Princípio das Proporções Físicas

A. K. T. Assis
Instituto de Física 'Gleb Wataghin'
Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP
13083-859 Campinas, SP, Brasil
Email: assis@ifi.unicamp.br
Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

Resumo

Esta[1] é uma tradução do artigo "The Principle of Physical Proportions", [Ass04] e [Ass15a]. Atualizamos as referências e melhoramos o texto. Nesse trabalho propomos o princípio das proporções físicas, de acordo com o qual todas as leis da física só podem depender da razão de grandezas conhecidas do mesmo tipo (razões de massas, razões de distâncias, razões de cargas elétricas, razões de frequências etc.). Uma outra formulação desse princípio é a de que constantes dimensionais não devem aparecer nas leis da física. Formulação alternativa: todas as "constantes" da física (tal como a constante universal da gravitação, a velocidade da luz no vácuo, a constante de Planck, a constante de Boltzmann etc.) têm de depender de propriedades microscópicas ou cosmológicas do universo. Ao propor esta generalização do princípio de Mach, defendemos acabar com todas as grandezas absolutas na física. Apresentamos exemplos de leis que satisfazem a este princípio e de outras leis que não satisfazem a este princípio. Estes últimos exemplos sugerem que as teorias relacionadas a estas leis têm de estar incompletas. Apresentamos aplicações deste princípio em algumas equações fundamentais da física.

[1]Trabalho apresentado na conferência As Múltiplas Interpretações de Ernst Mach (Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, CBPF, Rio de Janeiro, Brasil, 27/04/2018). Publicado na revista Cosmos & Contexto em 2018. Disponível em http://cosmosecontexto.org.br/category/encontros/ernst-mach/ e www.ifi.unicamp.br/~assis.

1 Introdução

O conceito de dimensão teve suas origens na antiga geometria grega. Considerava-se então que as linhas possuíam uma dimensão, as superfícies tinham duas dimensões, enquanto que os sólidos possuíam três dimensões.[2] Estas dimensões estavam relacionadas com a regra ou princípio da homogeneidade. De acordo com esta regra, apenas grandezas do mesmo tipo podiam ser somadas, comparadas ou igualadas, sendo que apenas grandezas do mesmo tipo possuíam uma razão numérica (nós não poderíamos dividir, por exemplo, um volume por um comprimento).[3] Este princípio também foi chamado por Heath de princípio da semelhança ou da similitude, sendo que ele também falou da teoria das proporções.[4] As dimensões geométricas também estavam relacionadas ao conceito de figuras semelhantes ou similares.[5]

A noção geométrica de dimensão foi estendida por Fourier para incluir dimensões físicas, nossas palavras em colchetes:[6]

> Deve ser agora observado que toda grandeza ou constante indeterminada tem uma *dimensão* característica a si própria, e que os termos de uma mesma equação não podem ser comparados, se não tiverem o mesmo *expoente de dimensão*. Introduzimos esta consideração na teoria do calor, com o objetivo de tornar nossas definições mais exatas, e para servir para verificar a análise; ela é deduzida das noções primárias sobre grandezas; razão pela qual, na geometria e na mecânica, ela é equivalente aos lemas fundamentais que os gregos nos deixaram sem provas. Na teoria analítica do calor, cada equação (E) expressa uma relação necessária entre as grandezas existentes [comprimento] x, [tempo] t, [temperatura] v, [capacidade térmica] c, [condutibilidade superficial] h, [condutibilidade específica] K. Esta relação não depende em nenhum aspecto sobre a escolha da unidade de comprimento, a qual pela sua própria natureza é contingente, ou seja, se escolhermos uma unidade diferente para medir as dimensões lineares, a equação (E) ainda continuaria sendo a mesma.

A análise dimensional desenvolveu-se a partir dessas ideias. Ela é aplicada, por exemplo, para conferir se as equações estão corretas (no sentido de que todos os termos da equação devem ter as mesmas dimensões). Além disso, todas as equações devem ser invariantes no que diz respeito a qualquer mudança no sistema de unidades que está sendo utilizado. Ela também é utilizada na dedução de relações entre as grandezas físicas aplicando, para esse fim, o princípio de homogeneidade. Por exemplo, é possível deduzir (a menos do valor de uma constante adimensional) a dependência da frequência de oscilação de um pêndulo próximo da superfície terrestre em função do comprimento do pêndulo e do valor do campo gravitacional terrestre considerando as dimensões ou unidades destas grandezas físicas. Aparentemente a primeira pessoa a utilizar este

[2] [Euc56a, págs. 158-159], [Euc56b, págs. 262-263], [Mar81] e [Red00a].

[3] [Mar81].

[4] [Euc56a, págs. 137 e 351] e [Euc56c, págs. 112-113, 115-129, 187, 280-281 e 292-293].

[5] [Euc56c, págs. 187-188].

[6] [Fou52, §§160-161].

princípio na física foi Foncenex em 1761, antes dos trabalhos de Fourier.[7] Reynolds, Lodge, FitzGerald, Rücker, Jeans e especialmente Lorde Rayleigh fizeram muitas contribuições para a análise dimensional nestes aspectos durante o século XIX.[8]

Em 1914 Tolman apresentou um "princípio da semelhança" ou "princípio da similitude", a saber:[9]

> As grandezas fundamentais a partir das quais o universo físico é construído são de tal natureza que um universo em miniatura pode ser construído sendo exatamente similar em todos os aspectos ao universo atual.

Contudo, Buckingham e Bridgman mostraram que este princípio já estava incluído no "princípio de homogeneidade dimensional", que havia sido utilizado nas equações geométricas e físicas por um longo tempo.[10] O artigo de Buckingham foi muito importante ao chamar atenção da comunidade científica para o assim chamado teorema-Π, que já havia sido enunciado por Vaschy na década de 1890.[11] Este teorema havia sido utilizado implicitamente por muitos cientistas desde os trabalhos de Fourier.

Para uma discussão crítica dos sistemas de unidades, dos conceitos de semelhança física e da análise dimensional, com muitas referências, ver os Capítulos XIV (Os Símbolos da Física) e XV (Unidades e 'Dimensões') do livro de O'Rahilly.[12]

Apresentamos aqui um novo princípio que não está contido nestes princípios anteriores, como será mostrado nos exemplos abaixo. Apenas para mostrar a novidade do novo princípio podemos mostrar a equação descrevendo um gás ideal, apresentada por Buckingham como: $pv/R\theta = N$. Aqui p é a pressão, v o volume específico, θ a temperatura absoluta, R uma constante dimensional e N é uma constante adimensional. Ela é considerada uma equação "completa" por Buckingham.[13] Ela também é invariante no que diz respeito a qualquer mudança no sistema de unidades que está sendo utilizado. Apesar destes fatos, esta equação não satisfaz o princípio das proporções físicas apresentado aqui. Veremos abaixo como deve ser a forma de uma equação para um gás ideal que satisfaça ao princípio das proporções físicas.

2 O Princípio das Proporções Físicas

Isaac Newton baseou sua dinâmica como apresentada em seu livro *Principia*, de 1687, nos conceitos de tempo absoluto, espaço absoluto e movimento absoluto.[14] De acordo com ele o tempo flui uniformemente sem relação com qualquer coisa externa, o espaço absoluto permanece sempre similar e imóvel sem relação com

[7] [Mar81].
[8] Ver [Pal64, pág. 10] para referências e discussões.
[9] [Tol14].
[10] [Buc14] e [Bri16].
[11] [Pal64, Cap. VI], [O'R65, Vol. 2, pág. 712], [Red00b], [Red01] e [Red02].
[12] [O'R65].
[13] [Buc14].
[14] [New34], [New90] e [New08].

qualquer coisa externa, enquanto que o movimento absoluto é a translação de um corpo de um lugar absoluto para outro.[15] Leibniz, Berkeley e Mach se opuseram a estes conceitos e propuseram que apenas podem ser percebidos pelos sentidos o tempo relativo, o espaço relativo e o movimento relativo. Por este motivo somente deveriam aparecer nas leis físicas estes conceitos relativos. Mach expressou claramente estas ideias em seu livro *A Ciência da Mecânica*, de 1883.[16] Revisões excelentes do princípio de Mach e da distinção entre o movimento relativo e o movimento absoluto em períodos diferentes durante o desenvolvimento da mecânica podem ser encontradas nos trabalhos de Barbour e Ghosh.[17] O tempo relativo é uma medida de duração obtida por meio do movimento de corpos materiais (como o ângulo de rotação da Terra em relação às estrelas fixas). O espaço relativo é uma medida de tamanho utilizando corpos materiais (como a distância entre dois corpos medida com uma régua material; ou a ordem relativa de três corpos A, B e C ao longo de uma linha reta: ABC, ou ACB, ou ...).

Concordamos com Leibniz, Berkeley e Mach nestes aspectos e propomos o princípio das proporções físicas (PPF) como uma generalização de suas ideias.[18] Mach defendeu a eliminação de todas as grandezas absolutas de movimento (reduzindo as grandezas absolutas e locais por grandezas relacionais e globais). Defendemos aqui a eliminação de todas as grandezas absolutas de qualquer tipo. Como veremos a seguir, na física clássica não apenas o espaço e o tempo são absolutos, já que também são absolutos a massa gravitacional, a carga elétrica etc. Nosso ponto de vista é que nenhuma destas grandezas absolutas deve aparecer nas leis da física. Neste trabalho discutimos a mecânica relacional,[19] uma teoria alternativa às teorias padrões atuais tais como a mecânica clássica newtoniana e as teorias da relatividade restrita e geral de Einstein. A mecânica relacional implementa tanto o princípio de Mach quanto o PPF.

