ampère por transformações matemáticas. A lei de Weber também é consistente com o princípio da conservação da energia, já que existe um potencial, e isto é tudo o que é requerido para a aplicação do princípio de Helmholtz e Thomson. Portanto, podemos afirmar, mesmo antes de fazer qualquer cálculo sobre o assunto, que a lei de Weber vai explicar a indução de correntes elétricas. Logo, o fato de que é encontrada a explicação da indução de correntes a partir do cálculo, não traz nenhuma evidência adicional a favor da realidade física da lei.

Por outro lado a fórmula de Gauss, ainda que explique o fenômeno da atração de correntes, é inconsistente com o princípio da conservação da energia e, portanto, não podemos afirmar que ela explicará o fenômeno da indução. De fato, ela falha em fazer isso, como veremos no Art. 859.

857.] Devemos considerar agora a força eletromotriz que tende a produzir uma corrente no elemento *ds'*, devido à corrente em *ds*, quando *ds* está em movimento, e quando a corrente nele é variável.

De acordo com Weber, a ação no material do condutor do qual *ds'* é um elemento, é a *soma* de todas as ações na eletricidade que ele carrega. Por outro lado, a força eletromotriz na eletricidade em *ds'* é a *diferença* das forças elétricas agindo na eletricidade positiva e negativa dentro dele. Como todas essas forças agem ao longo da linha reta que liga os elementos, a força eletromotriz em *ds'* está também ao longo dessa linha reta, e para obter a força eletromotriz na direção de *ds'* temos que resolver a força nessa direção.(NOTA 19) Para aplicar a fórmula de Weber, devemos calcular os vários termos que ocorrem nela, com a suposição de que o elemento *ds* está se movendo relativamente a *ds'*, e que as correntes em ambos os elementos variam com o tempo. As expressões encontradas assim conterão termos envolvendo v^2, vv', v'^2, v, v' e termos não envolvendo v ou v', todos eles multiplicados por ee'. Examinando, como fizemos antes, os quatro valores de cada termo e considerando primeiro a força mecânica que surge da

* Em toda esta investigação Weber adota o sistema eletrodinâmico de unidades. Neste trabalho sempre usamos o sistema eletromagnético. A unidade eletromagnética de corrente está para a unidade eletrodinâmica na razão de $\sqrt{2}$ para 1. Art. 526.

soma dos quatro valores, encontramos que o único termo que devemos levar em consideração é o que envolve o produto $vv'ee'$.

Se considerarmos então a força que tende a produzir uma corrente no segundo elemento, surgindo da diferença de ação do primeiro elemento nas eletricidades positiva e negativa do segundo elemento, encontramos que o único termo que temos de examinar é o que envolve vee'. Podemos escrever os quatro termos inclusos em $\sum (vee')$, deste modo

$$e'\,(ve + v_1e_1) \text{ e } e'_1(ve + v_1e_1).$$

Como $e'+e'_1 = 0$, a força mecânica que surge destes termos é nula, mas a força eletromotriz agindo na eletricidade positiva e' é $(ve + v_1e_1)$, e a que age na eletricidade negativa e'_1 é igual e oposta a esta.

858.] Suponhamos agora que o primeiro elemento ds esteja movendo-se relativamente a ds' com velocidade V numa certa direção, e denotemos por $\hat{Vds}$ e $\hat{Vds'}$ os ângulos entre a direção de V e aquelas de ds e ds', respectivamente, então o quadrado da velocidade relativa, u, das duas partículas elétricas é (NOTA 20)

$$u^2 = v^2 + v'^2 + V^2 - 2vv'\cos\varepsilon + 2Vv\cos\hat{Vds} - 2Vv'\cos\hat{Vds'}. \qquad (25)$$

O termo em vv' é o mesmo como na equação (3). Aquele em v, do qual depende a força eletromotriz, é

$$2Vv\cos\hat{Vds}$$

Temos também para o valor da variação temporal de r neste caso (NOTA 21)

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v\frac{dr}{ds} + v'\frac{dr}{ds'} + \frac{dr}{dt}, \qquad (26)$$

onde $\frac{\partial r}{\partial t}$ se refere ao movimento das partículas elétricas, e $\frac{dr}{dt}$ ao movimento do condutor material. Se tomamos o quadrado desta quantidade, o termo envolvendo vv', do qual depende a força mecânica, é o mesmo de antes, na equação (5), e aquele envolvendo v, do qual depende a força eletromotriz, é

$$2v\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt}$$

Diferenciando (26) com respeito a t, encontramos (NOTA 22)*

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = v^2\frac{d^2r}{ds^2} + 2vv'\frac{d^2r}{ds\,ds'} + v'^2\frac{d^2r}{ds'^2} + \frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds} + \frac{dv'}{dt}\frac{dr}{ds'} + v\frac{dv}{ds}\frac{dr}{ds} + v'\frac{dv'}{ds}\frac{dr}{ds'} + 2v\frac{d}{ds}\frac{dr}{d} + 2v'\frac{d}{ds'}\frac{dr}{dt} + \frac{d^2r}{dt^2} \qquad (27)$$

Encontramos que o termo envolvendo vv' é o mesmo de antes em (6). Os termos cujos sinais variam com v são:

---

*Na primeira e segunda edições, os termos $2v\frac{d}{ds}\frac{dr}{dt} + 2v'\frac{d}{ds'}\frac{dr}{dt}$ foram omitidos; como, contudo, $\frac{\partial^2}{\partial t} = \left(v\frac{d}{ds} + v'\frac{d}{ds'} + \frac{d}{dt}\right)^2$, parece que eles tinham de ser incluídos, porém eles não afetam o resultado quando os circuitos são fechados. (NOTA 23)

$$\frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds} \; e \; 2v\frac{d}{ds}\frac{dr}{dt}.$$

859.] Se calcularmos agora pela fórmula de Gauss (equação (18)), a força elétrica resultante na direção do segundo elementos *ds'*, surgindo da ação do primeiro elemento *ds*, obtemos:

$$\frac{1}{r^2}\, dsds' \; i \; V (2 \cos \hat{Vds} - 3 \cos \hat{Vr} \cos \hat{rds}) \cos \hat{rds'}. \tag{28}$$

Como nesta expressão não existe termo envolvendo a taxa de variação da corrente *i*, e como sabemos que a variação da corrente primária produz uma ação induzida no circuito secundário, não podemos aceitar a fórmula de Gauss como uma expressão verdadeira da ação entre partículas elétricas.

860.] Se, contudo, empregarmos a fórmula de Weber, (19), obtemos:

$$\frac{1}{r^2}\, dsds' \left(r\frac{dr}{ds}\frac{di}{dt} + 2i\frac{d}{ds}\frac{dr}{dt} - i\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt}\right)\frac{dr}{ds'} \tag{29}$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right) dsds' + \frac{i}{r}\left(\frac{d^2r}{dsdt}\frac{dr}{ds'} - \frac{d^2r}{ds'dt}\frac{dr}{ds}\right) dsds'. \tag{30}$$

Se integrarmos esta expressão com respeito a *s* e *s'*, obtemos para a força eletromotriz no segundo circuito:

$$\frac{d}{dt} i \iint \frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} dsds' + i \iint \frac{1}{r}\left(\frac{d^2r}{dsdt}\frac{dr}{ds'} - \frac{d^2r}{ds'dt}\frac{dr}{ds}\right) dsds' \tag{31}$$

Agora, quando o primeiro circuito é fechado,

$$\int \frac{d^2r}{dsds'}\, ds = 0$$

Portanto,

$$\int \frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\, ds = \int \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + \frac{d^2r}{dsds'}\right) ds = -\int \frac{\cos \varepsilon}{r}\, ds. \tag{32}$$

Mas,

$$\iint \frac{\cos \varepsilon}{r}\, dsds = M, \text{ pelos Artigos 423, 524.} \tag{33}$$

Como o segundo termo na equação (31) desaparece se ambos os circuitos forem fechados, podemos escrever a força eletromotriz no segundo circuito como:

$$-\frac{d}{dt}(iM) \tag{34}$$

o que concorda com o que tínhamos estabelecido por experimento; Art. 539.(NOTA 24)

Sobre a fórmula de Weber, considerada como resultante da ação transmitida de uma partícula elétrica para a outra com uma velocidade constante.

