
TRADUÇÃO DE UM TEXTO DE JAMES CLERK MAXWELL SOBRE A TEORIA DAS CARGAS-IMAGEM⁺*

A. K. T. Assis

W. Bagni Jr.

Instituto de Física “Gleb Wataghin” – Unicamp
Campinas – SP

Resumo

Apresentamos uma tradução para o português de um importante trabalho de James Clerk Maxwell (1831-1879) publicado em 1881 sobre a teoria das cargas-imagem.

Abstract

We present a portuguese translation of an important paper by James Clerk Maxwell (1831-1879) published in 1881 about the theory of electrical images.

Palavras-chave: *Maxwell, eletrostática, teoria das cargas-imagem, método das imagens.*

Keywords: *Maxwell, electrostatics, theory of electrical images, method of images.*

I. Introdução

A utilização da imagem é feita com muita frequência em problemas de óptica. Em particular, olhando para a imagem de um objeto refletida em um espelho, podemos imaginar um objeto em uma determinada posição. Mas o que vemos na verdade são raios luminosos refletidos em uma superfície, e que chegam aos nossos

⁺ Theory of electrical images, translation of a paper by James Clerk Maxwell.

^{*} *Recebido: dezembro de 2004.
Aceito: dezembro de 2004.*

olhos dando a impressão de haver um objeto em um determinado lugar, mas que na verdade é apenas a imagem do mesmo. O capítulo VII do livro “An Elementary Treatise on Electricity” de James Clerk Maxwell (1831-1879) [MAXWELL, 1881] trata sobre a teoria das cargas-imagem. Utilizando essa teoria muitos problemas relacionados com a distribuição de cargas na superfície de corpos podem ser simplificados ou resolvidos usando-se a mesma idéia da imagem em problemas de óptica. Aqui, apresentamos uma tradução para o português deste importante trabalho de Maxwell que apresenta o tema de forma clara e simples. Maxwell mostra, em particular, que pode haver atração entre uma carga pontual e uma casca esférica condutora carregada com carga total de mesmo sinal que a carga externa, desde que a carga pontual esteja bem próxima da casca esférica. Neste caso, a força de atração entre a carga pontual externa e as cargas induzidas sobre a casca esférica condutora, devido à sua presença, irá superar a força de repulsão entre a carga externa e a carga resultante sobre a casca esférica. A teoria do método das imagens é devida a W. Thomson e foi publicada em 1848 [Maxwell, 1954].

Os termos entre colchetes na tradução foram incluídos pelos tradutores para facilitar a compreensão de algumas passagens.

Agradecimento

Ao Dr. J. J. Lunazzi, coordenador da disciplina Instrumentação para o Ensino (F-809) junto ao Instituto de Física da Unicamp. Esta tradução foi realizada como parte das atividades da disciplina durante o segundo semestre de 2003.

Referências

[MAXWELL, 1881] MAXWELL, J. C. An Elementary Treatise on Electricity. Oxford: Clarendon Press, 1881. Cap. VII: Theory of Electrical Images, p. 80-88. Este livro foi editado por W. Garnett e publicado após a morte de Maxwell.

[MAXWELL, 1954] MAXWELL, J. C. A treatise on Electricity and Magnetism. New York: Dover, 1954. Vol. 1, cap. XI: Theory of Electric Images and Electric Inversion, parágrafo 155, p. 254.

II. Tradução do Texto de James Clerk Maxwell

Teoria das Cargas-Imagem

99.] O cálculo da distribuição de cargas na superfície de um condutor, quando corpos carregados são colocados perto dele é, em geral, uma operação além do poder dos métodos matemáticos existentes.

Quando o condutor é uma esfera, e quando é dada a distribuição de eletricidade nos corpos externos, uma solução dependendo de uma série infinita foi obtida por Poisson. Essa solução concorda com aquela que mais tarde foi obtida de forma bem mais simples por Sir W. Thomson, que é a base de seu método de cargas-imagem.

Através desse método, ele [Thomson] tem resolvido problemas em eletricidade que nunca foram tentados por qualquer outro método e, além disso, mesmo depois da solução ter sido completamente apontada, nenhum outro método pareceu capaz de atacá-lo. Esse método tem a grande vantagem de ser inteligível pela ajuda de um raciocínio matemático bem elementar, especialmente quando ele é considerado em conexão com os diagramas de superfícies equipotenciais descritas nos Arts. 93-96.

