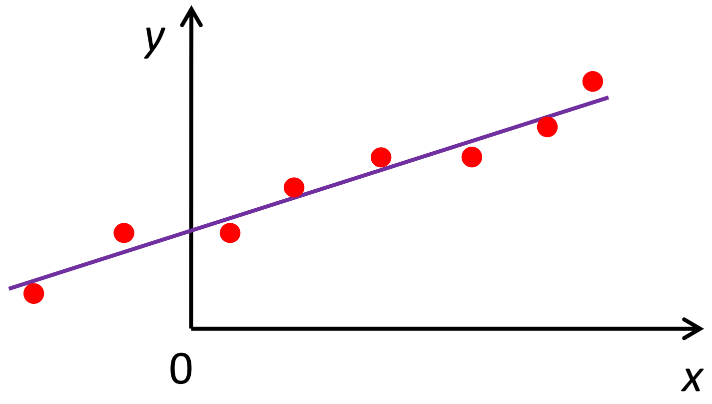
Lei de Escala
ou Lei de Potência

F 129 – Física Experimental I

Nesta aula vamos ver como é possível modelar alguns fenômenos naturais utilizando técnicas gráficas.

Suponha que não conhecemos a lei relacionando duas grandezas *x* e *y*, mas que ao medir seus valores e colocar em um gráfico em papel milimetrado encontramos o resultado abaixo:



Concluímos que a lei é do tipo linear, $y = ax + b$.

a é chamado de coeficiente angular e b de coeficiente linear.
Eles podem ser obtidos a partir do gráfico usando que

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

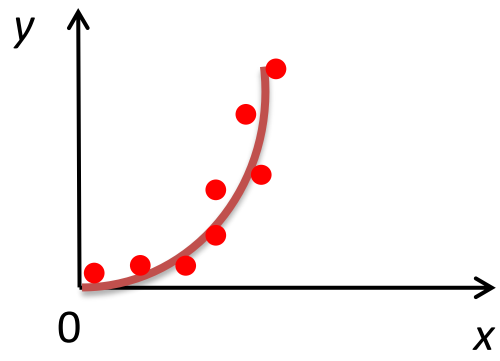
Aqui (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são dois pontos da melhor reta passando entre os pontos, seja ela obtida por "olhômetro" ou pelo método de mínimos quadrados. Ou seja, não se deve utilizar os pontos experimentais da tabela.

b é o valor de *y* quando $x = 0$. Por exemplo, se a reta cruzar o eixo y no ponto 3 teremos b = 3.

Um exemplo de lei desse tipo é o movimento unidimensional uniforme com velocidade *v* constante, sendo que o corpo parte da posição inicial s_o.
A posição *s* em função do tempo *t* é dada por:

$$s = s_o + vt$$

Porém, pode acontecer que ao colocar em um gráfico *y* em função de *x* encontremos algo do tipo:



Concluímos que a lei não é linear, ou seja, $y \neq ax + b$.

Neste caso podemos fazer uma <u>tentativa</u> de lei de potência (ou lei de escala) do tipo $y = cx^d$. Nesse caso c é chamada de constante de proporcionalidade e d é chamada de potência. Várias leis na física e na engenharia são desse tipo. Exemplos:

$y = cx^d$

Lei	*Fórmula*	*c*	*d*
Lei de Joule: Potência P dissipada em um resistor R em função da corrente I	$P = RI^2$	R	2
Período T do pêndulo simples de comprimento L oscilando no campo gravitacional g	$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}L^{0,5}$	$\frac{2\pi}{\sqrt{g}}$	0,5
Lei de Newton da gravitação	$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = G m_1 m_2 r^{-2}$	$G m_1 m_2$	-2

A potência d é adimensional. Por $c = y/x^d$ vem que a unidade de c é a unidade de y dividida pela unidade de x elevado a d. Por exemplo, se y está em quilograma, x em segundo e d = 3, então a unidade de c é kg/s^3.

Daqui para a frente vamos supor grandezas x e y adimensionais.