Formulamos este princípio das proporções físicas da seguinte maneira: (1) Todas as leis da física só podem depender da razão de grandezas conhecidas do mesmo tipo (razões de massas conhecidas, razões de distâncias conhecidas, razões de cargas elétricas conhecidas, razões de frequências conhecidas etc.). Este princípio também pode ser entendido de quatro maneiras adicionais com o objetivo de clarificar seu significado, a saber: (2) Nas leis da física não devem aparecer conceitos absolutos, só devem ser incluídas razões de grandezas do mesmo tipo; (3) Constantes dimensionais não devem aparecer nas leis da física; (4) As constantes universais (tais como a constante universal da gravitação, G, a velocidade da luz no vácuo, c, a constante de Planck, h, a constante de Boltzmann, k_B, ...) têm de depender de propriedades microscópicas ou cosmológicas do universo; (5) Todas as leis da física e todos os efeitos mensuráveis têm de ser invariantes sob transformações de escala de qualquer tipo (isto é, sob transformação de escala de comprimento, de tempo, de massa, de carga, de

[15] [New90, Definições].
[16] [Mac60].
[17] [Bar89] e [Gho00].
[18] [Ass01a] e [Ass01b].
[19] [Ass89], [Ass98], [Ass99], [Ass13] e [Ass14].

temperatura, ...).

Consideramos o PPF como um princípio intuitivo da natureza, que deve levar a uma melhor compreensão das leis físicas. Em particular, acreditamos que as equações que não satisfazem a este princípio devem estar incompletas. Isto é, esperamos que com a implementação deste princípio serão clarificadas conexões escondidas entre as propriedades dos corpos (tais como os valores de suas massas, cargas, tamanhos, temperaturas) e as propriedades microscópicas ou macroscópicas do universo.

As cinco formulações do PPF não são totalmente equivalentes entre si. Apesar deste fato, há conexões entre elas, como será visto na sequência. Nossa formulação preferida é a primeira. Por grandezas do mesmo tipo queremos dizer grandezas com as mesmas unidades e incorporando os mesmos conceitos físicos. Isto é, nas leis da física devem aparecer apenas razões de comprimentos, razões de intervalos de tempo, razões de cargas elétricas, razões de frequências, razões de massas gravitacionais etc. A palavra "conhecidas" nesta formulação significa que podemos identificar a qual corpo pertence esta propriedade. Na segunda formulação a expressão "conceitos absolutos" deve ser entendida nos termos newtonianos já apresentados, isto é, conceitos que não dependem do mundo material que existe externamente aos corpos em questão (tais como o espaço absoluto, o tempo absoluto e o movimento absoluto de Newton). Como veremos na sequência, na mecânica clássica existe também um conceito absoluto de massa, um conceito absoluto de carga elétrica etc. Acreditamos que todos estes conceitos absolutos não devem ser incluídos nas leis da física. Quando tivermos leis expressas apenas em termos de razão de massas, de razão de cargas elétricas, de razão de correntes elétricas etc., então teremos alcançado o objetivo de eliminar os conceitos absolutos. Na quarta formulação a expressão "constantes universais" significa constantes que não dependem das propriedades dos corpos. Esta expressão foi utilizada para fazer uma distinção entre estas constantes universais e as características normais dos corpos. Por exemplo, a resistividade elétrica varia de metal para metal, enquanto que a constante de Boltzmann, k_B, é a mesma para todos os gases. Por este motivo constantes tais como k_B são designadas normalmente como constantes universais, absolutas ou fundamentais. Contudo, acreditamos que estas constantes chamadas de constantes universais devem estar de alguma maneira relacionadas com as propriedades dos corpos distantes do universo, de tal forma que possa ser possível modificar ou controlar o valor destas constantes universais ao modificar o ambiente ao redor dos instrumentos de medida. A expressão "de qualquer tipo" na quinta formulação expressa todos os tipos de grandeza (tempo, massa, carga, ...) e não apenas comprimentos (usualmente se entende por mudança de escala apenas uma mudança de distâncias, de tamanhos ou de grandezas lineares). O significado desta formulação é que não devem ocorrer efeitos mensuráveis ou detectáveis se dobrarmos, por exemplo, os valores das cargas elétricas de todos os corpos no universo, ou então se dobrarmos as temperaturas de todos os corpos do universo. Contudo, como veremos ao analisar a aceleração que surge da interação entre duas cargas, a física clássica não implementa esta ideia.

Alguns autores expressaram no passado seus pontos de vista de que nenhum efeito deveria ser detectado por uma transformação de comprimento (isto é, se todos os corpos no universo, incluindo os átomos, aumentassem de tamanho pelo mesmo valor, aumentando também todas as distâncias pelo mesmo valor). Pelo nosso conhecimento o primeiro cientista a generalizar esta ideia para que incluísse também o tempo e o movimento foi Boscovich em 1755.[20] Apresentamos aqui algumas de suas ideias características:

> Um movimento que é comum a nós e ao mundo não pode ser detectado por nós - nem mesmo se o mundo como um todo aumentasse ou diminuísse de tamanho por um fator arbitrário. [...] É até mesmo concebível que todo este mundo diante de nossos olhos se contraísse ou se expandisse em um intervalo de dias - com o valor das forças se contraindo ou se expandindo em uníssono. Mesmo se isto ocorresse, não haveriam mudanças nas impressões em nossas mentes e, portanto, não haveria percepção deste tipo de mudança.

Concordamos com estas ideias e as estendemos para todas as grandezas (cargas, temperaturas, frequências, correntes elétricas etc.)

O significado do princípio das proporções físicas está ilustrado nos exemplos apresentados na sequência. Com estes exemplos esperamos tornar mais claro o significado destas cinco formulações alternativas.

3 Leis Satisfazendo ao Princípio das Proporções Físicas

A lei da alavanca é o primeiro exemplo de uma relação satisfazendo a este princípio. As proposições 6 e 7 do trabalho "Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas" de Arquimedes (287-212 a.C.) afirmam o seguinte:[21]

> [Proposição] 6. [Duas] grandezas comensuráveis se equilibram em distâncias inversamente proporcionais a seus pesos.
>
> [...]
>
> [Proposição] 7. Da mesma maneira, se [duas] grandezas são incomensuráveis, elas se equilibrarão em distâncias inversamente proporcionais às grandezas.

Podemos escrever esta relação da seguinte maneira. As grandezas 1 e 2 com pesos P_1 e P_2 localizadas nas distâncias d_1 e d_2 do fulcro de uma alavanca na horizontal vão permanecer em equilíbrio estático (paradas em relação à superfície da Terra) quando $P_1/P_2 = d_2/d_1$. Nesta equação apenas são relevantes uma razão de pesos locais e uma razão de distâncias locais. Não aparecem constantes fundamentais nesta lei. Ao dobrarmos todos os comprimentos (distâncias), ou ao dobrarmos todos os pesos (ou massas gravitacionais) no universo, não afetaremos o equilíbrio da alavanca.

[20] [Bos98].
[21] [Arc12], [Arc52], [Ass08] e [Ass11].

A lei do plano inclinado também satisfaz a este princípio. Simon Stevin (1548-1620) provou esta lei ao considerar um triângulo ABC tendo seu plano perpendicular ao horizonte e com sua base AC paralela ao horizonte. Ao dependurar os pesos D e E sobre os lados AB e BC, respectivamente, ele mostrou[22] pelo princípio da impossibilidade do movimento perpétuo que estes dois corpos permaneceriam em equilíbrio (parados em relação ao solo), estando ligados por uma corda, caso fosse satisfeita a seguinte relação: $D/E = AB/BC$. Novamente temos do lado esquerdo dessa equação uma razão de pesos e do lado direito uma razão de comprimentos.

Considere agora os corpos flutuantes. Arquimedes descobriu o princípio principal da hidrostática, apresentando-o em seu trabalho "Sobre os Corpos Flutuantes".[23] A quinta proposição deste trabalho afirma o seguinte, com nossas palavras em colchetes:

> Proposição 5: Qualquer sólido mais leve do que um fluido [isto é, de menor densidade ou de menor peso específico] ficará, caso colocado no fluido, submerso de tal forma que o peso do sólido será igual ao peso do fluido deslocado.

Considerando um sólido homogêneo, seu peso é proporcional à sua densidade, ρ_S, multiplicada por seu volume total, V_T. Analogamente, o peso do fluido deslocado é proporcional à densidade do fluido, ρ_F, multiplicada pelo volume do sólido que está abaixo da superfície do fluido, $V_{submerso}$. A condição de equilíbrio estático em relação ao solo pode então ser formulada pela seguinte relação:

$$\frac{V_{submerso}}{V_T} = \frac{\rho_S}{\rho_F} \ . \tag{1}$$

Esta equação, que pode ser considerada como a lei que descreve o equilíbrio estático de sólidos homogêneos flutuando em fluidos que possuem um peso relativo maior do que o peso relativo do sólido, também satisfaz completamente ao PPF. Só aparecem nesta relação uma razão de volumes conhecidos e uma razão de densidades conhecidas. Constantes fundamentais não estão envolvidas nesta lei. Ao dobrarmos as densidades de todos os corpos do universo, não afetamos à razão $V_{submerso}/V_T$.

Um outro exemplo de lei satisfazendo ao PPF envolve dois recipientes preenchidos por um líquido e ligados por vasos comunicantes. Seja a área de seção reta dos recipientes 1 e 2 representadas por A_1 e A_2, respectivamente. Se aplicarmos sobre as superfícies livres dos líquidos nestes recipientes as forças F_1 e F_2, respectivamente, teremos equilíbrio (isto é, o líquido permanecerá em repouso em relação à Terra) caso seja satisfeita a seguinte relação: $F_1/F_2 = A_1/A_2$. Esta equação satisfaz plenamente ao PPF.