100.] A idéia de uma imagem é mais facilmente assimilada considerando os fenômenos ópticos pelos quais o termo imagem foi, pela primeira vez, introduzido na ciência.

Estamos acostumados a usar impressões visuais que recebemos através de nossos olhos com o intuito de averiguar as posições de objetos distantes. Fazemos isto todo dia de maneira suficientemente precisa para objetivos comuns. Agrimensores e astrônomos utilizando instrumentos artificiais e deduções matemáticas fazem a mesma coisa com maior exatidão. Contudo, qualquer que seja a maneira como fazemos nossas deduções, encontramos que elas são consistentes com a hipótese de que um objeto existe em uma certa posição do espaço, da qual emite a luz que se propaga para nossos olhos ou para nossos instrumentos em linhas retas.

Mas se permanecermos em frente de um espelho plano e fizermos observações sobre a direção aparente de um objeto refletido nele, encontramos que essas observações são consistentes com a hipótese de que não existe espelho, mas que existem certos objetos na região atrás do plano do espelho. Esses objetos hipotéticos estão geometricamente relacionados com certos objetos reais na frente do plano do espelho e são chamados de imagens desses objetos.

Não temos um sentido especial que nos permita determinar a presença e a posição de corpos distantes por meio de seus efeitos elétricos, mas temos métodos instrumentais pelos quais pode ser determinada a distribuição do potencial e da força elétrica em qualquer parte do campo, e desses dados obtemos evidências sobre a posição e a eletrização do corpo distante.

Se um astrônomo, por exemplo, pudesse determinar a direção e a magnitude da força de gravitação em qualquer ponto desejado no espaço celeste, poderia deduzir as posições e massas dos corpos aos quais se deve esta força. Quando Adams e Leverrier descobriram o até então desconhecido planeta Netuno, o fizeram determinando a direção e magnitude da força gravitacional em certos pontos do espaço devidas ao planeta que ainda não havia sido visto. Em um problema elétrico, empregamos uma bola de seiva carregada, a qual movemos como desejamos no campo.

Os astrônomos utilizaram com um propósito similar o planeta Urano sobre o qual, de fato, não tinham controle, mas que se movia em posições tais que alterações de elementos de sua órbita serviram para indicar a posição do planeta perturbador desconhecido.

101.] Em um dos sistemas eletrizados que já investigamos, aquele de uma esfera condutora A dentro de uma casca esférica condutora B , temos um dos casos mais simples do princípio de carga-imagem.

O campo elétrico está nesse caso na região que fica entre as duas superfícies esféricas concêntricas. O campo elétrico em qualquer ponto P dentro dessa região está na direção do raio OP e é numericamente igual à carga da esfera interior A , dividido pelo quadrado da distância OP , que vai do ponto $[P]$ até o centro comum $[O]$. É evidente, portanto, que o campo dentro desta região será o mesmo se substituirmos as superfícies esféricas eletrizadas A e B por quaisquer outras duas superfícies esféricas concêntricas C e D , onde uma delas, C , situa-se dentro da esfera menor A , e a outra, D , fica externa a B e a carga de C é igual à carga de A no caso anterior. Os fenômenos elétricos na região entre A e B são, portanto, os mesmos de antes, a única diferença entre os casos é que na região entre A e C e também na região entre

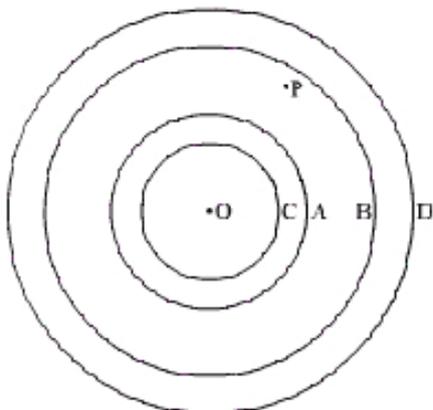


Fig. 22

B e D encontramos agora campos elétricos agindo conforme a mesma lei da região entre A e B , enquanto que quando a região estava limitada pelas superfícies condutoras A e B não havia qualquer campo elétrico nas regiões além dessas superfícies. Para fins matemáticos podemos até mesmo supor que a esfera interior C é reduzida a um ponto físico em O , e que a esfera externa D é expandida a um tamanho infinito, e assim assemelhamos a ação elétrica na região entre A e B como a ação devida a um ponto eletrizado O colocado em uma região infinita.

