Arquimedes e a Lei da Alavanca

ou

Como Arquimedes Utilizou a Lei da Alavanca para Calcular o Volume de uma Esfera

André K. T. Assis
Instituto de Física
UNICAMP

www.ifi.unicamp.br/~assis

Arquimedes (287-212 a. C.)

- Nascimento em Siracusa, atual Itália.

- Filho do astrônomo Fidias.

- Muitos trabalhos enviados para Alexandria.

(biblioteca de ~ 300 a. C. até ~ 400 d. C.)

- Participou da defesa de Siracusa, então aliada de Cartago contra Roma.

- Obra Sobre o Equilíbrio dos Planos: Lei da alavanca e cálculo de centros de gravidade.

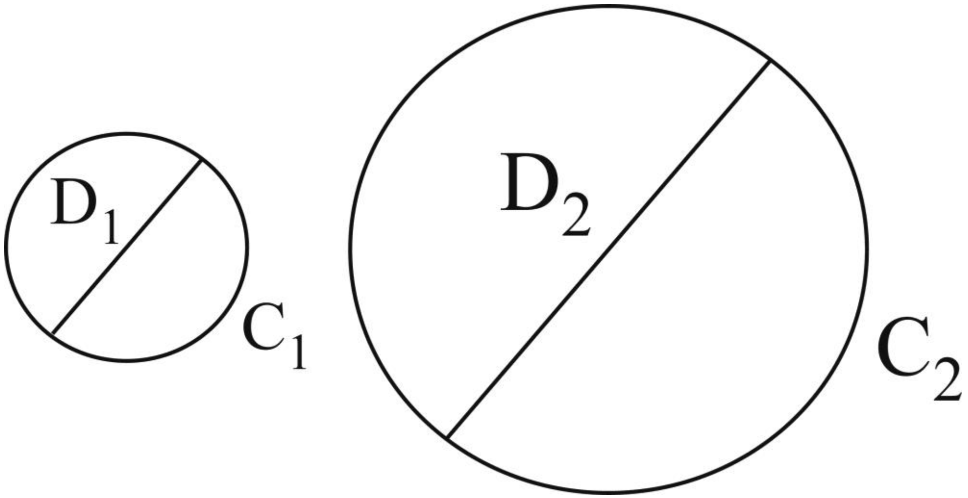
- Obra Sobre os Corpos Flutuantes: Lei do empuxo ou princípio de Arquimedes. Equilíbrio de corpos na água.

Euclides, Os Elementos (~ 300 a.C.)

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3$$



Por exemplo, se $D_2 = 3D_1$ então

$C_2 = 3C_1$, $A_2 = 9A_1$ e $V_2 = 27V_1$

Alguns resultados de Arquimedes relativos ao círculo (C) e à esfera (E):