Existem também leis dinâmicas que satisfazem a este princípio. Um exemplo é a segunda lei de Kepler para o movimento dos planetas do sistema solar:[24]

[22] [Ste35].
[23] [Arc12], [Arc52], [Arq12] e [Ass96].
[24] [Sym71, pág. 171] e [Sym82, pág. 159].

2. O raio vetor do Sol ao planeta varre áreas iguais em tempos iguais.

Em outras palavras, a área é proporcional ao tempo de percurso. Podemos escrever esta lei em termos algébricos considerando que se um planeta descreve a área A_1 no tempo t_1 e a área A_2 no tempo t_2, então vale a seguinte relação: $A_1/A_2 = t_1/t_2$.

Um outro exemplo é a segunda lei do movimento de Newton combinada com sua terceira lei. Considere dois corpos de massas inerciais m_{i1} e m_{i2} interagindo entre si ao longo de uma linha reta. Se eles sofrerem acelerações a_1 e a_2 em relação a um sistema de referência inercial, obteremos a seguinte relação a partir das leis de Newton (considerando massas inerciais constantes): $m_{i1}/m_{i2} = -a_2/a_1$.

4 Leis que Não Satisfazem ao Princípio das Proporções Físicas

A lei da força elástica foi apresentada pela primeira vez por Hooke em 1678 em termos de proporções, a saber (nossas palavras entre colchetes):[25]

> [...] o poder de qualquer mola está na mesma proporção que a tensão sobre ela. Ou seja, se uma potência a estica ou curva por um espaço, duas [potências] vão curvá-la dois [espaços], e três [potências] vão curvá-la três [espaços], e assim por diante. [...] Ao pendurar vários pesos, observe exatamente até qual comprimento cada um destes pesos vai estendê-la, além do comprimento que seu próprio peso a estende. Você encontrará que se uma onça, ou uma libra, ou um certo peso a estende uma linha, ou uma polegada, ou um certo comprimento, então duas onças, ou duas polegadas, ou dois pesos a estendem duas linhas, duas polegadas, ou dois comprimentos; e três onças, libras, ou pesos, [a estendem] três linhas, polegadas, ou comprimentos; e assim por diante.

A lei nesta forma satisfaz o princípio das proporções físicas e pode ser escrita como $Potência_1/Potência_2 = espaço_1/espaço_2$. Mas hoje em dia esta lei é expressa em termos de uma igualdade envolvendo uma constante elástica k que tem dimensões, de tal forma que essa lei moderna não mais satisfaz ao PPF. Considere uma mola relaxada de comprimento ℓ_0 e constante elástica k. Se ela for comprimida ou esticada por uma força F até um comprimento ℓ, a lei de Hooke afirma que o deslocamento ou variação de comprimento da mola é proporcional a esta força. Expressando esta lei por meio de uma igualdade, como é feito usualmente hoje em dia, obtém-se a condição de equilíbrio estático da mola escrito como $F = k(\ell - \ell_0)$. Esta relação não satisfaz ao PPF já que não há uma razão de forças no lado esquerdo e não há uma razão de comprimentos no lado direito. Além disso, aparece a constante elástica k que não tem relação com a força que a mola está suportando. Esta lei é correta no sentido em que descreve o comportamento das molas (ela é válida enquanto a variação

[25] [Hoo35] e [Ass13, págs. 24-25].

de comprimento da mola não for tão grande a ponto de tornar o esticamento irreversível). Mas como esta equação não satisfaz ao PPF, deve ser considerada como uma relação incompleta.

Se a mola for substituída por uma corda ou barra feita de uma material homogêneo tendo uma área de seção reta A_0, esta lei pode ser escrita como (se a tensão não for muito grande):

$$F = Y A_0 \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \ . \tag{2}$$

Nesta equação Y é chamado de módulo de Young. Esta forma da lei é melhor do que a anterior já que agora aparece uma razão de comprimentos no lado direito. Mas ela ainda não satisfaz completamente ao PPF. Embora apareça uma razão de comprimentos no lado direito, não há uma razão de forças no lado esquerdo e não há uma razão de áreas no lado direito. Além disso, o módulo de Young não é uma constante sem unidades. Sua unidade é a unidade de pressão e seu valor depende de cada material, embora não dependa do valor da seção reta nem do comprimento da corda para um material específico. Por este motivo podemos dizer que esta lei está incompleta. Como o módulo de Young tem um valor diferente para cada material, ele tem de depender das propriedades microscópicas do material (tal como ser inversamente proporcional à área de seção reta das moléculas que compõem a corda, ou ser inversamente proporcional ao quadrado da distância média entre estas moléculas, ou ...). Poderíamos esperar que quando for encontrada uma melhor compreensão das propriedades elásticas dos corpos, será possível escrever a lei de Hooke da seguinte forma:

$$\frac{F}{F_*} = \alpha \frac{A_0}{A_*} \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \ . \tag{3}$$

Nesta equação F_* e A_* representam uma força e uma área com origem ainda desconhecida, enquanto que α representa uma constante sem dimensões cujo valor numérico ainda tem de ser determinado.

Considere agora a aceleração de queda livre, a, perto da superfície da Terra, que é dada por:

$$a = G \frac{M_T}{R_T^2} \ . \tag{4}$$

Aqui $G = 6,67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$ é a constante universal da gravitação, $M_T = 5,98 \times 10^{24}\ kg$ é a massa da Terra e $R_T = 6,37 \times 10^6\ m$ representa seu raio médio. Na superfície da Terra o valor da aceleração de queda livre é dado por $a = 9,8\ m/s^2$. Esta aceleração de queda livre depende apenas da massa da Terra, não dependendo da razão desta massa para outras massas do universo. Ela também depende da distância do corpo de prova até o centro da Terra, não dependendo da razão desta distância para outras distâncias do universo. De acordo com a mecânica clássica, o valor da constante G não depende dos outros corpos do universo. Isto significa que ela é considerada uma constante universal da natureza, que não pode ser modificada nem influenciada por agentes externos.

Se fosse possível dobrar todas as massas do universo, esta expressão sugere que a aceleração de queda livre também iria dobrar, indo para $a = 19,6\ m/s^2$. Logo, esta mudança no valor de todas as massas do universo poderia ser percebida ou detectada através da medida da aceleração de queda livre dos corpos na superfície da Terra. Este fato mostra que não apenas o espaço e o tempo são absolutos na mecânica clássica, mas também a massa. Todas estas propriedades são contrárias ao princípio das proporções físicas.

Analisamos agora o achatamento da Terra que surge devido à sua rotação diária em relação a um referencial inercial. Devido à sua rotação diurna ao redor da direção Norte-Sul, a Terra assume essencialmente a forma de um elipsoide de revolução. A rotação da Terra tem um período de um dia e sua velocidade angular em relação a um referencial inercial é dada por $\omega = 7,29 \times 10^{-5}\ rad/s$. Devido a esta rotação, o raio equatorial da Terra, $R_>$, fica maior do que seu raio polar, $R_<$. De acordo com a mecânica clássica, a mudança fracionária f do raio da Terra, que é definida pela razão $f \equiv (R_> - R_<)/R_<$, é dada por (resultado obtido pela primeira vez por Newton):

$$f \equiv \frac{R_> - R_<}{R_<} \approx \frac{15\omega^2}{16\pi G \rho_T} \approx 0,004 \ . \tag{5}$$

Nesta equação $\rho_T = 5,5 \times 10^3\ kg/m^3$ representa a densidade média de massa da Terra.

Existem vários aspectos questionáveis neste resultado. Em primeiro lugar, esta variação fracionária f depende da rotação angular da Terra em relação ao espaço absoluto ou em relação a um sistema de referência inercial. De acordo com esta interpretação, o universo distante composto de estrelas e galáxias poderia desaparecer sem afetar o valor de f. Esta consequência não é intuitiva. Afinal de contas, se a Terra estivesse sozinha no universo, não faria sentido afirmar que ela gira. Consequentemente, seu achatamento deveria desaparecer quando as estrelas e galáxias distantes desaparecessem, de acordo com as ideias de Ernst Mach. Além disso, de acordo com a equação que acabamos de apresentar, caso a Terra permanecesse estacionária em um referencial inercial, enquanto que todo o universo distante girasse ao redor do eixo Norte-Sul da Terra na direção oposta (comparada com a situação anterior) com o período de um dia, a Terra não ficaria achatada. Novamente esta consequência é contrária aos pontos de vista de Ernst Mach. Adicionalmente, a mudança fracionária f depende apenas da densidade da Terra, não dependendo da densidade da matéria distante. Consequentemente, se fosse possível dobrar a densidade média de matéria do universo distante, sem afetar a densidade de matéria da Terra, o resultado anterior não seria afetado. Esta conclusão mostra que não apenas o espaço e o tempo são absolutos na mecânica clássica, já que também são absolutos a massa ou a densidade de matéria. Todos estes aspectos são contrários ao princípio das proporções físicas.