861.] Em uma carta muito interessante de Gauss para W. Weber* ele se refere a especulações eletrodinâmicas com as quais tinha se ocupado muito antes, e que teria publicado se pudesse ter estabelecido então aquela que considerava a pedra angular verdadeira da eletrodinâmica, a saber, a dedução da força agindo entre partículas elétricas em movimento a partir da consideração de uma ação entre elas, não instantânea, mas propagada no tempo, de uma maneira similar àquela da luz. Quando desistiu de suas pesquisas eletrodinâmicas ele não tinha sido bem sucedido em fazer esta dedução, e tinha uma convicção subjetiva de que seria necessário, em primeiro lugar, formar uma representação consistente da maneira pela qual acontece a propagação.

Três eminentes matemáticos empenharam-se para suprir esta pedra angular da eletrodinâmica.

862.] Em uma memória apresentada na Sociedade Real de Göttingen em 1858, mas retirada depois, e publicada apenas no *Annalen* de Poggendorff, v. cxxxi. p. 237-263, em 1867, após a morte do autor, Bernhard Riemann deduz os fenômenos de indução de correntes elétricas de uma forma modificada da equação de Poisson:

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+4\pi\rho=\frac{1}{a^2}\frac{d^2V}{dt^2},$$

onde V é o potencial eletrostático, e a uma velocidade.

Esta equação é da mesma forma que aquelas que expressam a propagação de ondas e outros distúrbios em meios elásticos. O autor, contudo, parece evitar fazer menção explícita de qualquer meio através do qual acontece a propagação. (NOTA 25)

A pesquisa matemática feita por Riemann foi examinada por Clausius**, que não aceita a validade dos processos matemáticos, e mostra que a hipótese de que o potencial se propaga como a luz não leva à fórmula de Weber, nem às leis conhecidas da eletrodinâmica.(NOTA 26)

863.] Clausius examinou também um trabalho muito mais elaborado de C. Neumann sobre os "Princípios da Eletrodinâmica."† Neumann, contudo, assinalou‡ que sua teoria da transmissão do potencial de uma partícula elétrica a outra é bem diferente da proposta por Gauss, adotada por Riemann, e criticada por Clausius, na qual a propagação é como a da luz. Existe, ao contrário, a maior diferença possível entre a transmissão de potencial, de acordo com Neumann, e a propagação da luz. (NOTA 27)

Um corpo luminoso irradia luz em todas as direções, cuja intensidade depende apenas do corpo luminoso, e não da presença do corpo que é iluminado por ele.

Uma partícula elétrica, por outro lado, emite um potencial, cujo valor, ee'/r, depende não apenas de e, a partícula emissora, mas de e', a partícula receptora, e da distância r entre as partículas *no instante de emissão*.

No caso da luz a intensidade diminui à medida em que a luz é propagada para além do corpo luminoso; o potencial emitido flui até o corpo no qual ele age sem a menor alteração do seu valor original.

A luz recebida pelo corpo iluminado é, em geral, apenas uma fração da que o atinge, o potencial recebido pelo corpo atraído é idêntico, ou igual, ao potencial que chega até ele.

Além disso, a velocidade de transmissão do potencial não é, como a da luz, constante em relação ao espaço ou ao éter, mas ao contrário, como a de um projétil, constante em relação à velocidade da partícula emissora, no instante da emissão.

Parece, portanto, que para entender a teoria de Neumann, devemos formar uma representação muito diferente do processo de transmissão do potencial daquela a que estávamos acostumados ao considerar

* 19 de março de 1845, *Werke*, vol. v. 629.

** Pogg. v. cxxxv. p. 612.

† Tübingen, 1868.

‡ *Mathematische Annalen*, i. 317.

a propagação da luz. Se isso poderá ser aceito como a "Construirbar Vorstellung" (NOTA 28) do processo de transmissão, como parecia necessário para Gauss, não posso dizer, mas não fui capaz eu mesmo de construir uma representação mental consistente da teoria de Neumann.

864.] O professor Betti*, de Pisa, tratou o assunto de um modo diferente. Ele supõe que os circuitos fechados nos quais fluem as correntes elétricas consistem de elementos cada um dos quais é polarizado periodicamente, isto é, a intervalos eqüidistantes de tempo. Estes elementos polarizados agem uns sobre os outros como se fossem pequenos imãs cujos eixos estão na direção da tangente aos circuitos. O tempo periódico desta polarização é o mesmo em todos os circuitos elétricos. Betti supõe acontecer a ação de um elemento polarizado no outro a distância, não instantaneamente, mas depois de um tempo proporcional à distância entre os elementos. Desse modo obtém expressões para a ação de um circuito elétrico no outro, que coincidem com aquelas que são verdadeiras. Clausius, contudo, também neste caso criticou algumas partes dos cálculos matemáticos que não discutiremos aqui.

865.] Parece haver, nas mentes destes homens eminentes, algum preconceito, ou objeção *a priori*, contra a hipótese de um meio onde acontecem os fenômenos da radiação da luz e do calor, e as ações elétricas a distância. É verdade que houve tempo em que aqueles que especularam quanto às causas dos fenômenos físicos tinham o hábito de explicar cada tipo de ação a distância por meio de um fluido especial etéreo, cuja função e propriedade era produzir essas ações. Eles preenchiam todo o espaço acima de três ou quatro vezes com éteres de diferentes tipos, (NOTA 29) cujas propriedades foram inventadas meramente para 'salvar as aparências', de tal forma que os pesquisadores mais racionais estavam, ao contrário, desejando aceitar não apenas a lei precisa de Newton de atração a distância, mas até mesmo o dogma de Cotes** de que ação a distância é uma das propriedades primárias da matéria, e que nenhuma explicação pode ser mais inteligível do que esse fato. (NOTA 30) Por isso a teoria ondulatória da luz encontrou muita oposição, dirigida não contra seu fracasso em explicar os fenômenos, mas contra sua suposição da existência de um meio no qual a luz se propaga.

866.] Vimos que as expressões matemáticas para a ação eletrodinâmica levaram, na mente de Gauss, à convicção de que uma teoria da propagação da ação elétrica no tempo seria a pedra angular da eletrodinâmica. (NOTA 31) Contudo não somos capazes de conceber propagação no tempo, exceto como o vôo de uma substância material através do espaço, ou como a propagação de uma condição de movimento ou tensão num meio preexistente no espaço. Na teoria de Neumann, a concepção matemática chamada Potencial, que somos incapazes de conceber como uma substância material, se supõe ser projetada de uma partícula para a outra, de maneira bem independente de um meio, e que, como Neumann assinalou, é extremamente diferente da propagação da luz. Nas teorias de Riemann e Betti pareceria que a ação é propagada de uma maneira mais similar àquela da luz.

Mas em todas essas teorias a questão que naturalmente ocorre é: Se alguma coisa é transmitida de uma partícula a outra a distância, qual é a sua condição depois de ter deixado uma partícula e antes de alcançar a outra? Se essa alguma coisa é a energia potencial das duas partículas, como na teoria de Neumann, como devemos conceber essa energia existindo num ponto do espaço, que não coincide nem com uma partícula nem com a outra? De fato, sempre que a energia é transmitida de um corpo a outro no tempo, deve existir um meio ou substância no qual a energia existe depois de deixar um corpo e antes dela atingir o outro, pois a energia, como Torricelli† observou, "é uma quinta-essência de natureza tão sutil que não pode ser contida em qualquer recipiente, exceto na substância íntima das coisas materiais". Portanto, todas essas teorias levam à concepção de um meio no qual acontece a propagação, e se admitimos esse meio como uma hipótese, penso que ele tem de ocupar um lugar proeminente em nossas pesquisas e que temos que nos esforçar em construir uma representação mental de todos os detalhes de sua ação, e esse foi meu objetivo constante neste tratado. (NOTAS 32 e 33)

---

* *Nuovo Cimento*, xxvii, 1868.