Parece, então, que quando uma superfície esférica está uniformemente carregada, os fenômenos elétricos na região fora da esfera são exatamente os mesmos como se a superfície esférica tivesse sido removida, e um pequeno corpo fosse colocado no centro da esfera, tendo a mesma carga que a esfera.

Este é um exemplo simples no qual os fenômenos em uma certa região são consistentes com uma falsa hipótese sobre o que existe além dessa região. A ação de uma superfície esférica uniformemente carregada na região fora desta superfície é tal que os fenômenos podem ser atribuídos a um ponto carregado imaginário no centro da esfera.

O potencial, ψ , de uma esfera de raio a , colocada em um espaço infinito e carregada com uma quantidade e de carga, é $\frac{e}{a}$ [sobre a esfera]. Conseqüentemente, se ψ é o potencial da esfera, a carga imaginária no seu centro é ψa .

102.] Agora, vamos calcular o potencial em um ponto P em uma superfície esférica que está centrada em C e tem raio \overline{CP} , devido a duas cargas puntiformes A e B que estão ao longo do mesmo raio prolongado, e tais que o produto das suas distâncias desde o centro é igual ao quadrado do raio. Pontos assim relacionados entre si são chamados pontos *inversos* com relação à esfera.

Seja $a = \overline{CP}$ o raio da esfera. Seja $\overline{CA} = ma$, então \overline{CB} será $\frac{a}{m}$.

Além disso, o triângulo APC é semelhante ao [triângulo] PCB e $\overline{AP} : \overline{PB} :: \overline{AC} : \overline{PC}$, ou $\overline{AP} = m\overline{BP}$. Veja Euclides vi. Prop. E.

Agora, seja uma carga igual a e colocada em A e uma carga $e' = -\frac{e}{m}$ de

sinal oposto colocada em B . O potencial devido a essas cargas em P será:

$$V = \frac{e}{AP} + \frac{e'}{BP} = \frac{e}{mBP} - \frac{e}{mBP} = 0;$$

ou seja, o potencial devido às cargas em A e B em qualquer ponto P da superfície esférica é nulo.

Podemos supor agora a superfície esférica como sendo uma fina casca esférica de metal. Seu potencial já é zero em todo ponto, tal que se a conectarmos por um fio fino à terra não haverá alteração no seu potencial e, portanto, o potencial em qualquer ponto, tanto dentro como fora da superfície, permanecerá inalterado e será aquele devido às duas cargas puntiformes em A e B .

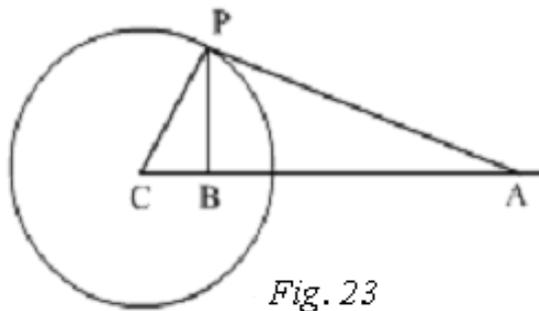


Fig. 23

Se mantivermos a casca metálica em conexão com a terra e removermos a carga puntiforme em B , o potencial em todo ponto dentro da esfera se anulará, mas fora vai permanecer como antes. Pois a superfície da esfera ainda permanece com o mesmo potencial, e nenhuma mudança foi feita na distribuição de corpos carregados na região fora da esfera.

Portanto, se um ponto carregado A for colocado fora de um condutor esférico que está em um potencial nulo, a ação elétrica [isto é, o campo elétrico] em

todos os pontos fora da esfera será equivalente à ação devida ao ponto A juntamente com um outro ponto, B , dentro da esfera, que é o ponto inverso de A , e cuja carga está para a [carga] de A assim como -1 está para m . O ponto B com sua carga imaginária é chamado de *carga-imagem* de A .