A grande maioria das leis físicas não satisfaz ao princípio das proporções físicas. Sempre que houver leis físicas expressas em termos de igualdades, em vez de proporções, e na qual aparecem algumas constantes locais (tais como a constante elástica, k, a constante dielétrica do meio, ε, a permeabilidade magnética do meio, μ, ...), ou na qual apareçam algumas constantes universais (tais como a constante universal da gravitação, G, a permissividade do vácuo, ε_0, a constante de Boltzmann, k_B, a constante de Planck, h, ...), então estas leis têm de estar incompletas, embora possam ser corretas. Alguns exemplos:

- A lei dos gases ideais, $PV = k_B NT = RnT$ (com P sendo a pressão do gás, V seu volume, $k_B = 1,38 \times 10^{-23}\ J/K$ a constante de Boltzmann, N o número de átomos ou moléculas no volume V, sendo T a temperatura, $R = 8,3\ J/K$ a constante universal dos gases e n o número de moles no volume V);
- A velocidade v_s do som, $v_s = \sqrt{B/\rho}$ (sendo B o módulo de elasticidade volumétrico do fluido com densidade ou massa específica ρ);
- A lei de Ohm, $V = RI$ (na qual V é a voltagem ou diferença de potencial entre dois pontos A e B de um condutor com resistência R no qual flui a corrente elétrica constante I);
- Etc.

5 Implementação do Princípio das Proporções Físicas

Discutimos agora como implementar este princípio para completar as leis físicas que ainda consideramos incompletas. Inicialmente consideramos a hidrostática e o princípio de Arquimedes. Embora a equação (1) satisfaça ao princípio das proporções físicas, vamos discutir uma forma incompleta desta lei.

É fácil imaginar como as pessoas que não estivessem cientes dos resultados de Arquimedes poderiam chegar a uma lei correta, mas incompleta, da lei do empuxo. Essas pessoas poderiam chegar na lei incompleta ao fazer experiências com corpos flutuantes. Elas poderiam, por exemplo, colocar gelo, cortiça, madeira etc. flutuando apenas na água. Elas poderiam então concluir que a razão do volume submerso, $V_{submerso}$, para o volume total do corpo, V_T, era proporcional à densidade do corpo sólido, ρ_S, a saber:

$$\frac{V_{submerso}}{V_T} = A\rho_S \ . \tag{6}$$

Nesta equação a grandeza A representaria uma constante de proporcionalidade com as dimensões do inverso de uma densidade. O valor desta constante seria o mesmo para todos os corpos sólidos mencionados anteriormente (gelo, cortiça, madeira etc.). Esta equação é correta dimensionalmente e é invariante sob uma transformação de unidades. O valor numérico de A vai depender do sistema de unidades, por exemplo, $A = 1,0 \times 10^3\ kg/m^3$ ou $A = 1,6 \times 10^{-5}\ g/in^3$. Apesar disso, a forma da equação será sempre a mesma em todos os sistemas de unidades. Esta relação contaria como sendo uma equação "completa" se fosse julgada pelos padrões de Buckingham discutidos anteriormente.

Embora esta lei descreva corretamente o comportamento dos corpos flutuando na água, ela está incompleta. Para transformar esta lei em uma relação compatível com o PPF seria necessário descobrir se a constante A tem uma origem cosmológica, local ou microscópica. Especificamente, seria necessário descobrir se $1/A$ é proporcional à densidade média de matéria do universo, à densidade do fluido local onde o sólido está flutuando, ou à densidade das moléculas que compõem o fluido, por exemplo. Ao flutuar os mesmos corpos sólidos em fluidos diferentes tais como mercúrio líquido, gasolina e álcool, seria possível descobrir que $A = 1/\rho_F$, ou seja, que a constante A tem o valor do inverso da densidade do fluido, ρ_F, no qual os corpos estão flutuando. A situação poderia então ser descrita pela equação (1) e a lei passaria a ser considerada completa.

A mecânica relacional satisfaz completamente ao princípio de Mach e ao princípio das proporções físicas que é ainda mais geral que o princípio de Mach. Ela está apresentada e discutida em várias publicações.[26] Ela é baseada na lei de Weber aplicada para a gravitação e para o eletromagnetismo.[27] A força de Weber depende apenas da distância entre os corpos que estão interagindo, da velocidade radial relativa entre eles e da aceleração radial relativa entre eles, de tal forma que ela é completamente relacional. Existem várias referências recentes discutindo a eletrodinâmica de Weber.[28] A mecânica relacional é baseada também no princípio de equilíbrio dinâmico:[29]

> A soma de todas as forças de qualquer natureza (gravitacional, elétrica, magnética, elástica, nuclear etc.) agindo sobre qualquer corpo é sempre nula em todos os sistemas de referência.

Logo, como é nula a soma de todas as forças, apenas razões de forças serão detectáveis ou mensuráveis. Não é relevante o sistema de unidades a ser utilizado, isto é, pode ser o $MKSA$, o cgs ou qualquer outro sistema de unidades. Além disso, pode ser escolhido de forma arbitrária a unidade ou dimensão das forças, desde que todas as forças tenham a mesma unidade.

Consideramos agora a queda livre de um corpo de massa gravitacional m_g em direção ao centro da Terra de acordo com a mecânica relacional. Seja r a distância do corpo ao centro da Terra. A aceleração a_{mU} do corpo em relação ao referencial universal U, é dada por:[30]

[26] [Ass89], [Ass98], [Ass99], [Ass13], [Ass14], [Gra90d], [Gra90d], [Gra90a], [Gra90c], [Gra90e], [Gra90b], [Wes90b], [Wes90c], [Wes90d], [Wes90a], [Wes91], [GG93], [Zyl94], [Phi96] e [GV99].

[27] [Web94].

[28] [Ass92b], [Ass94], [Ass98], [Ass99], [Ass15b], [Wes87], [Wes90b], [Wes90c], [Wes90d], [Phi90a], [Phi90b], [Phi92], [Gal93], [GM95], [KF96], [FK97], [ARM99], [Kel99], [BA01], [BA15] e [GVMA02].

[29] [Ass89], [Ass98], [Ass99, Seção 8.1], [Ass13] e [Ass14].

[30] [Ass89], [Ass98, Seções 8.4, 8.5 e 9.2], [Ass13] e [Ass14].

$$a_{mU} = \frac{3c^2}{2\alpha\ \pi\rho_{g0}R_0^2}\frac{M_{gT}}{r^2}\ , \tag{7}$$

ou

$$\frac{a_{mU}}{a_0} = \frac{2}{\alpha}\frac{M_{gT}}{M_{g0}}\frac{R_0^2}{r^2}\ . \tag{8}$$

Discutimos agora detalhadamente esta relação, inicialmente explicando seus termos. A massa gravitacional da Terra é representadas por M_{gT}. A distância entre o corpo de prova e o centro da Terra é dada por r. A massa gravitacional do corpo de prova, m_g, não aparece nesta relação, só aparecendo sua aceleração em relação ao sistema de referência universal U, dada por a_{mU}. O sistema de referência universal é o referencial no qual o conjunto das galáxias distantes é visto como estando essencialmente em repouso (exceto pelas velocidades aleatórias ou peculiares das galáxias), sem ter qualquer rotação como um todo e sem ter qualquer aceleração linear como um todo. As propriedades cosmológicas do universo aparecem no raio do universo conhecido dado por $R_0 \approx 10^{26}\ m$ e na densidade média de massa gravitacional do universo, representada por $\rho_{g0} \approx 3 \times 10^{-27}\ kg/m^3$. Caso o universo seja infinito espacialmente, a constante R_0 representará um comprimento característico das interações gravitacionais, a saber, a distância efetiva das interações gravitacionais, distância esta que surge de um decaimento exponencial na gravitação. A massa gravitacional no universo conhecido é dada por $M_{g0} = 4\pi\rho_{g0}R_0^3/3 \approx 10^{52}\ kg$. Caso o universo tenha um tamanho infinito e possua uma massa gravitacional total infinita, então M_{g0} irá representar uma massa gravitacional característica do universo (isto é, a massa gravitacional contida no volume característico $4\pi R_0^3/3$), ou seja, esta massa M_{g0} seria a massa efetiva de todo o universo que estaria exercendo efeitos gravitacionais sobre os corpos locais. Para chegar nas equações (7) e (8) também relacionamos a velocidade da luz, $c = 3 \times 10^8\ m/s$, com a constante de Hubble, $H_0 \approx 3 \times 10^{-18}\ s^{-1}$, através da relação $R_0 = c/H_0$. Uma aceleração cosmológica característica é dada por $a_0 \equiv R_0/H_0^2 \approx 6 \times 10^{-10}\ ms^{-2}$. Além disso, a grandeza α representa um número adimensional cujo valor será 6 se trabalharmos com um universo finito e integrarmos a lei de Weber para a gravitação até o raio de Hubble R_0. Por outro lado, se trabalharmos com a lei de Weber assumindo também um decaimento exponencial na gravitação, poderemos integrar até uma distância infinita e neste caso o valor de α será dado por $\alpha = 12$.