** Prefácio do *Principia* de Newton, segunda edição.

† *Lezione Accademiche*, Firenze, 1715, p. 25.

NOTAS DO TRADUTOR

1 - A. M. Ampère (1775 - 1836). Ampère chegou a este resultado final em 1823, em seguida a um trabalho experimental e teórico intenso que realizou após a descoberta fundamental de Oersted, em 1820, da deflexão de uma agulha magnética colocada próxima e paralela a um fio com corrente. Este trabalho de Oersted já está traduzido para o português, com tradução comentada de MARTINS, R. de A.; Experiências sobre o efeito do conflito elétrico sobre a agulha magnética. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, v. 10, p. 115 - 122, 1986. Para uma excelente discussão do trabalho de Oersted, seus antecedentes e sua influência, ver: MARTINS, R. de A.; Oersted e a descoberta do eletromagnetismo. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, v. 10, p. 89 - 114, 1986. O trabalho mais importante de Ampère contendo o conjunto de suas descobertas experimentais e teóricas sobre o eletromagnetismo é de 1825 (republicado em forma de livro em 1958): AMPÈRE, A. M.; Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduite de l'expérience. *Mémoire de l'Académie Royale des Sciences*, Paris v. 6, p. 175-387, 1825. AMPÈRE, A. M.; *Théorie Mathématique des Phénomènes Électrodynamiques Uniquement Déduite de l'Expérience*, Paris: Blanchard, 1958. Tradução parcial para o inglês em TRICKER, R. A. R.; On the mathematical theory of electrodynamic phenomena, experimentally deduced. *Early Electrodynamics - The First Law of Circulation*, Oxford, Pergamon, 1965, p. 155-200.

Em notação vetorial moderna, onde $d\vec{s}$ é um elemento de comprimento paralelo à direção da corrente, e no sistema internacional de unidades, a lei de Ampère para a força que o elemento $id\vec{s}$ exerce no elemento $i'd\vec{s}\,'$ é dada por

$$\vec{F}=\frac{\mu_0}{4\pi}ii'\frac{\hat{r}}{r^2}[2d\vec{s}.d\vec{s}\,'-3(\hat{r}.d\vec{s})(\hat{r}.d\vec{s}\,')]$$

onde $r\equiv|\vec{x}-\vec{x}\,'|$ é a distância entre os dois elementos de corrente, e $\hat{r}\equiv(\vec{x}-\vec{x}\,')/r$ é um vetor unitário que aponta de $i'd\vec{s}\,'$ para $id\vec{s}$. Vale a pena ressaltar que Maxwell, no artigo 528 deste livro, chamou a esta força de lei cardinal (mais importante) da eletrodinâmica, e chamou Ampère de "Newton da eletricidade". Whittaker diz que este trabalho de 1825 de Ampère é "uma das memórias mais célebres da história da filosofia natural". WHITTAKER, E.T. *A History of the Theories of Aether and Electricity*, v. 1 - *The Classical Theories*, New York: Humanities Press, 1973, p. 83. Na fórmula (1) de Maxwell, ε é o ângulo entre $d\vec{s}$ e $d\vec{s}\,'$, e r é a distância entre os dois elementos.

Nos artigos 502 a 510 deste livro Maxwell mostrou como Ampère chegou a este resultado. Para relacionar a notação vetorial moderna com a notação usada por Ampère e Maxwell basta observar que $dr/ds=-\cos\alpha$, $dr/ds'=-\cos\beta$, $rd^2r/dsds'=-\cos\alpha\cos\beta-\cos\varepsilon$; onde α é o ângulo entre $d\vec{s}$ e $\hat{r}$, $\pi-\beta$ é o ângulo entre $d\vec{s}\,'$ e $\hat{r}$ e ε é o ângulo entre $d\vec{s}$ e $d\vec{s}\,'$. Estes resultados são desenvolvidos por Maxwell nos artigos 511 e 512.

2. Ampère usava o sistema eletrodinâmico de unidades; enquanto Maxwell e outros adotavam o sistema eletromagnético. A diferença fundamental entre os dois sistemas é que a carga ou corrente no sistema eletrodinâmico (Q ou I) têm um valor $\sqrt{2}$ vezes maior do que a mesma grandeza no sistema eletromagnético (q ou i): $Q=\sqrt{2}\,q$, $I=\sqrt{2}\,i$.

3 - Não seria necessário fazer a suposição de que v e v' são constantes, e Maxwell o faz aqui provavelmente por razões de simplicidade. Com a lei de Weber se chega na lei de Ampère mesmo com velocidades variáveis (Maxwell só vai tratar com velocidades arbitrárias que são função do tempo ao derivar a lei de Faraday a partir da força de Weber).

4 - Em termos vetoriais modernos vem: $u\equiv|\vec{v}-\vec{v}\,'|=\sqrt{(\vec{v}-\vec{v}\,').(\vec{v}-\vec{v}\,')}$. O que Maxwell representa por ∂ não deve ser confundido com a derivada parcial, já que nada mais é, como ele mesmo afirma, que a derivada total quando $\vec{x}$ e $\vec{x}\,'$ são expressos em termos do tempo. Logo, o que Maxwell chama de $\frac{\partial r}{\partial t}$ seria escrito hoje em dia como $\dot{r}\equiv\frac{dr}{dt}$. Em termos vetoriais vem

$\dot{r} = {}^{dr}/_{dt} = d\sqrt{\vec{x} - \vec{x}\,') \cdot (\vec{x} - \vec{x}\,')}\ / \ dt = (\vec{x} - \vec{x}\,') \cdot (\vec{v} - \vec{v}\,')/r$. Deve-se tomar cuidado pois nem sempre $\dot{r} = u$.

O que Maxwell escreve como derivada total hoje em dia seria escrito como derivada parcial. Por exemplo, para se chegar na Eq. (4) pode-se partir do fato de que a distância entre duas cargas é função da posição nos fios. Logo $r = r\,(s, s')$. Daí vem $\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial r}{\partial s'}\frac{ds'}{dt}$. Lembrando que a velocidade de cada carga é dada por $v \equiv {}^{ds}/_{dt}$ e $v' \equiv {}^{ds'}/_{dt}$ se obtém a Eq. (4).

5 - FECHNER, G.T. *Annalen der Physik*, v. 64, p. 337, 1845.

6 - Há um aspecto importante relacionado com isto que deve ser discutido aqui. O ponto principal é que de acordo com a teoria de Weber, a ser discutida mais para frente, e outras do mesmo tipo como a de Riemann, um fio neutro, estacionário, com uma corrente constante, vai exercer uma força sobre uma carga parada colocada próxima ao fio, caso o módulo da velocidade das cargas positivas do fio seja diferente do módulo da velocidade das cargas negativas. Já a teoria do Maxwell e outras como a de CLAUSIUS, R. (On a new fundamental law of electrodynamics. *Philosophical Magazine*, v. 1, p. 69-71, 1876, On the bearing of the fundamental law of electrodynamics toward the principle of the conservation of energy, and on a further simplification of the former. *Philosophical Magazine*, v. 1, p. 218-222, 1876, On the employment of the electrodynamic potential for the determination of the ponderomotive and electromotive forces. *Philosophical Magazine*, v. 10, p. 255-279, 1880); prevêem uma força nula de uma corrente estacionária sobre uma carga em repouso, qualquer que seja a velocidade das cargas positivas e negativas da corrente. Esta força nunca foi detectada durante o século passado, e este foi um dos fatores que contribuiu para o êxito da teoria de Maxwell e para um relativo esquecimento da lei de Weber neste século. Na época de Maxwell não se sabia a natureza da corrente elétrica e hipóteses como a de Fechner eram discutidas livremente. A primeira estimativa da velocidade de *drifting* (velocidade média de migração) das cargas numa corrente elétrica num condutor metálico (velocidade da ordem de alguns milímetros por segundo) e do fato de que apenas as cargas negativas se movem só começou a aparecer por volta de 1880 com os trabalhos de E. H. Hall, do efeito Hall. Com esta ordem de grandeza se conclui que a força de Weber neste caso, se existir, deve ser da ordem de $10^{-13} N$ para uma corrente de $10^{3}\,A$ num fio de cobre usual, e uma carga eletrostática típica de laboratório de $10^{-10} C$ a uma distância de 10 cm do fio. Aparelhagem para detectar uma força tão pequena sempre foi muito difícil, e o melhor experimento de que temos conhecimento para tentar detectar tal força é devido a Edwards e colaboradores (EDWARDS, W. F., KENYON, C. S. & LEMON, D. K. Continuing investigation into possible electric fields arising from steady conduction currents. *Physical Review D*, v. 14, p. 922-938, 1976). Embora eles tenham encontrado uma força com esta ordem de grandeza, o assunto ainda está em discussão (BARTLETT, D. F. & WARD, B. F. L. Is an electron's charge independent of its velocity? *Phys. Rev. D*, v. 16, p. 3453-3458, 1977; SANSBURY, R. Detection of a force between a charged metal foil and a current-carrying conductor. *Review of Scientific Instruments*, v. 56, p. 415-417, 1985; IVEZIC, T. Electric fields from steady currents and unexplained electromagnetic experiments. *Physical Review* A, v. 44, p. 2682-2685, 1991), e nenhuma conclusão pode ser tirada até o momento. De qualquer forma isto mostra que não é tão simples assim distinguir experimentalmente entre diversas teorias rivais. Para uma análise destes experimentos de acordo com a eletrodinâmica de Weber ver ASSIS, A. K. T. Can a steady current generate an electric field? *Physics Essays*, v. 4, p. 109-114, 1991.

