

# Cargas Superficiais em Placas Condutoras com Corrente Constante

A. K. T. Assis e J. A. Hernandez

Instituto de Física ‘Gleb Wataghin’  
Universidade Estadual de Campinas – Unicamp  
13083-970 Campinas, São Paulo, Brasil

E-mails: [assis@ifi.unicamp.br](mailto:assis@ifi.unicamp.br), [julioher@ifi.unicamp.br](mailto:julioher@ifi.unicamp.br)

Trabalho publicado nos anais do *XX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos*. Ver também <http://www.sbf1.if.usp.br/eventos/enfpc/xx/procs/res224/>

## Resumo

Estudamos a existência de campos elétricos fora de condutores com corrente constante e sua relação com as cargas superficiais que geram as correntes. Obtemos resultados novos para condutores em forma de placas. Comparamos nossos resultados teóricos com dados experimentais.

## Abstract

We study the existence of electric fields outside current carrying conductors and its relation with the surface charges that generate currents. We obtain new results for conductor plates. We compare our theoretical results with experimental data.

**Palavras-chave:** Campo elétrico, cargas superficiais, eletromagnetismo clássico.

**PACS:** 41.20.-q, 72.15.-v

## 1 Introdução

A existência de um campo elétrico fora de um circuito com corrente constante é ainda um assunto controverso [1]. Se existe tal campo, uma partícula carregada colocada nele sofre a ação de uma força.

Clausius, em 1880, baseou sua teoria eletromagnética nessas idéias [8, pág. 589]: “A lei formulada por mim leva ao resultado de que um circuito fechado estacionário com corrente constante não exerce força em uma carga estacionária”.

Outros exemplos de autores que apresentam opiniões semelhantes são: Reitz e Milford [9, pág. 128-129]; Feynman [2, Seção 13-6, pág. 13-7]; Whittaker [12, pág. 205]; e Jackson [4, exerc. 14.13], embora este último autor esteja a par da existência deste campo elétrico fora dos condutores [5]. Alguns destes autores usam o argumento de “evidência experimental” em favor da não-existência destes campos, sem entretanto citar os experimentos que tentaram encontrá-los.

Como será mostrado adiante, este campo elétrico existe e pode ser calculado a partir das equações de Maxwell. Alguns casos presentes na literatura incluem o tratamento do cabo coaxial infinito, tendo condutor de retorno de raio externo infinito (Sommerfeld, [11, pág. 125-133]), o condutor cilíndrico infinito com corrente poloidal (Heald, [3]) e o cabo coaxial finito (Jackson, [5]). Comparamos os resultados teóricos que encontramos com experimentos realizados por Jefimenko [6] e [7].

## 2 Cargas superficiais

Para chegar aos campos elétricos fora dos condutores, consideramos o ponto de vista das cargas superficiais. Estas cargas são as mesmas que geram o campo elétrico dentro dos condutores, sustentando a corrente. O papel da bateria, no caso da corrente constante, é manter esta distribuição de carga ao longo da superfície do condutor, e evitar sua neutralização.

## 3 Placas condutoras

Analizamos a condução de correntes constantes em placas condutoras, de dimensões  $2L_x$  e  $2L_z$  nos eixos  $x$  e  $z$  respectivamente. As placas não tem espessura. A corrente flui no sentido positivo do eixo  $x$ . Utilizamos a aproximação  $L_z \gg L_x \gg \sqrt{x^2 + y^2}$ , onde  $\vec{r} = (x, y, z = 0)$  é o ponto de observação. Supusemos a existência de distribuição de cargas linear com o eixo  $x$ ,  $\sigma(x, z) = \alpha x + \beta$ , [10]. Aqui,  $\sigma(x, z)$  é uma densidade superficial de carga no ponto  $(x, z)$  da placa, sendo que  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes.

O potencial devido a estas cargas é:

$$\phi = \frac{\alpha x + \beta}{\epsilon_0} \left( \frac{L_x}{\pi} - \frac{|y - y_0|}{2} \right) + \frac{\beta L_x}{\pi \epsilon_0} \ln \frac{2L_z}{L_x}, \quad (1)$$

onde  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo, e o centro da placa está localizado em  $(x = 0, y = y_0, z = 0)$ .