O aspecto importante que deve ser ressaltado na equação (8) é que apenas são relevantes uma razão de massas gravitacionais, uma razão de distâncias e uma razão de acelerações. Logo, dobrar a massa gravitacional da Terra e manter a massa gravitacional característica M_{g0} do universo distante inalterada, é equivalente a manter inalterada a massa gravitacional da Terra ao mesmo tempo em que dividimos pela metade a massa gravitacional característica do universo distante. Nestes dois casos a aceleração de queda livre do corpo de prova vai dobrar, comparada com seu valor atual de $9,8\ m/s^2$. Ao dividir por dois a distância r entre o centro da Terra e o corpo de prova fazemos com que a aceleração de queda livre aumente quatro vezes. De acordo com a equação (8), o mesmo efeito vai ocorrer ao manter inalterados os valores das grandezas a_0, M_{gT}, M_{g0} e r, mas dobrando o valor de R_0. A grandeza a_0 tem um valor muito pequeno. Acelerações tão pequenas ocorrem em uma escala cosmológica na aceleração centrípeta das galáxias em rotação. Este fato pode indicar que os efeitos gravitacionais locais (tais como a aceleração de queda livre considerada aqui) podem estar relacionados com a rotação das galáxias distantes. Por exemplo, se dobrarmos a taxa de rotação de todas as galáxias no universo, pode ser que uma consequência seja que a aceleração de queda livre nos corpos próximos à superfície da Terra tenha seu valor dobrado, passando para $19,6\ m/s^2$. Ou então, pode ser que a grandeza a_0 possa representar a aceleração média de todos os corpos no universo em relação ao sistema de referência universal U. Ao comparar a equação (7) com a equação equivalente da mecânica clássica, equação (4), vemos que a constante universal da gravitação, G, passa a ser vista na mecânica relacional como sendo uma função das propriedades cosmológicas do universo, a saber: $G = 3c^2/\left(2\alpha\ \pi\rho_{g0}R_0^2\right)$. Todos estes aspectos estão de acordo com o PPF.

Com este exemplo também é possível ilustrar o conteúdo físico do PPF. Historicamente Galileu foi o primeiro a descobrir que a aceleração de queda livre na superfície da Terra é independente do peso ou da composição química dos corpos em queda. Mais tarde Newton mostrou que esta aceleração de queda livre é proporcional à massa do corpo que está atraindo os corpos em queda. Vamos agora imaginar que estas duas descobertas tivessem ocorrido em ordem inversa. Isto é, inicialmente um certo cientista A teria descoberto que a aceleração de queda livre é proporcional à massa do corpo que está atraindo os corpos em queda. De acordo com o PPF poderíamos então escrever esta lei da seguinte maneira: $a_1/a_0 = m_T/m_0$, na qual a_1 representa a aceleração do corpo de prova com massa m_1, enquanto que m_T representa a massa gravitacional do corpo que está atraindo (este corpo que está atraindo pode ser, por exemplo, a Terra, ou a Lua, ou Marte, ou ...). As grandezas a_0 e m_0 representariam uma aceleração e uma massa de corpos ainda desconhecidos. A equação de queda livre neste formato é compatível com o PPF, mas ainda não está completa, já que ainda não teríamos identificado a quais corpos pertenceriam as grandezas m_0 e a_0. Se compararmos esta última frase com a primeira formulação do PPF, ainda não "conhecemos" as grandezas m_0 e a_0. Um suspeito razoável para a massa m_0 seria $m_0 = m_1$, isto é, a massa m_0 poderia ser a massa m_1 do corpo em queda livre (tal como uma maçã ou uma pedra, por exemplo). Contudo, ao seguir o procedimento de Galileu, ou então através de pesquisas experimentais independentes, seria mostrado que a aceleração de queda livre não depende da massa do corpo em queda. Esta conclusão eliminaria este suspeito, ou seja, concluiríamos que m_0 é diferente de m_1. Como os dois candidatos óbvios para m_0 já foram considerados (a saber, a massa m_T do corpo que está atraindo e a massa m_1 do corpo em queda livre), só sobraria a massa dos corpos distantes do universo. Isto é, de alguma maneira a grandeza m_0 tem de ser uma massa representativa das estrelas ou das galáxias distantes. A mecânica relacional, como vimos anteriormente, mostra que de fato é isto que ocorre.

Vamos considerar agora a forma da Terra. De acordo com a mecânica relacional o achatamento fracionário f da Terra é dado por:[31]

$$f \equiv \frac{R_{>} - R_{<}}{R_{<}} \approx \frac{5\alpha}{8} \frac{\omega_{TU}^2}{H_0^2} \frac{\rho_{g0}}{\rho_{gT}} \ . \tag{9}$$

Nessa equação α é uma constante numérica adimensional. Os valores da constante de Hubble, H_0, e da densidade média de matéria no universo, ρ_{g0}, ainda não são conhecidos com grande precisão. Logo, não é possível dar um valor exato para a equação (9). Contudo, a ordem de grandeza conhecida destas duas grandezas, H_0 e ρ_{g0}, é compatível com o valor observado para f dado por $0,004$. Podemos também inverter o raciocínio. Isto é, podemos utilizar que o valor observado para f é dado por $0,004$. Com este valor para f (juntamente com o valor conhecido da velocidade angular de rotação da Terra em relação ao referencial universal das galáxias distantes, além do valor conhecido da densidade de matéria da Terra) deduzimos então o valor da razão $5\alpha\rho_{g0}/8H_0^2$.

Contudo, o que queremos enfatizar aqui são os aspectos Machianos da equação (9). O primeiro aspecto é que a velocidade angular de rotação ω_{TU} que aparece na mecânica relacional é a rotação angular da Terra em relação ao referencial universal das galáxias distantes. Esta velocidade angular não é mais interpretada, como ocorria na mecânica newtoniana, como sendo a velocidade angular da Terra em relação ao espaço vazio. De acordo com a mecânica relacional, vai ocorrer o mesmo achatamento da Terra em duas situações equivalentes: (a) Quando a Terra gira ao redor de seu eixo em relação a um referencial arbitrário, enquanto que o universo distante permanece sem rotação neste referencial; ou então (b) quando o universo distante gira ao redor do eixo da Terra na direção oposta em relação a este sistema de referência arbitrário, enquanto a Terra permanece estacionária neste referencial. Ou seja, obteremos o mesmo achatamento fracionário f, desde que a rotação relativa entre a Terra e o universo distante tenha o mesmo valor numérico nos dois casos (a) e (b). Logo, dentro da mecânica relacional o achatamento da Terra não pode mais ser considerado como uma prova da rotação real ou absoluta da Terra. A mecânica relacional não é a única teoria que implementa este efeito. O mesmo pode ser dito de uma outra formulação da mecânica devida a Barbour e Bertotti.[32] O enfoque destes autores envolve grandezas relacionais, derivadas intrínsecas e o espaço de configuração relativo do universo. Atualmente eles seguem de perto o enfoque da relatividade geral.[33] Na literatura encontra-se uma discussão de outros enfoques para a implementação do princípio de Mach.[34]

O segundo aspecto Machiano na equação (9) é que este achatamento depende da razão entre a densidade de matéria do universo distante, ρ_{g0}, e a densidade da Terra, ρ_{gT}. Podemos então aumentar o achatamento da Terra de duas maneiras

[31] [Ass98, Seções 3.3.2 e 9.5.1], [Ass99, Seções 3.3.2 e 9.5.1], [Ass13, Seções 9.2 e 22.4] e [Ass14, Seções 10.2 e 23.4].

[32] [Bar74], [BB77] e [BB82].

[33] [BP95].

[34] [Ass98, Cap. 11], [Ass99, Cap. 11], [Ass13, Cap. 24] e [Ass14, Cap. 25].

distintas, a saber: (a) Tanto diminuindo a densidade da Terra; quanto (b) aumentando a densidade do universo distante (supondo nestes dois casos que mantivemos inalterada o valor da rotação angular da Terra, ω_{TU}, em relação ao referencial universal). Além disso, quando a densidade de massa gravitacional do universo vai para zero, o mesmo acontece com o achatamento fracionário f da Terra. Este resultado é totalmente razoável, já que neste caso haveria apenas a Terra no universo, sendo então sem sentido falar de sua rotação. Afinal de contas, se a Terra está sozinha no universo, ela estaria girando em relação a que? Consequentemente, o achatamento da Terra tem de desaparecer se ela estiver sozinha no universo. Este fato é previsto na mecânica relacional, mas não ocorre na mecânica clássica. Na mecânica relacional só são importantes razões de grandezas conhecidas. Logo, a massa gravitacional e a densidade de matéria gravitacional não são grandezas absolutas na mecânica relacional.

O último aspecto a ser considerado na equação (9) é a razão entre a velocidade de rotação angular da Terra, ω_{TU}, e a constante de Hubble, H_0. Se dobrarmos a velocidade de rotação angular da Terra em relação ao referencial universal das galáxias distantes, o achatamento da Terra aumenta quatro vezes, já que ele é proporcional ao quadrado da velocidade angular de rotação da Terra. Ao dizer que a taxa de rotação da Terra aumentou, temos de comparar esta taxa com alguma outra coisa (por exemplo, com um relógio). O mesmo aumento no achatamento da Terra também deve acontecer se a Terra não alterar sua taxa de rotação (relativo a um padrão arbitrário), mas se simultaneamente todos os outros movimentos no universo ficarem mais lentos por um fator de 2 (em relação ao mesmo padrão arbitrário). Este fato significa que a constante de Hubble tem de ser, de alguma maneira, caracterizada como uma frequência de oscilação e/ou de rotação da matéria do universo; ou então tem de estar relacionada com uma velocidade angular de rotação da massa gravitacional cosmológica característica M_{g0} em relação ao universo muito distante; ou ... Se diminuirmos por um fator 2 todas estas frequências (com exceção da frequência de rotação da Terra em relação ao referencial universal), a constante de Hubble terá seu valor dividido por 2 quando comparada com seu valor atual, sendo que além disso o achatamento da Terra aumentará em quatro vezes, assim como ocorreu na situação anterior. Este fato é uma consequência da mecânica relacional, não ocorrendo na mecânica clássica. Ao dobrar todas as frequências (incluindo ω_{TU} e H_0), não mudamos o valor de f. Todas estas consequências são razoáveis do ponto de vista físico.