7 - Esta nota foi escrita por J. J. Thomson em 1891 quando preparou a terceira edição deste livro do Maxwell (que havia morrido em 1879), como foi enfatizado por Thomson no Prefácio a esta edição. Este artigo do Thomson está publicado no *Report of the British Association for the Advancement of Science* (B. A. Report), e seu título é: "Report on electrical theories".

8 - Um aspecto importante deve ser ressaltado aqui. Weber partiu da força de Ampère entre elementos de corrente para derivar sua força entre cargas elétricas. Para isto utilizou a hipótese de Fechner, como Maxwell afirma. Desde o fim do século passado se sabe que a hipótese de Fechner não é verdadeira, já que a corrente em condutores metálicos usuais é devida apenas ao movimento dos elétrons. Devido a isto se pensou durante muito tempo que a eletrodinâmica de Weber estaria errada pois se achava que ela dependia necessariamente da hipótese de Fechner em sua forma completa. Porém, como mostramos recentemente, pode-se derivar a força entre elementos de corrente de Ampère a partir da força de Weber mesmo quando os íons positivos estão parados em relação ao fio e apenas os elétrons se movem. Para isto basta supor apenas a força de Weber e a neutralidade dos elementos de corrente. Ver ASSIS, A. K. T. Deriving Ampère's law from Weber's law. *Hadronic Journal*, v. 13, p. 441-451, 1990.

9 - A fórmula de C. F. Gauss (1777 - 1855) em notação moderna e no sistema internacional de unidades pode ser escrita como (ver a nota 4 para as definições de u e de r):

$$\vec{F}=\frac{ee'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\left[1+\frac{u^2}{c^2}-\frac{3}{2}\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right]$$

$$=\frac{ee'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\left[1+\frac{(\vec{v}-\vec{v}\,')\cdot(\vec{v}-\vec{v}\,')}{c^2}-\frac{3}{2}\left(\frac{(\vec{x}-\vec{x}\,')\cdot(\vec{v}-\vec{v}\,')}{r}\right)^2\frac{1}{c^2}\right]$$

Já a fórmula de W. Weber (1804 - 1891) fica

$$\vec{F}=\frac{ee'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\left[1-\frac{\dot{r}^2}{2c^2}+\frac{r\ddot{r}}{c^2}\right]$$

$$=\frac{ee'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r_2}\left[1+\frac{u^2}{c^2}-\frac{3}{2}\frac{\dot{r}^2}{c^2}+\frac{(\vec{x}-\vec{x}\,')\cdot(\vec{a}-\vec{a}\,')}{c^2}\right]$$

Daí pode-se ver que as duas fórmulas diferem apenas no termo em $(\vec{x}-\vec{x}\,')\cdot(\vec{a}-\vec{a}\,')/c^2$. Ainda sobre estas fórmulas é bom lembrar que

$$\vec{v}\equiv\frac{d\vec{x}}{dt},\quad \vec{v}\,'\equiv\frac{d\vec{x}\,'}{dt},\quad \vec{a}\equiv\frac{d^2\vec{x}}{dt^2},\quad \vec{a}\,'\equiv\frac{d^2\vec{x}\,'}{dt^2},$$

$$\ddot{r}\equiv\frac{d\dot{r}}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{1}{r}\left[u^2+(\vec{x}-\vec{x}\,')\cdot(\vec{a}-\vec{a}\,')-\dot{r}^2\right].$$

Weber e Gauss foram amigos e trabalharam juntos na Universidade de Göttingen a partir de 1831. Em 1837 Weber perdeu seu cargo de professor em Göttingen por envolvimento em problemas políticos e em seguida a isto ficou sendo professor na Universidade de Leipzig, onde Fechner já lecionava. Retomou sua posição na universidade de Göttingen em 1848, e lá trabalhou o restante de sua vida. Para uma biografia de Weber ver ASSIS, A. K. T. Wilhelm Eduard Weber (1804-1891) - Sua vida e sua obra. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, v. 5, p. 53-59, 1991.

Nas equações de Gauss e Weber a constante c que aparece tem dimensão de velocidade e seu valor foi determinado experimentalmente pela primeira vez por Weber e R. Kohlrausch em 1856 como sendo aproximadamente $3{,}1 \times 10^8 ms^{-1}$. Como as leis de Gauss e Weber foram construídas para que se pudesse derivar a partir delas a força entre elementos de corrente de Ampère, pode-se escrever, no sistema internacional de unidades, $c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$. Para uma discussão deste experimento extremamente importante de Weber e Kohlrausch ver ROSENFELD, L. The velocity of light and the evolution of electrodynamics. *Nuovo Cimento*, suplemento ao v. 4, p. 1630-1669, 1956/7, e KIRCHNER, F. Determination of the velocity of light from electromagnetic measurements according to W. Weber and R. Kohlrausch. *American Journal of Physics*, v. 25, p. 623-629, 1957.

Discussões detalhadas da eletrodinâmica de Weber se encontram em WHITTAKER (obra citada, v. 1, cap. 7); O'RAHILLY, A. *Electromagnetic Theory - A Critical Examination of Fundamentals* (New York: Dover, 1965), v. 2, cap. 11; WESLEY, J. P. *Foundations of Physics Letters*, v. 3, p. 443-469, 1990, "Weber electrodynamics, Part I: General theory, steady current effects"; idem, p. 471-490, "Weber electrodynamics, Part II: Unipolar induction, Z-antenna"; idem p. 581-605, "Weber electrodynamics, Part III: Mechanics, gravitation;"WESLEY, J. P. *Selected Topics in Advanced Fundamental Physics*, Blumberg, Alemanha: Benjamin Wesley Publisher, 1991, cap. 6; ASSIS, A. K. T., *Curso de Eletrodinâmica de Weber* (Notas de Física IFGW Número 5, Campinas: Setor de Publicações do Instituto de Física da UNICAMP, 1992.)

10 - Para ver isto basta supor cada elemento de corrente como sendo composto de cargas positivas e negativas de mesma grandeza ($e_1 = -e$, $e'_1 = -e'$), e somar as forças das cargas positivas e negativas de um elemento nas cargas positivas e negativas do outro elemento. Cada elemento de corrente pode então ser escrito como $i\vec{ds} = e(\vec{v}_+ - \vec{v}_-)$, $i'\vec{ds}\,' = e'(\vec{v}\,'_+ - \vec{v}\,'_-)$.