Do mesmo modo, ao remover-se [a carga] A e manter B , podemos demonstrar que se uma carga pontual B é colocada dentro de um condutor oco tendo sua superfície interna [a forma] esférica, a ação elétrica dentro da cavidade é equivalente àquela da carga B , junto com uma carga imaginária pontual, A , fora da esfera, cuja carga está para a de B como m está para -1 .

Se a esfera, em vez de estar em conexão com a terra, e portanto em um potencial zero, está em um potencial ψ , os efeitos elétricos fora da esfera serão os mesmos como se, além da carga-imagem [B , dentro da esfera], uma outra carga imaginária igual a ψa fosse colocada no centro da esfera.

Dentro da esfera o potencial é apenas aumentado de ψ .

103.] Como um exemplo do método de cargas imagens vamos calcular o estado elétrico de duas esferas cujos raios são a e b , respectivamente, e cujos potenciais são P_a e P_b , sendo a distância entre seus centros c . Vamos supor que b é pequeno comparado com c .

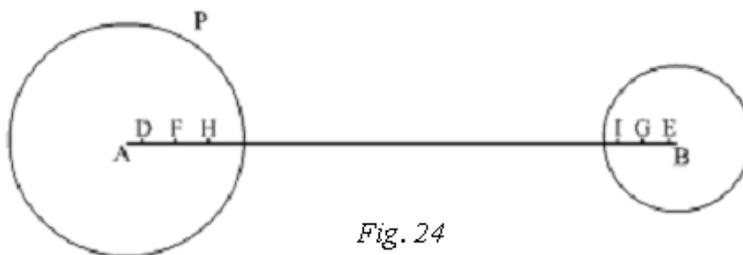


Fig. 24

Podemos considerar os efeitos elétricos reais em qualquer ponto externo às duas esferas como devido a uma série de cargas imagens.

Em primeiro lugar, já que o potencial da esfera A é P_a , temos que colocar uma imagem no centro de A com uma carga aP_a .

Similarmente em B , o centro da outra esfera, temos que colocar uma carga bP_b .

Cada uma dessas imagens terá uma imagem de segunda ordem na outra esfera. A imagem de B na esfera a estará em D , onde

$$AD = \frac{a^2}{c}, \text{ e terá a carga } D = -\frac{a}{c} bP_b.$$

A imagem de A na esfera b estará em E , onde

$$BE = \frac{b^2}{c}, \text{ e terá a carga } E = -\frac{b}{c}aP_a.$$

Cada uma dessas [imagens] terá uma [outra] imagem de terceira ordem. A [imagem] de E em a estará em F , onde

$$AF = \frac{a^2}{AE} = \frac{a^2c}{c^2 - b^2}, \text{ e [terá a carga] } F = \frac{a^2b}{c^2 - b^2}P_a.$$

A [imagem] de D em b estará em G , onde

$$BG = \frac{b^2}{DB} = \frac{b^2c}{c^2 - a^2}, \text{ e [terá a carga] } G = \frac{ab^2}{c^2 - a^2}P_b.$$

As imagens de quarta ordem serão:

de G em a , estará em H , onde

$$AH = \frac{a^2}{AG} = \frac{a^2(c^2 - a^2)}{c(c^2 - a^2 - b^2)}, \text{ e [terá a carga] } H = \frac{a^2b^2}{c(c^2 - a^2 - b^2)}P_b,$$

de F em b , estará em I , onde

$$BI = \frac{b^2}{FB} = \frac{b^2(c^2 - b^2)}{c(c^2 - a^2 - b^2)}, \text{ e [terá a carga] } I = \frac{a^2b^2}{c(c^2 - a^2 - b^2)}P_a.$$

Poderíamos prosseguir com uma série de imagens ao infinito, mas se b é pequeno comparado com c , as imagens rapidamente se tornarão menores e podem ser desprezadas depois da quarta ordem.