$$\pi \approx 3{,}14$$

$$C = 2\pi\, r$$

$$A_C = \pi\, r^2$$

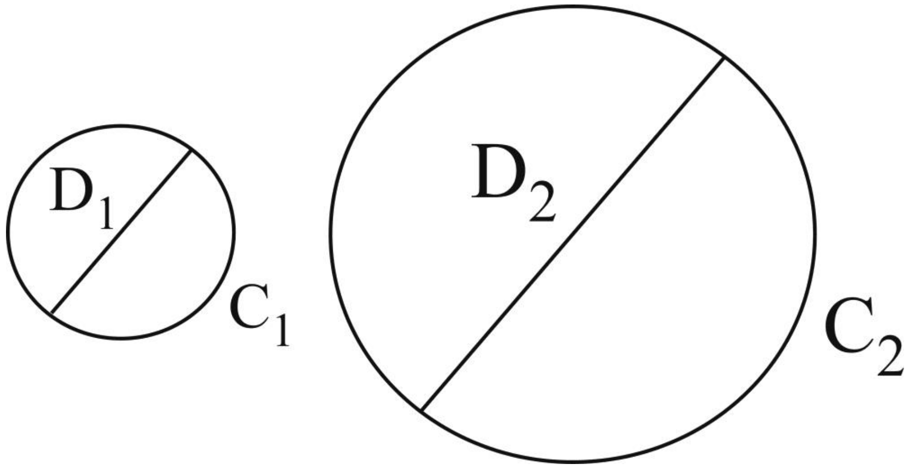
$$A_E = 4\pi\, r^2$$

$$V_E = \frac{4\pi\, r^3}{3}$$

C E

Obra de Arquimedes: Medida do Círculo

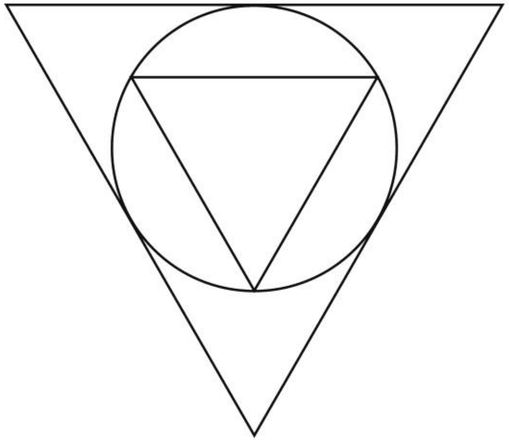
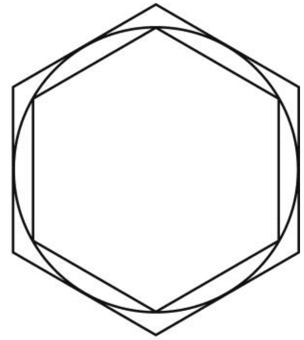
Por semelhança de figuras:



$$\frac{C_2}{D_2} = \frac{C_1}{D_1} = \text{constante} = \pi$$

$$C = D \cdot \text{constante} = 2r \cdot \pi = 2\pi r$$

Mas constante = π = ?

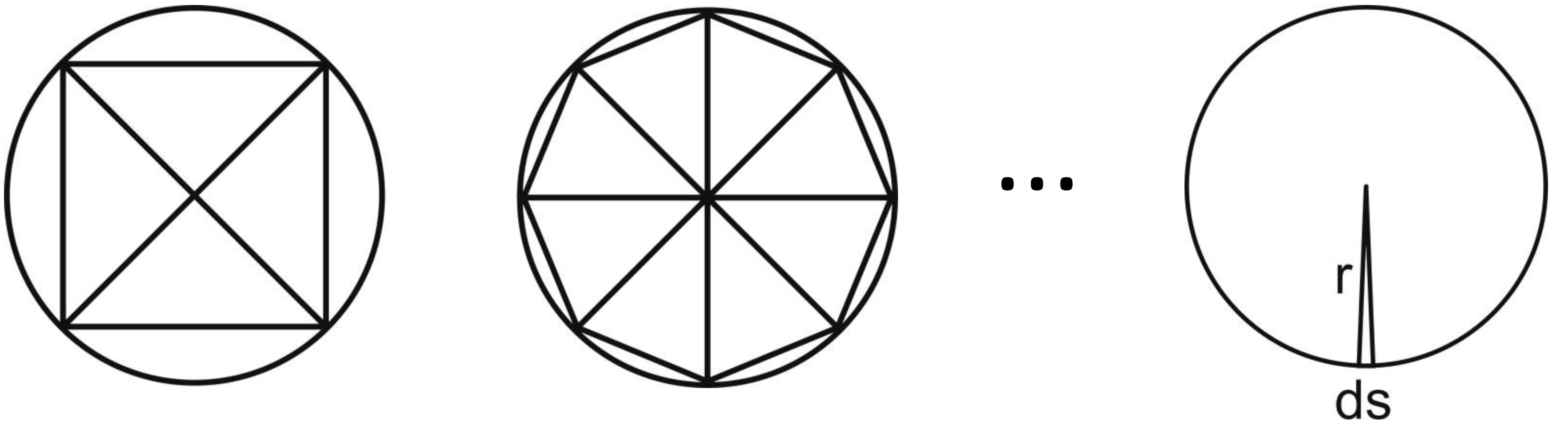
...

Inscrevendo e circunscrevendo dois polígonos de 96 lados em um círculo, Arquimedes provou o seguinte resultado:

"A razão da circunferência de qualquer círculo para seu diâmetro é maior do que 3 e 10/71 mas menor do que 3 e 1/7."