Atualmente não há conflitos entre a mecânica relacional e as observações conhecidas. Possíveis testes experimentais a serem realizados no futuro já foram publicados.[35] Eles incluem uma mudança na massa inercial efetiva de um corpo ao colocá-lo dentro de uma casca esférica com massa, a detecção de massas inerciais efetivas anisotrópicas, a detecção da precessão geodética e devida ao movimento de giroscópios,[36] além de testar se há ou não um decaimento exponencial na gravitação. Deve ser enfatizado que de acordo com a eletrodinâmica

[35] [Ass98, Seção 10.4], [Ass99, Seção 10.4], [Ass13, Seção 23.5] e [Ass14, Seção 24.5].
[36] Ver também [Eby79] e [Eby97].

de Weber a massa inercial efetiva de um corpo eletrizado deve mudar se ele for colocado dentro de uma casca esférica estacionária e carregada uniformemente. Contudo, este efeito não deve acontecer de acordo com as equações de Maxwell nem de acordo com a força de Lorentz. Este efeito é análogo a um princípio de Mach elétrico e já foi previsto quantitativamente.[37] De acordo com nosso conhecimento, as primeiras experiências para testar a existência deste efeito foram feitas por Mikhailov.[38] O valor numérico e o sinal do efeito que ele detectou coincidem com aqueles previstos pela eletrodinâmica de Weber. De acordo com Costa de Beauregard e Lochak, se a experiência de Mikhailov for confirmada por pesquisas independentes, pode tornar-se um “marco”.[39]

6 Aplicações para Outras Situações

Consideramos agora a aplicação do PPF para situações que envolvem conceitos físicos diferentes. Ainda não sabemos como implementar este princípio nestas novas situações. Mas queremos mostrar as consequências do princípio para motivar a pesquisa de como implementá-lo em outras situações.

Inicialmente consideramos a eletrostática. Considere duas cargas q_1 e q_2 do mesmo sinal repelindo-se. Podemos mantê-las separadas a uma distância constante d aplicando em cada carga uma força externa. Podemos, por exemplo, colocar uma mola dielétrica de constante elástica k e comprimento relaxado ℓ_0 entre as duas cargas. Se deixarmos a mola ir esticando lentamente, ela irá parar quando tiver um comprimento d. Igualando a força de Coulomb entre as cargas com a força elástica $k(d - \ell_0)$ exercida pela mola obteremos o deslocamento fracionário f da mola, definido como $f \equiv (d - \ell_0)/\ell_0$, como sendo dado por:

$$f \equiv \frac{d - \ell_0}{\ell_0} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2 \ell_0 k} \ . \tag{10}$$

Nesta equação a constante $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ $C^2 s^2/kgm^3$ é chamada de permissividade do vácuo. Ao dobrar o valor das cargas q_1 e q_2, aumentamos o valor de f em quatro vezes. De acordo com o PPF, o deslocamento fracionário f também deve aumentar em quatro vezes se mantivermos q_1 e q_2 inalteradas, mas se dividirmos por 2 o valor de todas as outras cargas no universo (isto é, as cargas dos átomos e moléculas compondo a mola, as cargas da Terra e de todos os outros corpos do universo, com exceção de q_1 e q_2). Contudo, esta consequência ainda não está implementada nas teorias atuais, indicando que elas devem estar incompletas. Esta influência pode ser totalmente local (ao dividir por 2 o valor de todas as cargas da mola e das galáxias distantes, mudamos apenas o valor da constante elástica para $k/4$, sem afetar o valor de ε_0), pode ser completamente cosmológica (dividindo por 2 as cargas da mola e de todos os corpos astronômicos não afetaria o valor de k, sendo que apenas a permissividade do vácuo mudaria para $\varepsilon_0/4$), ou então pode ser uma mistura destes dois efeitos

[37] [Ass92a] e [Ass93].
[38] [Mik99], [Mik01] e [Mik03].
[39] [CL99].

(ao dividir por 2 o valor das cargas da mola e de todos os corpos astronômicos afetaríamos a constante elástica da mola e também a permissividade do vácuo, tal que seus novos valores seriam, por exemplo, $k/2$ e $\varepsilon_0/2$).

Suponha agora que removemos a mola, soltando as partículas eletrizadas com cargas q_1 e q_2. Elas serão então aceleradas em direções opostas. De acordo com a mecânica clássica, o valor inicial da aceleração de q_1 em relação ao espaço absoluto ou em relação a um referencial inercial será dada por $a_1 = q_1q_2/(4\pi\varepsilon_0 d^2 m_{i1})$, onde m_{i1} representa a massa inercial do corpo 1. Ao dobrar os valores de q_1 e de q_2 em relação a uma carga de referência arbitrária, aumentamos em quatro vezes o valor da aceleração de q_1. O mesmo efeito deve acontecer ao manter os valores de q_1 e q_2 inalterados, mas ao dividirmos por dois (comparado com a mesma carga padrão arbitrária) o valor de todas as outras cargas do universo. Contudo, o aumento no valor de a_1 nesta segunda situação não está representado por esta lei, já que não aparecem outras cargas nesta equação. Este fato significa que as cargas elétricas são conceitos absolutos na física clássica. O valor de a_1 depende de q_1q_2, não dependendo da razão do produto destas cargas para o produto de outras cargas no universo. Para implementar o PPF seria necessário encontrar outras cargas embutidas (ou escondidas) no produto $\varepsilon_0 m_{i1}$. Talvez estas outras cargas sejam cargas microscópicas que compõem as massas inerciais m_{i1} e m_{i2} (isto é, elas podem ser as cargas compondo os átomos e moléculas dos corpos 1 e 2), ou talvez elas sejam as cargas compondo as estrelas e galáxias do universo distante. De qualquer forma, o PPF ainda não foi implementado para este caso.

De acordo com a mecânica relacional, o valor da aceleração de q_1 em relação ao sistema de referência universal, a_{1U}, é dada por:[40]

$$a_{1U} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2 m_{g1}} \ . \tag{11}$$

Nesta equação m_{g1} representa a massa gravitacional do corpo 1. Na mecânica relacional aparecem apenas massas gravitacionais, sendo a massa inercial um conceito derivado que surge apenas ao comparar a mecânica relacional com a mecânica clássica. De acordo com a equação (11), esta aceleração aumenta em quatro vezes ao dobrar os valores de q_1 e q_2. O mesmo tem de acontecer mantendo q_1 e q_2 inalteradas, mas dividindo por dois o valor de todas as outras cargas do universo (isto é, ao dividir por dois as cargas de todos os átomos e moléculas das galáxias distantes, e ao dividir por dois as cargas microscópicas que compõem os corpos 1 e 2). Novamente temos que o efeito pode ser totalmente cosmológico (afetando apenas a permissividade do vácuo ε_0), totalmente local (afetando apenas as massas gravitacionais m_{g1} e m_{g2}), ou uma mistura destas duas componentes (afetando a permissividade do vácuo e também as duas massas gravitacionais).

Um exemplo de como a massa gravitacional de um corpo pode depender de suas cargas constituintes microscópicas foi dado em 1992.[41] A força gravitacional newtoniana entre dois corpos de massas gravitacionais m_{g1} e m_{g2} foi então

[40] [Ass98, Cap. 8] e [Ass99, Seção 8.5].
[41] [Ass92c] e [Ass95].

deduzida como sendo uma força eletromagnética residual surgindo dos dipolos neutros oscilantes que comporiam o corpo 1 ao interagirem com os dipolos neutros oscilantes que comporiam o corpo 2 (sendo que cada dipolo seria feito de uma carga negativa oscilando ao redor de uma carga positiva). Encontrou-se então que a massa gravitacional de cada corpo era proporcional ao número de dipolos oscilantes que o compunham, sendo também proporcional ao fator q^2/ε_0, no qual q representa a carga positiva (ou negativa) de cada dipolo neutro. Com este modelo é possível implementar o PPF para as cargas elétricas.

Uma outra situação que podemos considerar aqui envolve a força de Ampère[42] entre circuitos elétricos conduzindo correntes constantes I_1 e I_2, força esta proporcional ao produto $I_1 I_2$. Como as correntes elétricas são proporcionais às velocidades de arraste dos elétrons de condução em relação às redes cristalinas de cada fio, podemos aumentar em quatro vezes a força entre os dois circuitos ao dobrar as velocidades de arraste dos elétrons dos dois circuitos. As consequências deste aumento na força podem ser detectados estaticamente (observando o aumento na tensão de uma mola que liga os dois circuitos, mantendo-os a uma distância constante) ou dinamicamente (um aumento na aceleração dos dois circuitos quando a mola que os une é rompida). A mesma consequência de quadruplicar a força entre os circuitos também tem de ocorrer ao manter as correntes elétricas I_1 e I_2 inalteradas, mas fazendo com que todos os outros corpos do universo desloquem-se com a metade do valor de suas velocidades atuais. Como as teorias modernas não implementam esta consequência, elas têm de estar incompletas.