É bom enfatizar que a partir da lei de Weber se chega exclusivamente na força entre elementos de corrente de Ampère. Por outro lado a fórmula para a força entre dois elementos de corrente encontrada usualmente na literatura é

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ii'}{r_2}\, \vec{ds} * (\vec{ds}\,' * \hat{r})$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ii'}{r^2}\left[(\vec{ds}\,.\,\vec{ds}\,')\hat{r} - (\vec{ds}\,.\,\hat{r})\vec{ds}\,'\right].$$

Esta fórmula é devida a H. Grassmann (1809 - 1877) (Annalen der Physik 64, 1 (1845); tradução para o inglês em R. A. R. Tricker, obra citada, p. 201-214, "A new theory of electrodynamics"), e pode ser colocada na forma $i\vec{ds} * \vec{dB}$, onde

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i'}{r^2}(\vec{ds}\,' * \hat{r}).$$

Esta expressão para o campo magnético é devida a Biot (1774-1862) e Savart (1791-1841) e é de 1820. Seus dois trabalhos mais importantes a este respeito já se encontram traduzidos para o inglês em TRICKER, R. A. R., obra citada, p. 118-119, "Note on the magnetism of Volta's battery"; e p. 119-139, "Magnetization of metals by electricity in motion." Embora estas duas expressões dêem o mesmo valor para a força de um circuito fechado num elemento de um outro circuito (para uma prova ver TRICKER, R. A. R., obra citada, p. 55-58), o mesmo talvez não ocorra para a força do restante do circuito numa parte dele mesmo. Nos últimos dez anos têm sido realizados uma série de experimentos envolvendo um circuito único para tentar distinguir entre estas duas expressões, mas o resultado ainda não é conclusivo: GRANEAU, P. Electromagnetic jet propulsion in the direction of current flow. *Nature*, v. 295, p. 311-312, 1982; PAPPAS, P. T. The original Ampère force and Biot-Savart and Lorentz forces. *Nuovo Cimento B*, v. 76, p. 189-197, 1983; GRANEAU, P. *Ampere - Neumann Electrodynamics of Metals*, Nonantum: Hadronic Press, 1985; GRANEAU, P. The Ampere-Neumann electrodynamics of metallic conductors. *Fortschritte der Physik*, v. 34, p. 457-503, 1986; CHRISTODOULIDES, C. Equivalence of the Ampère and Biot-Savart force laws in magnetostatics. *Journal of Physics A*, v. 20, p. 2037-2042, 1987; MOYSSIDES, P. G. Experimental verification of the Biot-Savart-Lorentz and Ampere force laws in a closed circuit, revisited. *IEEE Transactions on Magnets*, v. 25, p. 4313-4321, 1989; ROBSON, A. E. & SETHIAN, J. D. Railgun recoil, Ampere tension, and the laws of electrodynamics. *American Journal of Physics*, v. 60,

p. 1111-1117, 1992; SAUMONT, R. Mechanical effects of an electrical current in conductive media. 1. Experimental investigation of the longitudinal Ampère force. *Physics Letters A*, v. 165, p. 307-313, 1992.

Vale a pena salientar que embora Maxwell conhecesse a força de Grassmann (ver o artigo 526, p. 174 deste livro), preferia a fórmula de Ampère à de Grassmann. Por exemplo, no artigo 527 deste livro Maxwell afirma, depois de citar as forças de Grassmann e Ampère, que "a lei de Ampère é sem dúvida a melhor, pois ela é a única que faz as forças sobre os dois elementos não apenas iguais e opostas mas ao longo da linha reta que os une". Isto é, Maxwell prefere a força entre elementos de corrente de Ampère por ela sempre seguir a forma forte da lei de ação e reação de Newton. Já a força de Grassmann não segue sempre a lei de ação e reação para a força entre elementos de corrente nem mesmo na forma fraca.

Grassmann nunca teve uma educação formal em física e matemática (estudou como curso superior filologia e teologia). Durante toda a vida foi professor de matemática no segundo grau e nunca chegou a lecionar numa universidade, embora sempre almejasse a isto. Seu principal trabalho científico foi o desenvolvimento de uma álgebra generalizada onde não necessariamente valiam as propriedades comutativa e a da existência do inverso na multiplicação. Publicou seus resultados num livro em 1844 (apenas um ano depois da descoberta dos quatérnions por Hamilton) e numa segunda versão ampliada e melhorada em 1862. É no seu primeiro livro que aparecem claramente pela primeira vez os modernos produtos escalares e vetoriais. Em 1845 publicou sua lei de força entre elementos de corrente como sendo uma aplicação importante de sua álgebra generalizada. Este trabalho permaneceu esquecido por muito tempo (como seus dois livros) até que Clausius reobteve a mesma lei de força independentemente em 1877. No mesmo ano Grassmann publicou um outro artigo reivindicando prioridade e foi através deste artigo que Gibbs ficou sabendo do trabalho de Grassmann em eletromagnetismo e álgebra. A partir deste período a lei de Grassmann passou a ser mais conhecida e usada. Para estas e outras informações ver o interessante livro de CROWE, M. J. *A history of Vector Analysis - The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, (New York: Dover, 1985).

11 - Este trabalho extremamente importante de W. Weber já se encontra traduzido para o inglês: TAYLOR, R. ed. On the measurement of electrodynamic forces. *Scienific Memoirs*. London: Johnson Reprint Corporation, v. 5, p. 489-529, 1966, Weber tem outros dois trabalhos importantes (um de 1851 e outro de 1871) traduzidos para o inglês. On the measurement of electric resistance according to an absolute standard *Philosophical Magazine*, v. 22, p. 226-240 e 261-269, 1861; Electrodynamic measurements relating specially to the principle of the conservation of energy. *Philosophical Magazine*, v. 43, p. 1-20 e 119-149, 1872. Há vários outros artigos de Weber traduzidos para o inglês tratando de medidas do magnetismo terrestre, da construção de instrumentos para medir o geomagnetismo, do diamagnetismo e de outros assuntos nos 7 volumes da coleção *Scientific Memoirs*, editada por R. Taylor, obra citada.

Suas obras completas podem ser encontradas nas *Werke* de Wilhelm Weber (Berlin, Springer): v. 1, *Akustik, Mechanik, Optik und Wärmelehre*, W. Voigt (editor), (1892). v. 2, *Magnetismus*, E. Riecke (editor), (1892), v. 3, *Galvanismus und Elektrodynamik*, primeira parte, H. Weber (editor), (1893). v. 4, *Galvanismus und Elektrodynamik*, segunda parte, H. Weber (editor), (1894). v. 5, com E. H. Weber, *Wellenlehre auf Experimente gegrundet oder uber die Wellen tropfbarer Flussigkeiten mit Anwendung auf die Schall-und Lichtwellen*, E. Riecke (editor), (1893). v. 6, *Mechanik der Menschlichen Gehwerkzeuge*, F. Merkel e O. Fischer (editores), (1894).

12 - Esta energia potencial de Weber que depende não apenas da distância entre as cargas mas também de suas velocidades, é o primeiro exemplo que surgiu na física de uma energia potencial generalizada.

13 - Uma outra maneira de derivar a força de Weber é usando o formalismo Lagrangeano e definindo, como Weber o fez em 1871 (ver nota 11), uma função U (notar que U é diferente de ψ pela troca de sinal antes de $\dot{r}$) dada por:

$$U = \frac{ee'}{r}\left[1 + \frac{\dot{r}^2}{2c^2}\right]$$

A força de Weber é então obtida por (WHITTAKER, obra citada, p. 203)

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{r}}\right),$$

ou então pode-se usar coordenadas cartesianas (A. O'RAHILLY, obra citada, p. 526):

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial v_x}\right), \text{ etc}$$

14 - Outra forma de se ver a conservação da energia E com a lei de Weber é simplesmente fazendo a derivada temporal de $T + \psi$, onde $T = m\vec{v} \cdot \vec{v}/2 + m'\vec{v}\,' \cdot \vec{v}\,'/2$ é a energia cinética. Usando então a segunda e terceira leis do movimento de Newton o resultado sai diretamente (ver WESLEY, J. P., Weber electrodynamics extended to include radiation. *Speculations in Science and Technology*, v. 10, p. 47-61 1987).