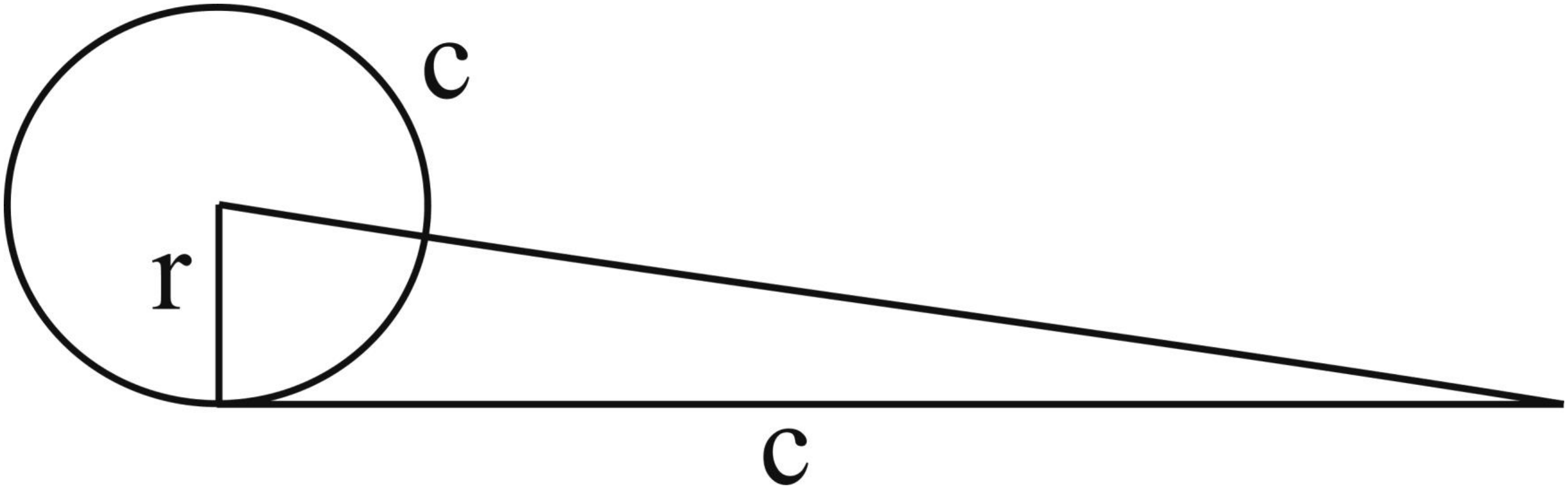
$$3{,}1408 < \frac{C}{D} < 3{,}1429$$

Também no trabalho Medida do Círculo:



$$A_C = \Sigma \mathrm{A_T} = \Sigma \frac{ds \cdot r}{2} = \frac{\Sigma ds \cdot r}{2} = \frac{(2\pi r) \cdot r}{2} = \pi r^2$$

“A área de qualquer círculo é igual a um triângulo retângulo no qual um dos lados ao redor do ângulo reto é igual ao raio, e o outro [lado é igual] à circunferência do círculo.”



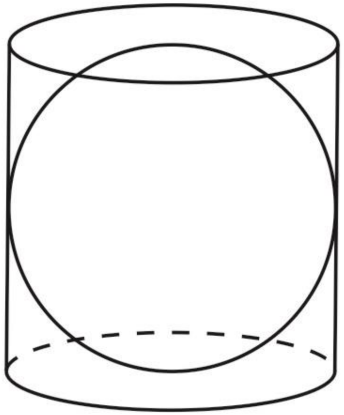
$$A_C = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

Outra obra de Arquimedes: Sobre a Esfera e o Cilindro

"A superfície de esfera é quatro vezes seu círculo máximo."

$$A_E = 4\left(\pi\, r^2\right)$$

"Todo cilindro cuja base é o círculo máximo de uma esfera e cuja altura é igual ao diâmetro da esfera é 3/2 [do volume] da esfera."



$$V_C = \frac{3}{2} V_E = \pi\, r^2 \cdot 2r$$

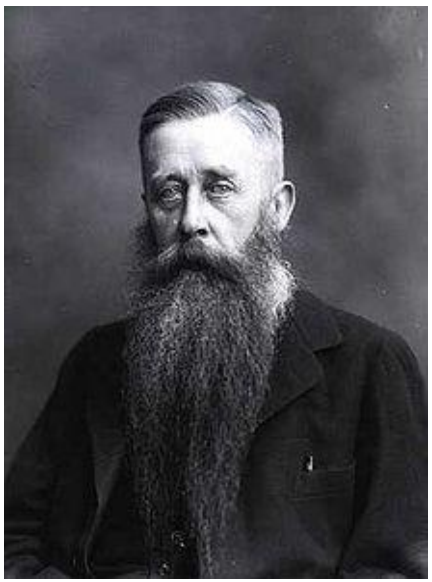
ou

$$V_E = \frac{4\pi\, r^3}{3}$$

Como Arquimedes descobriu esses resultados?