Considere agora a equação de estado para um gás ideal, $PV = Nk_BT$. Este equação não satisfaz ao PPF. A equação de um gás ideal satisfazendo a este princípio deve ter a seguinte forma, $(P/P_0)(V/V_0) = a(N/N_0)(T/T_0)$, na qual a constante a represente uma número adimensional, sendo ainda P_0, V_0, N_0 e T_0, respectivamente, os valores da pressão, volume, número de partículas e temperatura locais e/ou cosmológicas. Quando for encontrada a teoria que leve a esta nova equação para os gases ideais, será então possível relacional a constante de Boltzmann com as propriedades locais ou cosmológicas do ambiente, sendo essas propriedades locais ou cosmológicas a pressão P_0, o volume V_0, o número de partículas N_0 e a temperatura T_0. Por exemplo, a mecânica relacional mostrou que a constante universal da gravitação, G, é proporcional a H_0^2/ρ_{g0}. Este fato mostra que esta grandeza não é mais uma constante (assim como era encarada na mecânica newtoniana), sendo agora considerada uma função das propriedades cosmológicas do universo (já que depende da constante de Hubble e da densidade média de matéria do universo). Algo análogo deve valer para a constante de Boltzmann. A nova equação descrevendo o comportamento de um gás ideal será diferente da equação atual. Mas não será apenas este fato que irá mudar, já que também ganharemos uma nova compreensão da lei dos gases ideais, percebendo conexões entre as propriedades locais de um gás e as propriedades das galáxias distantes. Por exemplo, ao obtermos essa nova lei dos gases ideais compatível com o PPF, se um número fixo de átomos está encerrado em um volume fixo

[42] [Cha09], [AC11] e [AC15].

e aumentamos em quatro vezes sua temperatura, a pressão do gás ainda vai aumentar em quatro vezes, assim como ocorre na teoria atual. Mas quando for obtida esta nova lei compatível com o PPF, será possível mostrar que também poderemos aumentar a pressão do gás em quatro vezes (como indicado, por exemplo, por um manômetro) ao manter com valores constantes a temperatura, volume e número de partículas do gás, sendo que simultaneamente dividimos por quatro a temperatura dos corpos distantes do universo (estrelas e galáxias). O mesmo pode ser dito em relação ao volume e número de partículas no gás ou no universo distante. Ou seja, se medimos algum efeito localmente quando mudamos a pressão, volume, número de átomos ou temperatura do gás; será possível mostrar quando tivermos uma teoria completa que a mesma variação do efeito local também vai ocorrer quando a mudança oposta ocorrer nos corpos distantes do universo.

Podemos dizer a mesma coisa em quase todas as relações e leis da física. Outras constantes universais tais como a velocidade da luz no vácuo, a constante de Planck etc. têm de ser funções das propriedades do universo distante (relações macroscópicas) ou têm de ser propriedades das partículas locais (relações microscópicas). Neste aspecto podemos ver que este princípio tem algumas relações com os grandes números cosmológicos de Dirac (ou com a variação das constantes universais). Ao observar vários números adimensionais cujos valores tinham uma ordem de grandeza de 10^{39}, tais como a razão entre a força elétrica e gravitacional entre um elétron e um próton, ou a razão do tempo de Hubble para uma unidade de tempo fixada pelas constantes da teoria atômica, Dirac supôs que estes números deveriam estar relacionados entre si. Em suas palavras:[43]

> [...] podemos presumir que tal coincidência é devida a alguma conexão profunda na natureza entre a cosmologia e a teoria atômica.

Ele apresentou seu novo princípio para a cosmologia da seguinte maneira:

> Quaisquer dois números adimensionais muito grandes que ocorrem na natureza estão conectados por uma relação matemática simples, na qual os coeficientes têm a ordem de grandeza do número um.

O princípio das proporções físicas apresentado neste trabalho pode ajudar a elucidar a conexão entre o átomo microscópioco e o cosmos macroscópico percebida por Dirac. Esse princípio oferece direções de onde encontrar esta compreensão profunda da natureza ligando as propriedades microscópicas com as propriedades macroscópicas do universo.

Agradecimentos

O autor agradece à Fundação Alexander von Humboldt, da Alemanha, por uma bolsa-pesquisa durante a qual este trabalho em inglês foi concluído. Ele também agradece ao Instituto e Fundação Louis de Broglie pelo apoio financeiro para

[43] [Dir38].

participar do Congresso sobre Eletromagnetismo (Peyresq, França, setembro de 2002). Foram importantes também discussões com A. Ghosh, C. S. Unnikrishnan, A. R. Prasanna, N. Graneau, O. E. Rössler e F. A. G. Redondo. Ele agradece ainda ao Prof. Mario Novello e ao CBPF pelo convite para publicar essa tradução e participar da Conferência As Múltiplas Interpretações de Ernst Mach em 27 de abril de 2018. Agradece ainda ao FAEPEX/UNICAMP pelo auxílio financeiro.

Referências

[AC11] A. K. T. Assis and J. P. M. d. C. Chaib. *Eletrodinâmica de Ampère: Análise do Significado e da Evolução da Força de Ampère, Juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*. Editora da Unicamp, Campinas, 2011. ISBN: 9788526809383.

[AC15] A. K. T. Assis and J. P. M. C. Chaib. *Ampère's Electrodynamics — Analysis of the Meaning and Evolution of Ampère's Force between Current Elements, together with a Complete Translation of His Masterpiece: Theory of Electrodynamic Phenomena, Uniquely Deduced from Experience*. Apeiron, Montreal, 2015. ISBN: 978-1-987980-03-5. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Arc12] Archimedes. *The Works of Archimedes*. Dover, New York, 1912. Editado em notação moderna com capítulos introdutórios de T. L. Heath, com um suplemento: *The Method of Archimedes*, descoberto recentemente por Heiberg.

[Arc52] Archimedes. *The Works of Archimedes including* The Method, volume 11 of *The Great Books of the Western World*. Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952. Traduzido por T. L. Heath.

[ARM99] A. K. T. Assis, W. A. Rodrigues Jr., and A. J. Mania. The electric field outside a stationary resistive wire carrying a constant current. *Foundations of Physics*, 29:729–753, 1999.

[Arq12] Arquimedes. Sobre os corpos flutuantes (segunda parte). *Revista Brasileira de História da Ciência*, 5:369–397, 2012. Tradução de A. K. T. Assis e N. B. F. Campos.

[Ass89] A. K. T. Assis. On Mach's principle. *Foundations of Physics Letters*, 2:301–318, 1989.

[Ass92a] A. K. T. Assis. Centrifugal electrical force. *Communications in Theoretical Physics*, 18:475–478, 1992.

[Ass92b] A. K. T. Assis. *Curso de Eletrodinâmica de Weber*. Setor de Publicações do Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP, Campinas, 1992. Notas de Física IFGW

Número 5. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis e www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?down=60362.

[Ass92c] A. K. T. Assis. Deriving gravitation from electromagnetism. *Canadian Journal of Physics*, 70:330–340, 1992.

[Ass93] A. K. T. Assis. Changing the inertial mass of a charged particle. *Journal of the Physical Society of Japan*, 62:1418–1422, 1993.

[Ass94] A. K. T. Assis. *Weber's Electrodynamics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994. ISBN: 0792331370.

[Ass95] A. K. T. Assis. Gravitation as a fourth order electromagnetic effect. In T. W. Barrett and D. M. Grimes, editors, *Advanced Electromagnetism: Foundations, Theory and Applications*, pages 314–331, Singapore, 1995. World Scientific.

[Ass96] A. K. T. Assis. Sobre os corpos flutuantes — tradução comentada de um texto de Arquimedes. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 16:69–80, 1996.

[Ass98] A. K. T. Assis. *Mecânica Relacional*. Editora do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP/FAPESP, Campinas, 1998. ISBN: 8586497010. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass99] A. K. T. Assis. *Relational Mechanics*. Apeiron, Montreal, 1999. ISBN: 0968368921. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass01a] A. K. T. Assis. Applications of the principle of physical proportions to gravitation. In K. Rudnicki, editor, *Gravitation, Electromagnetism and Cosmology — Toward a New Synthesis*, pages 1–7, Montreal, 2001. Apeiron.

[Ass01b] A. K. T. Assis. Comparação entre a mecânica relacional e a relatividade geral de Einstein. In O. Pessoa Jr., editor, *Fundamentos da Física 2 — Simpósio David Bohm*, pages 27–38, São Paulo, 2001. Editora Livraria da Física.

[Ass04] A. K. T. Assis. The principle of physical proportions. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 29:149–171, 2004.

[Ass08] A. K. T. Assis. *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*. Apeiron, Montreal, 2008. ISBN: 9780973291179. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass11] A. K. T. Assis. *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2011. ISBN: 9788578611057.

[Ass13] A. K. T. Assis. *Mecânica Relacional e Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional*. Apeiron, Montreal, 2013. ISBN: 9780986492693. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass14] A. K. T. Assis. *Relational Mechanics and Implementation of Mach's Principle with Weber's Gravitational Force*. Apeiron, Montreal, 2014. ISBN: 978-0-9920456-3-0. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass15a] A. K. T. Assis. Das prinzip der physikalischen Größenvershältnisse. Traduzido (2015) a partir da versão em inglês por M. Pohl. Artigo original: A. K. T. Assis, "The principle of physical proportions," Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 29, pp. 149-171 (2004). Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis, 2015.

[Ass15b] A. K. T. Assis. *Eletrodinâmica de Weber: Teoria, Aplicações e Exercícios*. Editora da Unicamp, Campinas, 2015. Segunda edição. e-ISBN: 978-85-268-1240-6.

[BA01] M. d. A. Bueno and A. K. T. Assis. *Inductance and Force Calculations in Electrical Circuits*. Nova Science Publishers, Huntington, New York, 2001. ISBN: 1560729171.

[BA15] M. Bueno and A. K. T. Assis. *Cálculo de Indutância e de Força em Circuitos Elétricos*. Apeiron, Montreal, 2015. 2ª edição. ISBN: 978-1-987980-01-1. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Bar74] J. B. Barbour. Relative-distance Machian theories. *Nature*, 249:328–329, 1974. Erros de impressão corrigidos em Nature, vol. 250, p. 606 (1974).

[Bar89] J. B. Barbour. *Absolute or Relative Motion? — A study from a Machian point of view of the discovery and the structure of dynamical theories*, volume 1: *The Discovery of Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[BB77] J. B. Barbour and B. Bertotti. Gravity and inertia in a Machian framework. *Nuovo Cimento B*, 38:1–27, 1977.