Usando o formalismo Lagrangeano, com a Lagrangeana dada por $L = T - U$, com U definido na nota anterior, pode-se obter a Hamiltoniana de Weber com o procedimento usual, $H = \sum_{k=1}^{6} \dot{q}k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L$, onde $\dot{q}k = \frac{dq_k}{dt}$, e q_k é uma coordenada generalizada. Por este caminho também se obtém $H = E = T + \psi =$ constante.

15 - A segunda referência nesta nota de rodapé é uma tradução para o inglês da primeira: HELMHOLTZ, H. v. On the theory of electrodynamics. *Philosophical Magazine*, v. 44, p. 530-537, 1872.

16 - O que se pode dizer sobre a crítica de H. Helmholtz (1821 - 1894) é que ele conseguiu descobrir uma conseqüência importante da lei de Weber, mas antes desta lei ser aceita ou rejeitada ela teria de ser colocada à prova em experiências de laboratório. Infelizmente parece que nunca foi realizada nenhuma experiência para verificar esta conseqüência da lei de Weber apontada por Helmholtz. Não é claro também que a velocidade da carga de prova aumentaria sem limites já que para se concluir isto teria de ser analisado o movimento da carga acelerada levando em conta a perda de energia da carga por ela emitir radiação eletromagnética. Isto está além da teoria de Weber mas hoje em dia não se pode esquecer este aspecto. Esta análise mais completa nunca foi feita. Além disto não se conhece muito bem o comportamento de corpos se movendo a altíssima velocidade em meios resistivos. Por exemplo sabe-se que as forças de atrito $F = -bv$ ou $F = -bv^2$ só são válidas para baixas velocidades e é difícil especular sobre (e testar) o comportamento de uma carga se movendo com velocidade próxima à da luz num meio resistivo.

Um outro aspecto que não era do conhecimento nem de Helmholtz nem de Weber é que não se pode na prática aumentar indefinidamente, como supunha Helmholtz, o segundo termo do coeficiente de v^2 na Eq. (22). O motivo é que este segundo termo é proporcional ao potencial elétrico da casca esférica. No ar, por exemplo, só se poderia carregar uma casca esférica de 1 metro de raio até o potencial de 3,3 x $10^6 V$ já que acima disto ocorre o efeito corona que descarrega a casca esférica (o efeito corona no ar ocorre para um campo elétrico de 3,3 x $10^6 v/m$). Mesmo os grandes geradores eletrostáticos de hoje em dia não conseguem gerar um potencial muito acima de 20 MV.

Além disto a tendência de qualquer carga com o coeficiente de v^2 negativo num meio resistivo seria a de seguir aceleradamente em linha reta paralela a $\vec{v}$, e não seguir em linha curva. Com isto então a carga deixaria a casca esférica muito rapidamente, antes de sua velocidade atingir altos valores, e fora da casca a força decresce com o quadrado da distância, como é bem conhecido. Isto também mostra que a divergência de Helmholtz não deve ocorrer na prática.

Mesmo Maxwell parece reconhecer que é muito difícil testar este aspecto apontado por Helmholtz, como se pode perceber por sua primeira frase no artigo seguinte (855).

Recentemente propusemos experimentos específicos para testar esta e outras conseqüências similares da eletrodinânica de Weber: ASSIS, A. K. T. Centrifugal electrical force. *Communications in Theoretical Physics*, v. 18, p. 475-478, 1992.

Deve ainda ser enfatizado que Phipps conseguiu superar a crítica de Helmholtz à eletrodinâmica de Weber supondo que a lei de Weber é apenas uma aproximação válida até segunda ordem em $\dot{r}/c$: PHIPPS

Jr., T. E. Toward modernization of Weber's force law. *Physics Essays*, v. 3, p. 414-420, 1990; PHIPPS Jr., T. E. Weber-type laws of action-at-a-distance. *Apeiron*, v. 8, p. 8-14, 1990. A energia potencial de interação entre duas cargas proposta por Phipps é dada por $Up = q_1 q_2 (1 - \dot{r}^2/c^2)^{1/2}/4\pi \varepsilon_0 r$.

17 - No sistema internacional de unidades e em notação vetorial, a energia potencial de interação entre dois elementos de corrente, de acordo com a Eq. (20) de Weber, fica:

$$dU = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ii'}{r} (\hat{r} \cdot \vec{ds})(\hat{r} \cdot \vec{ds}'),$$

que deve ser distinguido da energia potencial usada usualmente nos livros didáticos, devida a F. E. Neumann (1798 - 1895) em 1845:

$$dU = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ii'}{r} (\vec{ds} \cdot \vec{ds}')..$$

Como é bem conhecido (WHITTAKER, obra citada, p. 233-4), estas duas expressões dão o mesmo resultado quando integradas em qualquer um dos circuitos fechados.

18 - Como já foi visto, a força de Weber satisfaz os princípios de ação e reação na forma forte, ou seja, a força de q_1 em q_2 é não apenas igual e oposta à força de q_2 em q_1, mas está ao longo da reta que une as duas cargas. Portanto obtém-se conservação de momento linear e angular com a força de Weber. Ela satisfaz também ao princípio de conservação de energia e com ela se derivam as forças de Coulomb e de Ampère. Como ela já é em si mesma uma força, faz o mesmo papel que a força de Lorentz ($\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} * \vec{B}$) no eletromagnetismo clássico. Nesta seção Maxwell vai mostrar que com a força de Weber se pode derivar também a lei de indução de Faraday (uma das equações de Maxwell).

Um outro resultado interessante obtido a partir da eletrodinâmica de Weber é que com ela se pode explicar as experiências de Kaufmann e Bucherer que foram feitas para mostrar a variação da massa com a velocidade. Usando apenas a força de Weber se pode interpretar estes experimentos sem supor variação da massa com a velocidade, como mostramos recentemente (ASSIS, A. K. T. Weber's law and mass variation. *Physics Letters A*, v. 136, p. 277-280, 1989; ASSIS, A. K. T. & CALUZI, J. J. A limitation of Weber's law. *Physics Letters A*, v. 160, p. 25-30, 1991. A expressão obtida com a lei de Weber concorda com a expressão relativista até segunda ordem em v/c, inclusive. A precisão destes experimentos não foi além da segunda ordem em v/c (ZAHN, C. T. & SPEES, A. H. A critical analysis of the classical experiments on the variation of electron mass. *Physical Review*, v. 53, p. 511-521, 1938; FARAGÓ, P. S. & JÁNOSSY, L. Review of the experimental evidence for the law of variation of the electron mass with velocity. *Nuovo Cimento*, v. 5, p. 1411-1436, 1957. Vê-se então que as duas explicações dão resultados completamente equivalentes para estes experimentos, mas partindo de conceitos físicos bem distintos.

De tudo isto se pode ver o quão poderosa é a lei de Weber e esta é uma das razões pelas quais Maxwell dedica o último capítulo de sua principal obra a analisar esta e outras teorias do mesmo tipo, apesar de serem tão diferentes das teorias e modelos físicos com que Maxwell trabalhou.

19 - Seja $\vec{F}_{ji}$ a força de Weber exercida pela carga q_j na carga q_i. Vamos supor, como fizeram Weber e Maxwell, que há uma carga positiva, e, e uma negativa, e_1, no elemento de correntes $i\vec{ds}$, enquanto que no elemento de corrente $i'\vec{ds}'$ temos e' e e'_1, respectivamente.

O que Maxwell está afirmando aqui é que a força de Ampère $\vec{F}^A$ exercida por $i\vec{ds}$ em $i'\vec{ds}'$ pode ser obtida a partir da força de Weber através de uma soma:

$$\vec{F}^A = \vec{F}_{ee'} + \vec{F}_{ee'_1} + \vec{F}_{e_1e'} + \vec{F}_{e_1e'_1}.$$

Já a força eletromotriz induzida no elemento $\vec{ds}\,'$ devido à corrente no elemento $\vec{ds}$, *fem*, deve ser calculada da seguinte maneira (lembrando que $e'_1 = -e'$):

$$fem = \frac{1}{2}\left[\frac{(\vec{F}_{ee'} + \vec{F}_{ele'})}{e'} - \frac{(\vec{F}_{ee'1} + \vec{F}_{ele'1})}{e'}\right] . \vec{ds}\,' .$$

20 - A Eq. (25) é obtida lembrando que neste referencial que ele adota a velocidade da carga e' é $\vec{v}\,'$ e a velocidade de carga e é $\vec{v} + \vec{V}$. Logo, o quadrado da velocidade relativa é $u^2 = [\vec{v}\,' - (\vec{v} + \vec{V})] . [\vec{v}\,' - (\vec{v} + \vec{V})]$.