Obras de Arquimedes

Encontram-se principalmente em textos dos séculos XV e XVI, copiados de dois manuscritos dos séculos IX e X, atualmente perdidos.

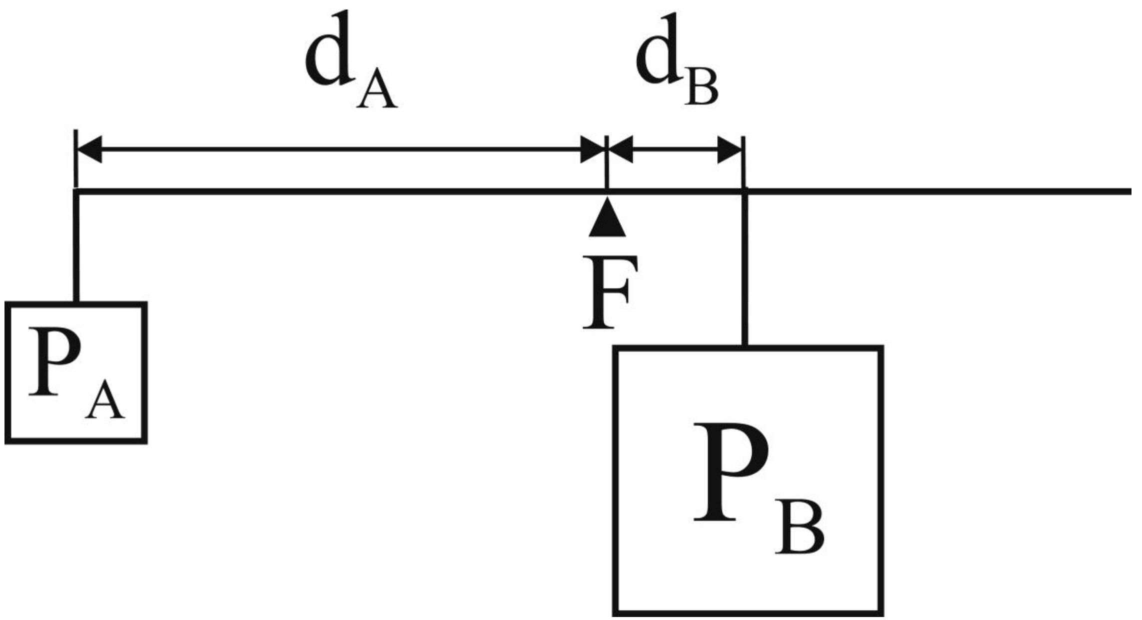


O terceiro manuscrito do século IX, encontrado apenas em 1906, é um palimpsesto. Contém a única versão conhecida da obra endereçada a Eratóstenes intitulada: *O Método dos Teoremas Mecânicos*