Se escrevermos agora

$$q_{aa} = a + \frac{a^2b}{c^2 - b^2} + \dots,$$

$$q_{ab} = -\frac{ab}{c} - \frac{a^2b^2}{c(c^2 - a^2 - b^2)} - \dots,$$

$$q_{bb} = b + \frac{ab^2}{c^2 - a^2} + \dots,$$

a carga total da esfera a será

$$E_a = q_{aa}P_a + q_{ab}P_b,$$

e carga total da esfera b será

$$E_b = q_{ab}P_a + q_{bb}P_b.$$

104.] Destes resultados podemos calcular os potenciais das duas esferas quando suas cargas são dadas, e se desprezarmos termos envolvendo b^3 encontraremos

$$P_a = \frac{1}{a}E_a + \frac{1}{c}E_b,$$

$$P_b = \frac{1}{c}E_a + \left\{ \frac{1}{b} - \frac{a^3}{c^2(c^2 - a^2)} \right\} E_b.$$

A energia [potencial] elétrica do sistema é

$$\frac{1}{2}(E_a P_a + E_b P_b) = \frac{1}{2} \frac{1}{a} E_a^2 + \frac{1}{c} E_a E_b + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{b} - \frac{a^3}{c^2(c^2 - a^2)} \right\} E_b^2.$$

A [força de] repulsão, R , entre as duas esferas é medida pela taxa na qual a energia diminui enquanto c aumenta; portanto,

$$R = \frac{E_b}{c^2} \left\{ E_a - E_b \frac{a^3(2c^2 - a^2)}{c(c^2 - a^2)^2} \right\}.$$

Para que a força possa ser repulsiva é necessário que as cargas das esferas sejam de mesmo sinal, e

$$E_a \text{ tem de ser maior que } E_b \frac{a^3(2c^2 - a^2)}{c(c^2 - a^2)^2}.$$

Conseqüentemente, a força será sempre atrativa:

1. quando qualquer esfera não está isolada [ou seja, se qualquer esfera estiver aterrada];
2. quando qualquer esfera está sem carga;
3. quando as esferas estão quase em contato, se seus potenciais são diferentes.

Quando os potenciais das duas esferas são iguais, a força é sempre repulsiva.

105.] Determinar o campo elétrico em qualquer ponto na superfície externa de uma esfera condutora aterrada surgindo da presença de um ponto carregado A fora da esfera.

As condições elétricas [isto é, o campo elétrico] em todos os pontos fora da esfera são equivalentes, como já vimos, àquelas devidas ao ponto A junto com sua imagem em B . Se e é a carga do ponto A (Fig. 23), o campo devido a ela em P é $\frac{e}{AP^2}$

na direção AP . Decompondo esse campo em uma direção paralela a AC e ao longo do raio, suas componentes são $\frac{e}{AP^3} AC$ na direção paralela a AC e $\frac{e}{AP^3} CP$ na direção

CP . A carga da imagem de A em B é $-e \frac{CP}{CA}$, e o campo devido à imagem em P é

$e \frac{CP}{CA} \cdot \frac{1}{BP^2}$ na direção PB . Decompondo esse campo nas mesmas direções que o outro

campo, suas componentes são:

$$e \frac{CP}{CA} \cdot \frac{CB}{BP^3} \text{ na direção paralela a } CA, \text{ e}$$

$$e \frac{CP^2}{CA \cdot BP^3} \text{ na direção } PC.$$

Se a é o raio da esfera e se $CA = f = ma$ e $AP = r$, então $CB = \frac{1}{m}a$ e

$BP = \frac{1}{m}r$; e se e é a carga do ponto A , a carga de sua imagem B é $-\frac{1}{m}e$.

O campo em P devido à carga e em A é $\frac{e}{r^2}$ na direção AP .

Decompondo esse campo na direção do raio e na direção paralela a AC , suas componentes são:

$\frac{e}{r^2} \cdot \frac{ma}{r}$ na direção AC , e

$\frac{e}{r^2} \cdot \frac{a}{r}$ na direção CP .

O campo em P devido à carga-imagem $-\frac{1}{m}e$ em B é $\frac{1}{m}e \frac{1}{BP^2}$ ou $e \frac{m}{r^2}$ na

direção PB . Decompondo-o nas mesmas direções como as dos outros campos elétricos, suas componentes são:

$e \frac{m}{r^2} \frac{BC}{BP} = \frac{ema}{r^3}$ na direção CA , e

$e \frac{m \cdot CP}{r^2 BP}$ ou $\frac{em^2 a}{r^3}$ na direção PC .