21. A situação agora é mais geral que no caso da Eq. (4), ver notas 3 e 4, pois agora os fios se movem no espaço. Logo, a distância entre duas cargas é função não apenas da posição de cada carga nos fios mas também do tempo: $r = r(s,s',t)$.. Daí sai a Eq. (26) usando um procedimento similar ao indicado na nota 4.

22 - Deve ter havido algum erro tipográfico pois o 7º e o 8º termos do lado direito da Eq. (27) são

$$v' \frac{dv'}{ds'} \frac{dr}{ds'} + 2v \frac{d}{ds} \frac{dr}{dt} .$$

23 - Nota introduzida por J. J. Thomson em 1891.

24 - A lei de indução de correntes foi descoberta por M. Faraday (1791-1867) em 1831 (FARADAY, M. Experimental Researches in Electricity, em *Great Books of the Western World*, Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1952, v. 45, p. 265 em diante). A pessoa que mais influenciou Maxwell foi sem dúvida alguma Faraday. Faraday nunca teve uma educação científica formal e seus conhecimentos de matemática sempre foram muito restritos. Maxwell escreveu este livro para tentar colocar e expor todo o eletromagnetismo sob o ponto de vista de campos se propagando num éter, seguindo a noção de campo desenvolvida por Faraday. Expôs também neste tratado sua teoria eletromagnética da luz e sua grande descoberta da corrente de deslocamento, coisas que havia desenvolvido no período 1860 - 1864.

25 - Há uma tradução para o inglês deste trabalho de B. Riemann (1826 - 1866): A contribution to electrodynamics. *Philosophical Magazine*, v. 34, p. 368-372, 1867. Uma outra tradução para o inglês deste mesmo trabalho do Riemann, assim como uma tradução para o inglês de umas notas de aula proferidas por Riemann (Gravity, Electricity and Magnetism) se encontra no livro de Carol White, *Energy Potential: Toward a New Electromagnetic Field Theory* (New York: Campaigner, 1977). Como Riemann foi discípulo do Gauss e do Weber em Göttingen, é provável que eles compartilhassem muitas idéias não só de matemática mas também de eletromagnetismo, que sempre interessou muito a todos eles.

26 - Há uma tradução para o inglês deste trabalho do R. Clausius (1822 - 1888): Upon the new conception of electrodynamic phenomena suggested by Gauss. *Philosophical Magazine*, v. 37, p. 445-456, 1869.

27 - Há um artigo muito interessante sobre o debate entre Neumann e Clausius escrito por Thomas Archibald. Carl Neumann versus Rudolf Clausius on the propagation of electrodynamic potentials. *American Journal of Physics*, v. 54, p. 786-790, 1986.

28 - Tradução livre: Representação construída.

29 - Ou seja, um tipo de éter para propagar os efeitos ou interações elétricas, um outro tipo para as interações magnéticas, um outro para a gravitação, um outro para a luz, etc. O grande avanço da teoria do Maxwell, neste aspecto, foi unificar e identificar o "éter luminoso" com o "éter eletromagnético" (a inter-relação entre os fenômenos elétricos e magnéticos já havia sido obtida por Oersted, Ampère, Faraday, Weber e outros).

30 - A força de Isaac Newton (1642 - 1727) da gravitação universal, $F = Gm_1 m_2/r_2$, supondo não ser aproximada, é uma lei de ação a distância. Esta foi uma das principais dificuldades para a aceitação da teoria Newtoniana na Alemanha e na França, dominadas então pela teoria mecanicista de Descartes

(1596 - 1650) (ação somente por contato, vórtices, não existência do vácuo ou do espaço vazio, etc). Maxwell se refere aqui a Roger Cotes (1682 - 1716), que escreveu o prefácio à segunda edição do livro *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural* de Newton, publicada em 1713 (a primeira edição é de 1687). Esta grande obra de Newton já começou a ser traduzida para o português: I. Newton, *Principia - Princípios Matemáticos de Filosofia Natural* (São Paulo: Nova Stella/EDUSP, 1990), v. 1, tradução de T. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Gehring e M. H. C. Célia. O prefácio de Cotes à segunda edição encontra-se nas páginas IV a XVII desta tradução em português.

Muitos acharam que Newton compartilhava da visão de Cotes até que foi publicada uma carta de Newton a Bentley, datada de 25/02/1693, onde Newton diz textualmente: *The idea that one body may act upon another at a distance through a vacuum without the mediation of anything else by or through which their action or force may be conveyed from one to another is to me so great an absurdity that I believe no man who has in philosophical matters any competent faculty of thinking can ever fall into it* (ver COHEN, I. B., *The Newtonian Revolution*, Cambridge: Cambridge University Press, p. 117, 1980). Tradução deste trecho: "A idéia de que um corpo pode agir sobre o outro a distância através de um vácuo, sem a mediação de qualquer outra coisa pela qual ou através da qual sua ação ou força possa ser transmitida de um até o outro, é para mim um absurdo tão grande que não creio que nenhum homem que tenha em assuntos filosóficos qualquer faculdade competente de pensamento possa alguma vez aceitá-la."

31 - A força de Weber, supondo não ser aproximada, e portanto considerando-a como tal, é uma lei de ação a distância. Embora ela envolva a velocidade e a aceleração entre as cargas, ela é do tipo da lei de gravitação de Newton no sentido de que não envolve uma interação com velocidade finita de propagação. Isto significa que se temos dois corpos inicialmente separados por uma distância r, e se movermos rapidamente um deles (num intervalo de tempo $\Delta t << r/c$) tal que a distância entre ambos passe a ser r', o valor da força é modificado instantaneamente de acordo com qualquer lei de ação a distância, não importando quão grande seja o valor de r. Para muitos isto é um problema, já que a força só deveria mudar depois de passado um tempo r/c, onde c representa a suposta velocidade finita de propagação da força.

Recentemente aplicamos uma força do tipo da de Weber para a gravitação, fazendo entre outras coisas a substituição de ee' por mm' (ASSIS, A. K. T., On Mach's principle. *Foundations of Physics Letters*, v. 2, p. 301-318, 1989; ASSIS, A. K. T., On the absorption of gravity. *Apeiron*, v. 13, p. 3-11, 1992). Com este modelo conseguimos implementar o princípio de equivalência já que a proporcionalidade entre as massas inercial e gravitacional foi derivada como uma conseqüência da teoria, em vez de ser algo postulado, e foi derivada também a identidade entre um referencial inercial e o referencial das "estrelas fixas". Estes dois fatos são a base do Princípio de Mach (MACH, E. *The Science of Mechanics - A Critical and Historical Account of Its Development*, La Salle: Open Court, 1960). Como tudo foi feito de uma maneira relacional, sem o uso de conceitos tais como o de espaço absoluto, as idéias de Mach puderam ser obtidas e implementadas de maneira clara e precisa. Mas mesmo assim foi mantido a noção de ação a distância, como foi enfatizado por Peter Graneau ao fazer uma análise deste trabalho: The riddle of inertia. *Electronics World and Wireless World*, v. 96, p. 60-62, 1990.