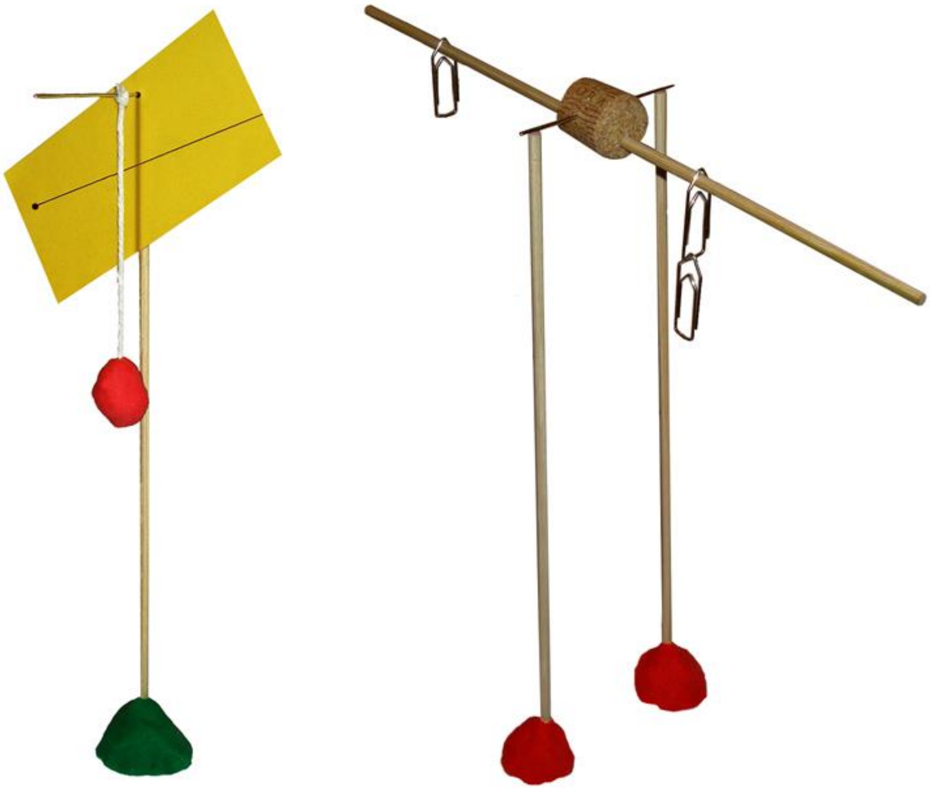
Heiberg (1854 – 1928)

A lei da alavanca aparece na obra Sobre o Equilíbrio dos Planos:

"Grandezas comensuráveis se equilibram em distâncias inversamente proporcionais a seus pesos."