## 4 Duas placas paralelas

Suponha a existência de duas placas idênticas à da seção anterior, localizadas em  $y = a$ , e  $y = -a$ , onde  $a \ll L_x \ll L_z$ . O potencial gerado por ambas é dado

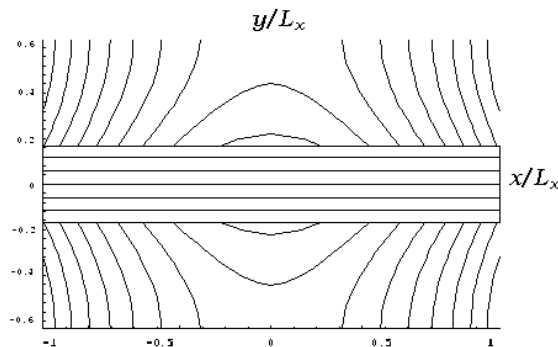


Figura 1: Linhas de campo elétrico para duas placas sem espessura, ou para uma única placa com espessura  $2a$ . A corrente flui da esquerda (sob potencial  $\phi = V/2$ ) para a direita ( $\phi = -V/2$ ).

por:

$$\phi = \frac{\alpha x + \beta}{\epsilon_0} \left( \frac{2L_x}{\pi} - \frac{|y - a| + |y + a|}{2} \right) + \frac{2\beta L_x}{\pi \epsilon_0}. \quad (2)$$

As linhas de campo elétrico, dadas pela função escalar  $\psi$ , podem ser calculadas seguindo o fato de que  $\nabla\psi \cdot \nabla\phi = 0$ . Neste caso:

$$\psi = \begin{cases} x^2 - \frac{2\beta x}{\alpha} - y^2 + \frac{4L_x y}{\pi} & y > a \\ -ay & -a < y < a \\ x^2 + \frac{2\beta x}{\alpha} - y^2 - \frac{4L_x y}{\pi} & y < -a \end{cases} \quad (3)$$

A Figura 1 mostra um exemplo de linhas de campo elétrico para duas placas paralelas com corrente na mesma direção. As condições de contorno são  $\phi(x = -L_x, -a < y < a) = \phi_0$  e  $\phi(x = L_x, -a < y < a) = -\phi_0$ , onde  $\phi_0$  é constante. As dimensões escolhidas são  $\frac{L_x}{L_y} = \frac{L_x}{a} = 3$ , de maneira que podemos comparar com uma das placas experimentais de Jefimenko [6, Figura 1]. Uma solução idêntica ocorre no caso de um paralelepípedo com espessura  $2a$  centrado em  $(x = 0, y = 0, z = 0)$ , conduzindo uma corrente uniformemente distribuída em sua seção reta.

## 5 Quatro placas paralelas

Suponha a existência de quatro placas paralelas finas, de dimensões idênticas às das seções anteriores, localizadas em  $y = b$ ,  $y = a$ ,  $y = -a$  e  $y = -b$ , onde  $b > a > 0$  são constantes. Vamos analisar o caso em que a corrente flui no sentido positivo do eixo  $x$  nas placas localizadas em  $y = b$  e  $y = a$ , fluindo no sentido oposto nas placas em  $y = -a$  e  $y = -b$ . Uma solução idêntica ocorre no caso de uma linha de transmissão, onde a corrente flui uniformemente pelo eixo  $x$  de um paralelepípedo de condutividade  $g_1$  e espessura  $b - a$ , retornando pelo outro paralelepípedo, de condutividade  $g_2$ .