Logo, é necessário alguma modificação da lei de Weber para obter uma interação entre cargas que se propague no tempo, como foi sugerido por Gauss. As principais tentativas neste sentido foram feitas por MOON, P. & SPENCER, D. E. A new electrodynamics. *Journal of the Franklin Institute*, v. 257, p. 369-382, 1954; WESLEY J. P. (ver notas 9 e 14); e BROWN, G. BURNISTON, *Retarded Action-at-a-Distance*, Luton: Cortney Publications, 1982. Em todos estes trabalhos a idéia é introduzir o tempo-retardado, isto é, $t - r/c$ em vez de t (r sendo a distância entre as cargas e c a velocidade da luz). Os introdutores destas idéias de potencial retardado na física foram Riemann (ver nota 25) e Ludwig v. Lorenz (1829 - 1891), que não deve ser confundido com o H. A. Lorentz (1853 - 1928) da força de Lorentz ($\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} * \vec{B}$), de 1895. Em seu trabalho (*Annalen der Physik*, v. 81, 243, 1867; tradução para o inglês: On the identity of the vibrations of light with electrical currents, em *Philosophical Magazine*, v. 34, p. 287-301, 1867), L. v. Lorenz, além de introduzir os potenciais retardados na física, desenvolveu uma teoria eletromagnética da luz independente da de Maxwell. É curioso que Maxwell não discute os trabalhos de Lorenz neste capítulo (para uma pequena análise das contribuições de Lorenz ver WHITTAKER, obra citada, p. 267-270; e O'RAHILLY, obra citada, v. 1, cap. 6, p. 181-202). O único trecho onde Maxwell cita os trabalhos de Lorenz em todo o livro é no capítulo XX (Teoria Eletromagnética da Luz), onde apresenta sua própria teoria eletromagnética da luz, e então numa nota ao artigo 805 Maxwell escreve: "Num artigo publicado no *Annalen de Poggendorff* [*Annalen der Physik*], em julho de 1867, p. 243-263, o Sr. Lorenz deduziu a partir das equações de Kirchhoff das correntes elétricas (*Pogg. Ann.* 102, 1857), pela adição de certos termos que não afetam qualquer resultado experimental, um novo conjunto de equações, indicando que a distribuição de força no campo eletromagnético pode ser concebida como surgindo da ação mútua dos elementos contíguos, e que ondas, consistindo de correntes elétricas transversas, podem ser propagadas, com uma velocidade comparável à da luz, em meios não-condutores. Ele considera portanto a perturbação que constitui a luz como idêntica a estas correntes elétricas, e mostra que os meios condutores têm de ser opacos a tais radiações.

Estas conclusões são similares às deste capítulo, embora obtidas por um método inteiramente diferente. A teoria apresentada neste capítulo [pelo Maxwell] foi publicada primeiro no *Phil. Trans.* de 1865, p. 459-512."

O primeiro trabalho de Maxwell em eletromagnetismo data de 1855/6 e está reproduzido em NIVEN, W. D. (ed.), *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell* (Cambridge: Cambridge University Press, 1890; republicado recentemente pela editora Dover, de New York), p. 155-229, "On Faraday's lines of force". Seu segundo trabalho em eletromagnetismo é de 1861/2, e está reproduzido em NIVEN (obra citada), p. 451-513, "On physical lines of force". É neste trabalho que introduz a corrente de deslocamento, embora não ainda a idéia de esta corrente de deslocamento gerar um campo magnético. A formulação completa de sua teoria eletromagnética é de 1864 e se encontra em NIVEN (obra citada), p. 526-597, "A dynamical theory of the electromagnetic field". É a este último artigo que Maxwell se refere nesta nota. Ele havia sido apresentado na Royal Society of London em 1864, e foi publicado em *Philosophical Transactions of the Royal Society* (London), v. 154, p. 459-512, 1865.

Em seu grande livro em que faz uma análise histórico-crítica dos fundamentos das várias teorias eletromagnéticas, O'RAHILLY diz (obra citada, cap. 6, p. 184) ser preferível por razões de lógica e simplicidade o procedimento e a formulação de Lorenz à corrente de deslocamento de Maxwell.

Sem entrar no mérito destas questões vamos apenas deixar indicado aqui um método independente de obter efeitos de radiação em teorias de ação a distância: GRANEAU, P. Inertia, gravitation and radiation time delays. *Hadronic Journal*, v. 10, p. 145-148 (1987).

Vale ressaltar que tanto Moon e Spencer quanto Wesley (artigos citados) obtiveram equações de onda equivalentes às de Maxwell para o potencial escalar elétrico e também para o potencial vetor magnético.

Há ainda um aspecto muito importante a ser enfatizado aqui. Embora a eletrodinâmica de Weber seja uma teoria de ação a distância, os primeiros a derivarem a equação de onda descrevendo a propagação de uma perturbação elétrica (na corrente ou na voltagem) caminhando ao longo de um fio com corrente foram Weber e Kirchhoff, trabalhando independentemente, em 1856 - 1857. Ambos utilizaram a lei de Weber acoplada à equação de continuidade ou de conservação de cargas. Num primeiro artigo publicado em 1849, Gustav Kirchhoff (1824 - 1887) havia estabelecido uma ligação entre a eletrostática e a eletrodinâmica ao identificar pela primeira vez a "força eletroscópica" de Ohm e a "tensão" em uma célula voltaica (bateria) com uma diferença de potencial eletrostático (tradução para o inglês deste artigo em On a deduction of Ohm's laws, in connexion with the theory of electro-statics, *Philosophical Magazine*, v. 37, p. 463-468, 1850). Em seus artigos de 1856 e 1857, Weber e Kirchhoff generalizaram a lei de Ohm ($V = RI$ *ou* $\vec{J} = \sigma\vec{E}$) para levar em conta os efeitos de auto-indutância do circuito. Com isto obtiveram um resultado marcante: Perturbações ou oscilações na corrente podem se propagar ao longo de um fio de resistividade desprezível com uma velocidade $c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$. Como vimos na introdução e na nota 9, esta grandeza puramente eletromagnética foi medida experimentalmente pela primeira vez em 1856, por Weber e Kohlrausch, que obtiveram seu valor aproximadamente igual ao da velocidade da luz no ar ou no meio interestelar. Neste caso de uma resistividade desprezível Kirchhoff e Weber obtiveram que a velocidade de propagação do sinal é independente da natureza dos condutores, da seção reta do fio, e da densidade de cargas livres em sua superfície. Além de obter a equação de onda correta, Kirchhoff ainda analisou pela primeira vez de maneira razoavelmente completa o problema da linha de transmissão. Tudo isto foi obtido com uma teoria de ação a distância, sem utilizar os conceitos de éter, de tempo retardado, ou de corrente de deslocamento. Deve ser ressaltado ainda que tudo isto veio antes de Maxwell apresentar sua teoria eletromagnética no período 1860 - 1865. O artigo fundamental de G. Kirchhoff já está traduzido para o inglês: On the motion of electricity in wires. *Philosophical Magazine*, v. 13, p. 393-412, 1857. Ver ainda WHITTAKER, obra citada, p. 224-236; ROSENFELD, artigo citado na nota 9; O'RAHILLY, obra citada, v. 2, p. 523-535; e JUNGNICKEL, C. & McCORMMACH, R., *Intellectual Mastery of Nature - Theoretical Physics from Ohm to Einstein* (Chicago: University of Chicago Press, 1986), v. 1, p. 87, 125-155 e 296-301.

32 - É curioso notar que a partir das experiências de Michelson-Morley de 1887 e da teoria da relatividade restrita de Einstein (1905) o éter foi abandonado como sendo inexistente ou no mínimo como desnecessário e inobservável. No entanto se mantêm as equações de Maxwell. E Maxwell, como ele mesmo afirma, desenvolveu suas teorias e equações supondo a existência física do éter e sua inter-relação com as cargas e a matéria em geral...

33 - Agradecimentos: Ao CNPq e à FAPESP pelo auxílio financeiro nos últimos anos. Ao Dario S. Thober, por muitas discussões relativas a este trabalho. Ao Dr. Roberto de Andrade Martins pelo estímulo e apoio que sempre me deu, e que têm sido de muita valia. Ao IMECC, UNICAMP, pela ajuda de secretaria na preparação do trabalho. E aos árbitros que analisaram este trabalho, por suas sugestões construtivas que enriqueceram bastante o artigo.

ANDRÉ K. T. ASSIS é professor do Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia do Instituto de Física da UNICAMP e professor colaborador do Departamento de Matemática Aplicada da mesma Universidade

Endereço: Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia - Instituto de Física - UNICAMP - 13.081-970 - Campinas, SP.