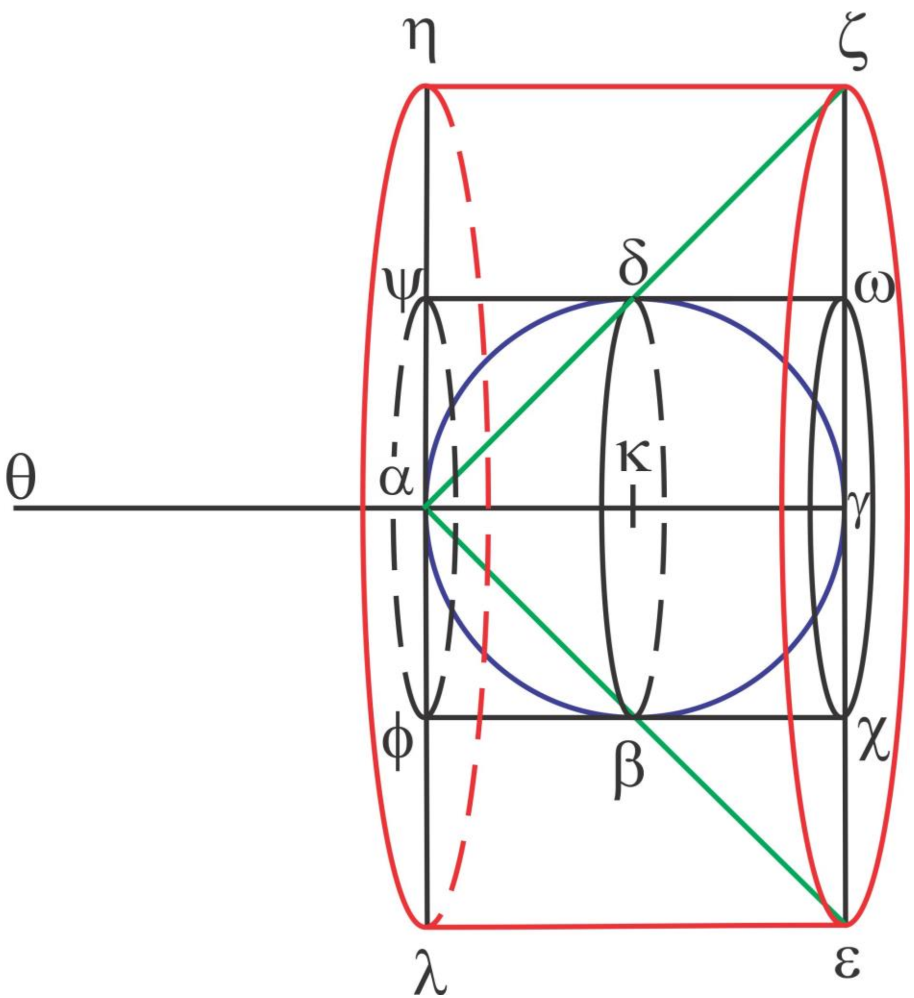


$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{P_B}{P_A}$$

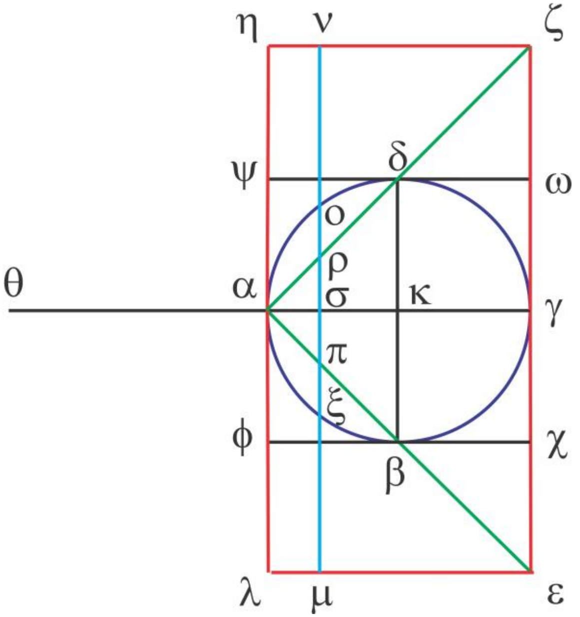


Livro disponível em formato PDF:
www.ifi.unicamp.br/~assis

Na obra *O Método dos Teoremas Mecânicos* Arquimedes explicou a Eratóstenes como descobriu o volume e a área da esfera usando a lei da alavanca:

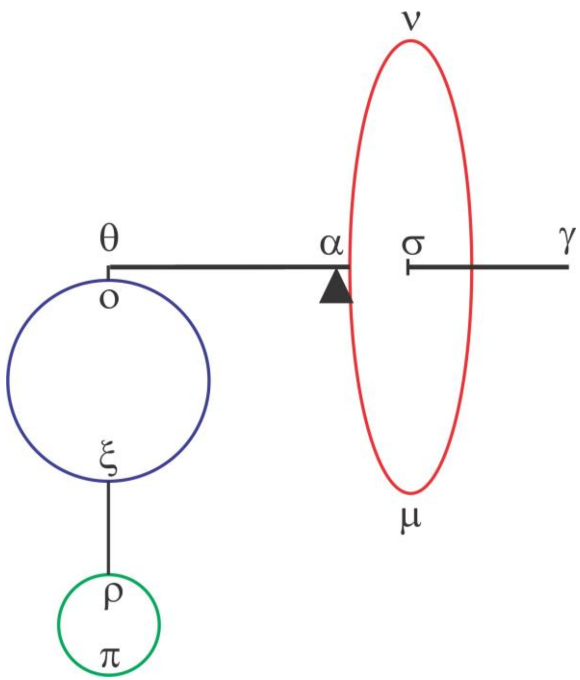


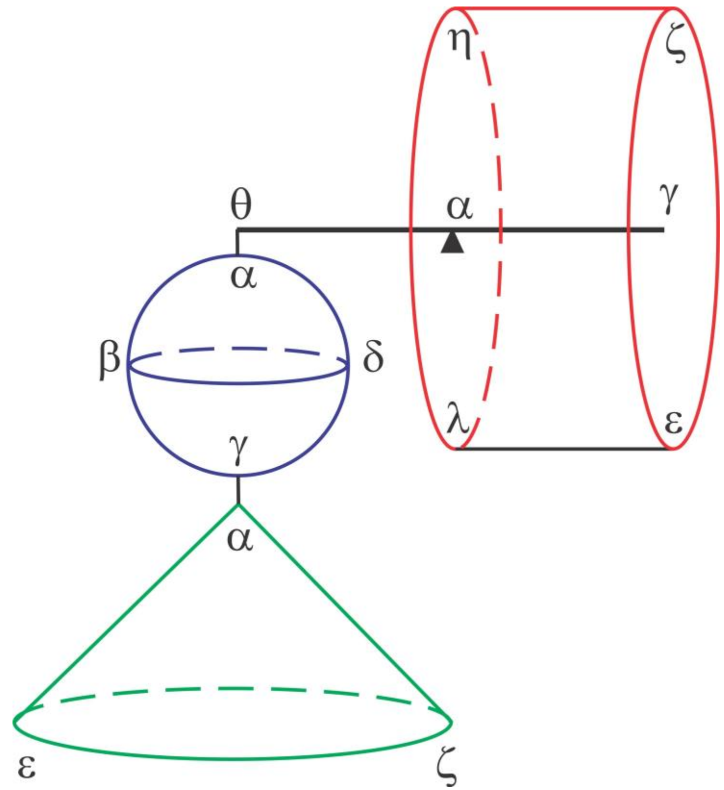
$$\theta\alpha = \alpha\gamma$$



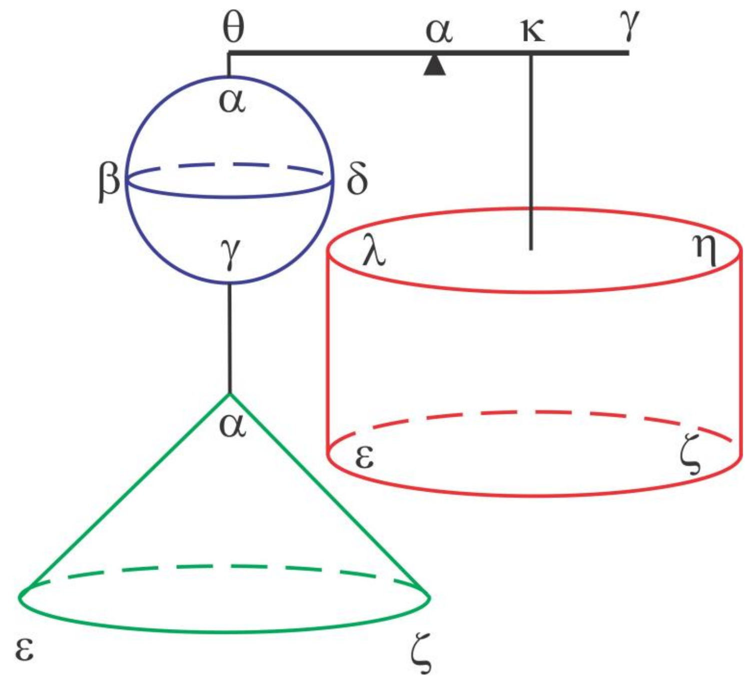
Da matemática elementar obteve:

$$\frac{\theta\alpha}{\alpha\sigma} = \frac{\text{Círculo}\,\nu\mu}{\text{Círculo}\,o\xi + \text{Círculo}\,\rho\pi}$$

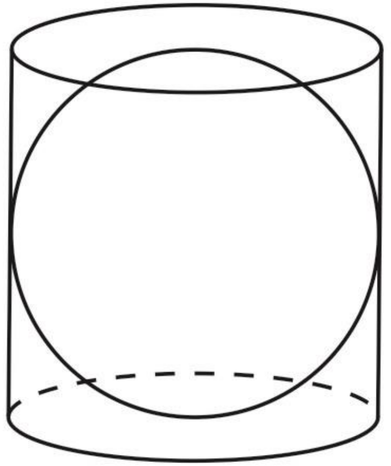




“Postulado 6. Se grandezas se equilibram a certas distâncias, então grandezas equivalentes a estas grandezas se equilibrarão, por sua vez, nas mesmas distâncias.”