## 5.1 Potenciais opostos

As cargas superficiais são assumidas como:

$$\begin{aligned}\sigma_{y=b} = \sigma = \alpha x + \beta, \quad \sigma_{y=a} = \sigma_a = \alpha_a x + \beta_a, \\ \sigma_{y=-a} = -\sigma_a \quad \text{e} \quad \sigma_{y=-b} = -\sigma.\end{aligned}\quad (4)$$

As condutividades das placas são iguais,  $g_1 = g_2$ . O potencial gerado por elas é:

$$\begin{aligned}\phi = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ (\alpha x + \beta) \frac{|y+a| - |y-a|}{2} - \frac{4axy}{\pi L_x} (\alpha + \alpha_a) \right. \\ \left. + (\alpha_a x + \beta_a) \frac{|y+b| - |y-b|}{2} + \frac{2ay}{\pi L_x} (\beta + \beta_a) \right].\end{aligned}\quad (5)$$

A condição de que o potencial não dependa de  $y$  nas regiões  $a < y < b$  e  $-b < y < -a$  resulta:

$$\alpha_a = \alpha \frac{4a}{\pi L_x - 4a}, \quad \beta_a = \beta \frac{2a}{\pi L_x - 2a}.\quad (6)$$

As linhas de campo elétrico para esta configuração são dadas por:

$$\psi = \begin{cases} x^2 + \frac{\beta x}{\alpha} - y^2 + \frac{\pi L_x y}{2} & y > b \\ -ay & a < y < b \\ x^2 + \frac{2\beta x}{\alpha} - y^2 & -a < y < a \\ ay & -b < y < -a \\ x^2 + \frac{\beta x}{\alpha} - y^2 - \frac{\pi L_x y}{2} & y < -b \end{cases}.\quad (7)$$

A Figura 2 mostra um exemplo das linhas de campo elétrico quando as condições de fronteira são  $\phi(x = -L_x, a < y < b) = \phi_0$ ,  $\phi(x = L_x, a < y < b) = \phi(x = L_x, -b < y < -a) = 0$  e  $\phi(x = -L_x, -b < y < -a) = -\phi_0$ , onde  $\phi_0$  é uma constante. As dimensões escolhidas são  $\frac{L_z}{L_x} = \frac{L_x}{a} = 3$  e  $\frac{b}{a} = 2$ . Esta figura pode ser comparada com [6, Figura 5].

## 5.2 Placa supercondutora

Suponha uma situação derivada da anterior, exceto que o paralelepípedo inferior (localizado em  $-b < y < -a$ ) é supercondutor ( $g_2 \gg g_1$ ), e está submetido ao mesmo potencial constante  $\Phi$  em toda sua extensão no eixo  $x$ . Juntamente com a condição de que o potencial não dependa de  $y$  nas regiões  $a < y < b$  e  $-b < y < -a$ , temos as distribuições de cargas nas placas:

$$\begin{aligned}\sigma_{y=b} = \sigma = \alpha x + \beta, \quad \sigma_{y=a} = \sigma_a = \alpha_a x + \beta_a, \\ \sigma_{-a} = -\sigma_a, \quad \sigma_{-b} = \sigma_b, \\ \alpha_a = \alpha \frac{2L_x}{\pi a}, \quad \beta_a = \frac{2\beta L_x}{\pi a} \left( 1 + \ln \frac{2L_z}{L_x} \right) - \frac{\Phi \epsilon_0}{a}.\end{aligned}\quad (8)$$

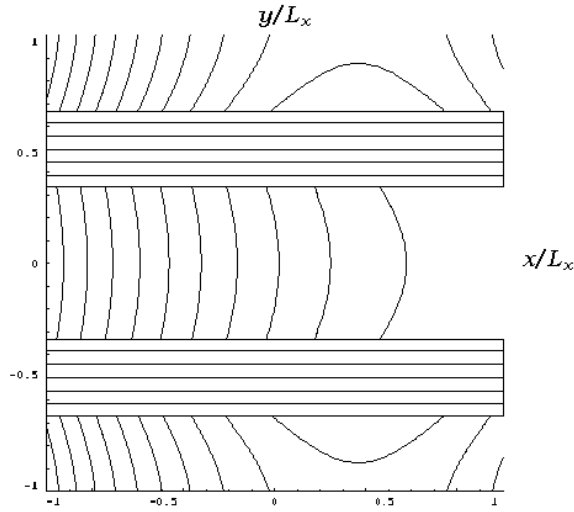


Figura 2: Linhas de campo elétrico para quatro placas sem espessura, ou para duas placas com espessura  $b - a$ . A corrente flui da esquerda ( $\phi = V/2$ ) para a direita ( $\phi = 0$ ) na placa espessa superior, e retorna pela inferior (de  $\phi = 0$ , à direita, para  $\phi = -V/2$ , à esquerda)