[BB82] J. B. Barbour and B. Bertotti. Mach's principle and the structure of dynamical theories. *Proceedings of the Physical Society of London A*, 382:295–306, 1982.

[Bos98] R. J. Boscovich. On space and time as they are recognized by us. In O. E. Rössler, editor, *Endophysics — The World as an Interface*, pages 107–112. World Scientific, Singapore, 1998. Tradução para o inglês feita por O. E. Rössler a partir da versão original em latim de 1755.

[BP95] J. B. Barbour and H. Pfister (editors). *Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity.* Birkhäuser, Boston, 1995.

[Bri16] P. W. Bridgman. Tolman's principle of similitude. *Physical Review*, 8:423–431, 1916.

[Buc14] E. Buckingham. On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Physical Review*, 4:345–376, 1914.

[Cha09] J. P. M. d. C. Chaib, 2009. Tese de doutorado: "Análise do Significado e da Evolução do Conceito de Força de Ampère, juntamente com a Tradução Comentada de sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica." Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP (Campinas, SP). Orientador: A. K. T. Assis. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis e webbif.ifi.unicamp.br/teses.

[CL99] O. Costa de Beauregard and G. Lochak. Comment on Mikhailov's article. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 24:159–160, 1999.

[Dir38] P. A. M. Dirac. A new basis for cosmology. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 165:199–208, 1938.

[Eby79] P. Eby. Gyro precession and Mach's principle. *General Relativity and Gravitation*, 11:111–117, 1979.

[Eby97] P. Eby. Machian mechanics with isotropic inertia. *General Relativity and Gravitation*, 29:621–635, 1997.

[Euc56a] Euclid. *The Thirteen Books of The Elements*, volume 1, Livros I-II. Dover, New York, 1956. Traduzido com introdução e comentários por Sir Thomas L. Heath.

[Euc56b] Euclid. *The Thirteen Books of The Elements*, volume 3, Livros X-XIII. Dover, New York, 1956. Traduzido com introdução e comentários por Sir Thomas L. Heath.

[Euc56c] Euclid. *The Thirteen Books of The Elements*, volume 2, Livros III-IX. Dover, New York, 1956. Traduzido com introdução e comentários por Sir Thomas L. Heath.

[FK97] J. Fukai and E. T. Kinzer. Compatibility of Weber's force with Maxwell's equations. *Galilean Electrodynamics*, 8:53–55, 1997.

[Fou52] J. B. J. Fourier. Analytical Theory of Heat. In *Great Books of the Western World, Vol. 45*, pages 161–251, Chicago, 1952. Encyclopaedia Britannica.

[Gal93] G. Galeczki. The ultimate speed and Weber's potential. *Physics Essays*, 6:448–450, 1993.

[GG93] P. Graneau and N. Graneau. *Newton Versus Einstein — How Matter Interacts with Matter*. Carlton Press, New York, 1993.

[Gho00] A. Ghosh. *Origin of Inertia: Extended Mach's Principle and Cosmological Consequences*. Apeiron, Montreal, 2000.

[GM95] G. Galeczki and P. Marquardt. Über die longitudinalen Ampèreschen Kräfte und Webers Elektrodynamik. *Fusion*, 16:15–17, 1995.

[Gra90a] P. Graneau. Far-action versus contact action. *Speculations in Science and Technology*, 13:191–201, 1990.

[Gra90b] P. Graneau. Has the mystery of inertia been solved? In U. Bartocci and J. P. Wesley, editors, *Proceedings of the Conference on Foundations of Mathematics and Physics*, pages 129–136, Blumberg, Germany, 1990. Benjamin Wesley Publisher.

[Gra90c] P. Graneau. Interconnecting action-at-a-distance. *Physics Essays*, 3:340–343, 1990.

[Gra90d] P. Graneau. The riddle of inertia. *Electronics and Wireless World*, 96:60–62, 1990.

[Gra90e] P. Graneau. Some cosmological consequences of Mach's principle. *Hadronic Journal Supplement*, 5:335–349, 1990.

[GV99] J. Guala-Valverde. *Inercia y Gravitacion*. Fundacion Julio Palacios, Neuquen, Argentina, 1999. Em colaboração com J. Tramaglia e R. Rapacioli. Disponível em: www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=90380.

[GVMA02] J. Guala-Valverde, P. Mazzoni, and R. Achilles. The homopolar motor: A true relativistic engine. *American Journal of Physics*, 70:1052–1055, 2002.

[Hoo35] R. Hooke. Law of elastic force. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 93–95, New York, 1935. McGraw-Hill.

[Kel99] A. G. Kelly. Experiments on unipolar induction. *Physics Essays*, 12:372–382, 1999.

[KF96] E. T. Kinzer and J. Fukai. Weber's force and Maxwell's equations. *Foundations of Physics Letters*, 9:457–461, 1996.

[Mac60] E. Mach. *The Science of Mechanics — A Critical and Historical Account of Its Development*. Open Court, La Salle, sixth edition, 1960. Tradução de J. McCormack.

[Mar81] R. d. A. Martins. The origin of dimensional analysis. *Journal of the Franklin Institute*, 311:331–337, 1981.

[Mik99] V. F. Mikhailov. The action of an electrostatic potential on the electron mass. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 24:161–169, 1999.

[Mik01] V. F. Mikhailov. Influence of an electrostatic potential on the inertial electron mass. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 26:33–38, 2001.

[Mik03] V. F. Mikhailov. Influence of a field-less electrostatic potential on the inertial electron mass. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 28:231–236, 2003.

[New34] I. Newton. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. University of California Press, Berkeley, 1934. Edição Cajori. Primeira edição publicada originalmente em latim em 1687.

[New90] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Nova Stella/Edusp, São Paulo, 1990. Livro I: O Movimento dos Corpos. Tradução de T. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Gehring e M. H. C. Célia.

[New08] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Edusp, São Paulo, 2008. Livro II: O Movimento dos Corpos (em Meios com Resistência). Livro III: O Sistema do Mundo (Tratado Matematicamente). Tradução de A. K. T. Assis. ISBN: 9788531410895.

[O'R65] A. O'Rahilly. *Electromagnetic Theory — A Critical Examination of Fundamentals*. Dover, New York, 1965.

[Pal64] J. Palacios. *Análisis Dimensional*. Espasa-Calpe S. A., Madrid, 1964. 2^a edição. Tradução para o inglês: Dimensional Analysis, McMillan, London, 1964; tradução para o francês: Analyse Dimensionnelle, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[Phi90a] T. E. Phipps Jr. Toward modernization of Weber's force law. *Physics Essays*, 3:414–420, 1990.

[Phi90b] T. E. Phipps Jr. Weber-type laws of action-at-a-distance in modern physics. *Apeiron*, 8:8–14, 1990.

[Phi92] T. E. Phipps Jr. Derivation of a modernized Weber force law. *Physics Essays*, 5:425–428, 1992.

[Phi96] T. E. Phipps, Jr. Clock rates in a machian universe. *Toth-Maatian Review*, 13:5910–5917, 1996.

[Red00a] F. A. G. Redondo, 2000. *Historia del Análisis Dimensional*. Tese de doutorado, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.

[Red00b] F. A. G. Redondo. El teorema π de buckingham: núcleo del análisis dimensional. *Boletin de la Sociedad Puig Adam*, 55:67–75, 2000.

[Red01] F. A. G. Redondo. Génesis y primera formulación del teorema π. *Boletin de la Sociedad Puig Adam*, 59:83–93, 2001.

[Red02] F. A. G. Redondo. El teorema π entre Vaschy y Buckingham: el método de las variables de dimensión cero. *Boletin de la Sociedad Puig Adam*, 60:71–81, 2002.

[Ste35] S. Stevin. The Inclined Plane. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 22–27, New York, 1935. McGraw-Hill.

[Sym71] K. R. Symon. *Mechanics.* Addison-Wesley, Reading, 1971. 3^a edição.

[Sym82] K. R. Symon. *Mecânica.* Editora Campus, Rio de Janeiro, 5ª ed., 1982. Tradução de G. B. Batista.

[Tol14] R. C. Tolman. The principle of similitude. *Physical Review*, 3:244–255, 1914.

[Web94] W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke,* W. Voigt, E. Riecke, H. Weber, F. Merkel and O. Fischer (editors), volume 1 to 6. Springer, Berlin, 1892-1894.

[Wes87] J. P. Wesley. Weber electrodynamics extended to include radiation. *Speculations in Science and Technology*, 10:47–61, 1987.

[Wes90a] J. P. Wesley. Evidence for Weber-Wesley electrodynamics. In U. Bartocci and J. P. Wesley, editors, *Proceedings of the Conference on Foundations of Mathematics and Physics*, pages 289–343, Blumberg, 1990. Benjamin Wesley Publisher.

[Wes90b] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, Part I. General theory, steady current effects. *Foundations of Physics Letters*, 3:443–469, 1990.

[Wes90c] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, Part II. Unipolar induction, Z-antenna. *Foundations of Physics Letters*, 3:471–490, 1990.

[Wes90d] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, Part III. Mechanics, gravitation. *Foundations of Physics Letters*, 3:581–605, 1990.

[Wes91] J. P. Wesley. *Selected Topics in Advanced Fundamental Physics.* Benjamin Wesley Publisher, Blumberg, 1991.

[Zyl94] A. Zylbersztajn. Newton's absolute space, Mach's principle and the possible reality of fictitious forces. *European Journal of Physics*, 15:1–8, 1994.