As componentes na direção paralela a AC são iguais, mas em sentidos opostos. O campo resultante é, portanto, na direção do raio, que confirma o que já provamos, que a esfera é uma superfície equipotencial onde o campo resultante é normal em toda parte. O campo resultante é portanto na direção PC , e é igual a

$\frac{ea}{r^3}(m^2 - 1)$ na direção PC , isto é, em direção ao centro da esfera.

Disto podemos determinar a densidade superficial de carga em qualquer ponto da esfera, pois, pela lei de Coulomb, se σ é a densidade superficial,

$$4\pi\sigma = R,$$

no qual R é o campo resultante *apontando para fora*.

Portanto, como o campo resultante neste caso age para dentro, a densidade superficial é negativa em todo lugar, e vale

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{ea}{r^3}(m^2 - 1).$$

Conseqüentemente, a densidade superficial é inversamente proporcional ao cubo da distância do ponto indutor A .

106.] No caso de duas esferas A e B (Fig. 24), com raios a e b e potenciais P_a e P_b , a distância entre seus centros sendo c , podemos determinar a densidade superficial em qualquer ponto da esfera A considerando-a como devida à

ação de uma carga aP_a em A , juntamente com as ações devidas aos pares de pontos B e D , E e F , ..., os sucessivos pares de cargas-imagem.

Fazendo $r = PB$, $r_1 = PE$, $r_2 = PG$, ..., obtemos

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} P_a \left[\frac{1}{a} + \frac{b}{r_1^3} \frac{\{(c^2 - b^2)^2 - a^2 c^2\}}{a^2 c} + \dots \right] \\ - \frac{1}{4\pi} P_b \left[\frac{b}{ar^3} (c^2 - a^2) + \frac{b^2 c^2}{r_2^3 (c^2 - a^2)} \left\{ \left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{c^2 - a^2} \right)^2 - \frac{a^2}{c^2} \right\} + \dots \right]$$

Se chamarmos B o corpo indutor e A o corpo induzido, então podemos considerar a carga [superficial] induzida em A como constituída de duas partes, uma dependendo do potencial de B e outra de seu próprio potencial.

A parte dependente de P_b é chamada por alguns autores que escrevem sobre eletricidade de *carga superficial induzida de primeira espécie*. Quando A não está isolada [isto é, quando A está aterrada] ela constitui toda carga [superficial induzida], e se P_b é positivo ela é negativa sobre toda parte da superfície, mas maior em natureza numérica [módulo] sobre o ponto mais próximo de B .

A parte dependente de P_a é chamada de *carga superficial induzida de segunda espécie*. Ela só pode existir quando A está isolada, e é em todo lugar de mesmo sinal que P_a . Se A está isolada e sem carga, então as cargas superficiais induzidas de primeira espécie e segunda espécie têm de ser iguais e opostas. A densidade superficial é negativa no lado próximo a B e positiva no lado mais distante de B , mas embora as quantidades totais de carga positiva e negativa sejam iguais, a densidade superficial de carga negativa é mais concentrada que a positiva, tanto que a linha neutra que separa a densidade positiva da negativa não é no equador da esfera, mas está situada mais próxima de B .

A condição para que exista tanto densidade superficial de carga positiva quanto negativa sobre a esfera é que o valor de σ nos pontos mais próximos de B e mais afastados de B tenham sinais opostos. Se a e b são pequenos comparados com c , podemos desprezar todos os termos dos coeficientes de P_a e P_b depois do primeiro. Os valores de r são entre $c + a$ e $c - a$. Conseqüentemente, se P_a está entre $P_b \frac{b(c-a)}{(c+a)^2}$ e $P_b \frac{b(c+a)}{(c-a)^2}$, haverá densidades de carga positiva e negativa sobre A , divididas por uma linha neutra, mas se P_a está além desses limites, a densidade de carga por toda parte da superfície será de um tipo; negativa se P_a está abaixo do limite inferior, e positiva se está acima do limite superior.