As linhas de campo elétrico são dadas por:

$$\psi = \begin{cases} x^2 + \frac{2\beta x}{\alpha} - y^2 + \frac{8L_x y}{\pi} & y > b \\ -ya & a < y < b \\ x^2 + \frac{2\beta_a x}{\alpha_a} - y^2 - 2ay & -a < y < a \\ -a^2 & -b < y < -a \\ x^2 + \frac{2\beta x}{\alpha} - y^2 - 2by & y < -b \end{cases} . \quad (9)$$

A Figura 3 mostra um exemplo de linhas de campo elétrico quando  $\phi(x = -L_x, a < y < b) = \phi_0$  e  $\phi(x = L_x, a < y < b) = \Phi = -\phi_0$ , com dimensões idênticas ao problema anterior. Ela pode ser comparada com [6, Figura 6].

## 6 Discussão e conclusão

Os resultados apresentados neste trabalho nunca haviam sido obtidos. A única expressão presente na literatura é a Equação (5), mas somente para a região entre as placas [7, pág. 303-304]. Jefimenko também obteve as cargas livres somente nas faces internas das placas.

As figuras teóricas apresentadas estão em excelente acordo com os experimentos de Jefimenko. O fato mais importante a enfatizar é a existência de campos elétricos não nulos fora de condutores com corrente constante.

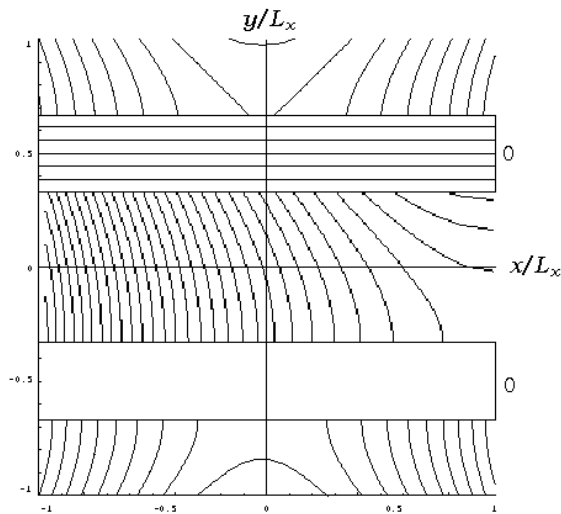


Figura 3: Linhas de campo elétrico para duas placas grossas, tal que a inferior é supercondutora. A corrente flui da esquerda ( $\phi = V/2$ ) para a direita ( $\phi = -V/2$ ) na placa superior, e retorna pela inferior (sob potencial constante  $\phi = -V/2$ ).

## Referências

- [1] A. K. T. Assis, W. A. Rodrigues Jr. e A. J. Mania. *Found. Phys.*, **29**, 729-753 (1999).
- [2] R. P. Feynman, R. B. Leighton, e M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume 2. Addison-Wesley, Reading (1964).
- [3] M. A. Heald. *Am. J. Phys.*, **52**, 522-526 (1984).
- [4] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley, New York, 2<sup>a</sup> Edição (1975).
- [5] J. D. Jackson. *Am. J. Phys.*, **64**, 855-870 (1996).
- [6] O. D. Jefimenko. *Am. J. Phys.*, **30**, 19-21 (1962).
- [7] O. D. Jefimenko. *Electricity and Magnetism*. Electret Scientific Company, Star City, 2<sup>a</sup> Edição (1989).
- [8] A. O’Rahilly. *Electromagnetic Theory - A Critical Examination of Fundamentals*. Dover, New York (1965).
- [9] J. R. Reitz e F. J. Milford. *Foundations of Electromagnetic Theory*. Addison-Wesley, Reading, 2<sup>a</sup> Edição (1967).

- [10] B. R. Russell. *Am. J. Phys.*, **36**, 527-529 (1968).
- [11] A. Sommerfeld. *Electrodynamics*. Academic Press, New York (1964).
- [12] E. T. Whittaker. *A History of the Theories of Ether and Electricity*, Volume 1. Humanities Press, New York (1973).