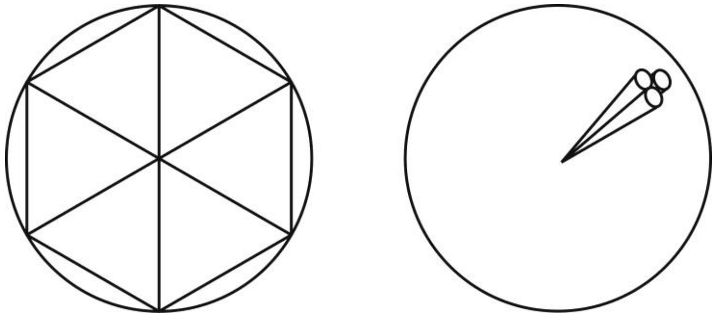


“Todo cilindro cuja base é o círculo máximo de uma esfera e cuja altura é igual ao diâmetro da esfera é 3/2 [do volume] da esfera.”



$$V_E = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Área da esfera:

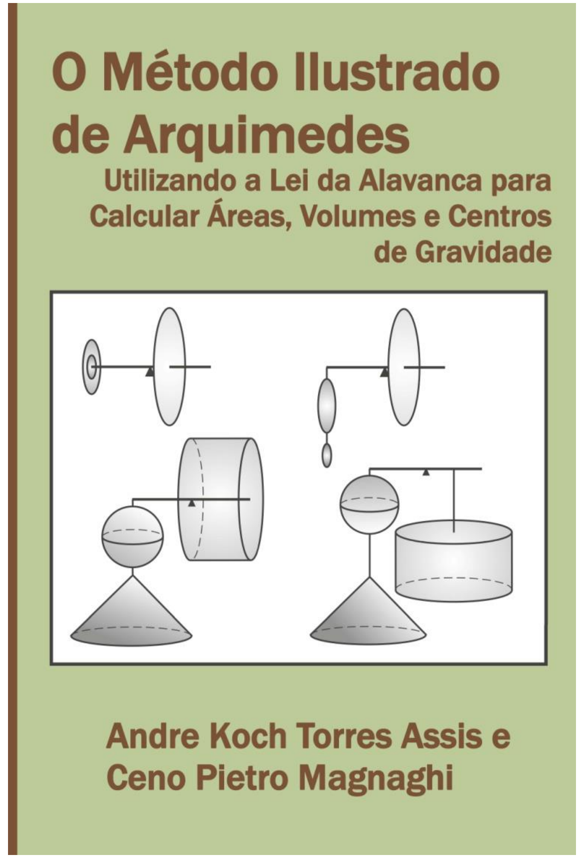


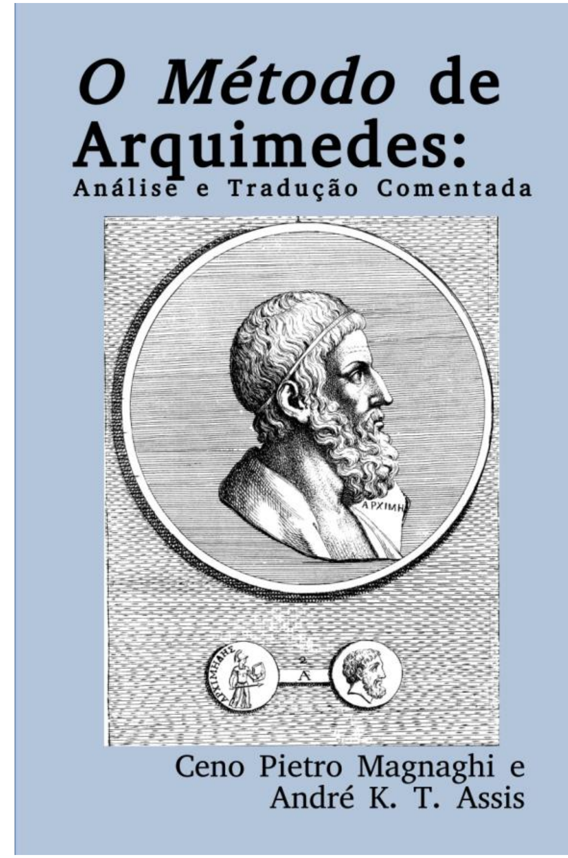
$$V_E = \Sigma V_C = \frac{\Sigma da \cdot r}{3} = \frac{A_E \cdot r}{3}$$

Como: $$V_E = 4\left(\frac{\pi r^2 \cdot r}{3}\right)$$

Vem: $$A_E = 4\left(\pi r^2\right)$$

“A superfície de qualquer esfera é quatro vezes seu círculo máximo.”





Livros disponíveis em
www.ifi.unicamp.br/~assis