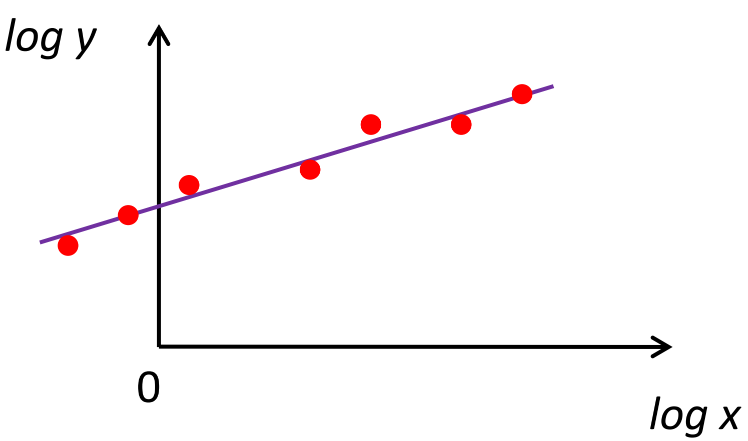
Para obter as constantes *c* e *d* precisamos linearizar a equação $y = cx^d$. Uma possibilidade é aplicando o logaritmo de base 10 nos dois lados dessa equação:

$$\log\, y = \log\left(cx^d\right) = \log c + d \cdot \log\, x$$

Fazendo as mudanças de variáveis m = log y, k_1 = log c, n = log x obtemos:

$m = k_1 + dn$. Essa é uma lei linear.

Vamos supor que ao fazermos um gráfico com os valores de *log y* em função de *log x* em um papel milimetrado, encontrarmos uma reta:



Nesse caso concluímos que nossa suposição inicial estava certa. Ou seja, a lei relacionando essas variáveis é do tipo de potência:

$y = cx^d$.

Nesse caso podemos obter as constantes k_1 e d pelo método visto anteriormente. Como $m = k_1 + dn$ *vem:*

$$d = \frac{\Delta m}{\Delta n} = \frac{\Delta(\log y)}{\Delta(\log x)} = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{log(x_2) - \log(x_1)}$$

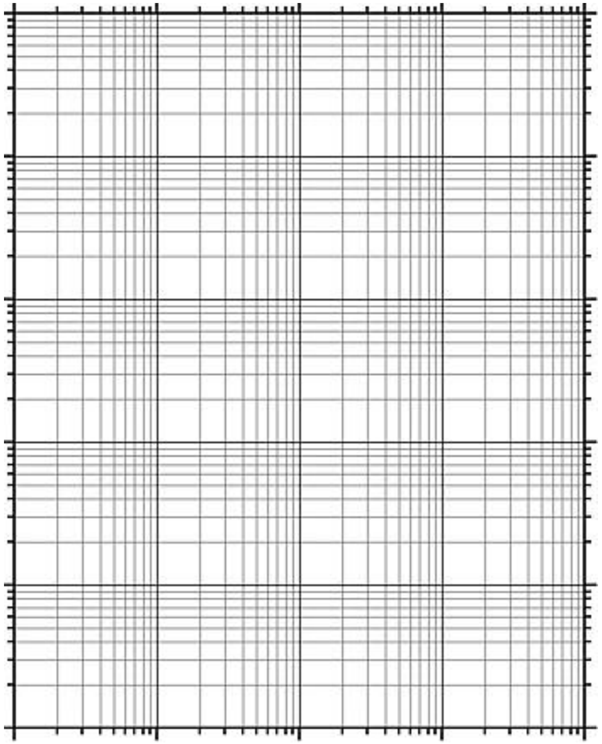
k_1 é o valor de log y quando log $x = 0$.

Como k_1 = log c, obtemos c = 10^{k1}.

Por exemplo, se a reta cruzar o eixo *log y* no ponto 5 teremos $k_1 = 5$.

Logo c = 10^5 = 100.000.

Como as leis de potência do tipo $y = cx^d$ são muito comuns na ciência, foi criado um papel especial que permite encontrar facilmente os valores das constantes *c* e *d* sem ter de ficar calculando os valores dos logaritmos dos pontos experimentais *x* e *y*. Esse papel é chamado de papel log-log ou de papel dilog.

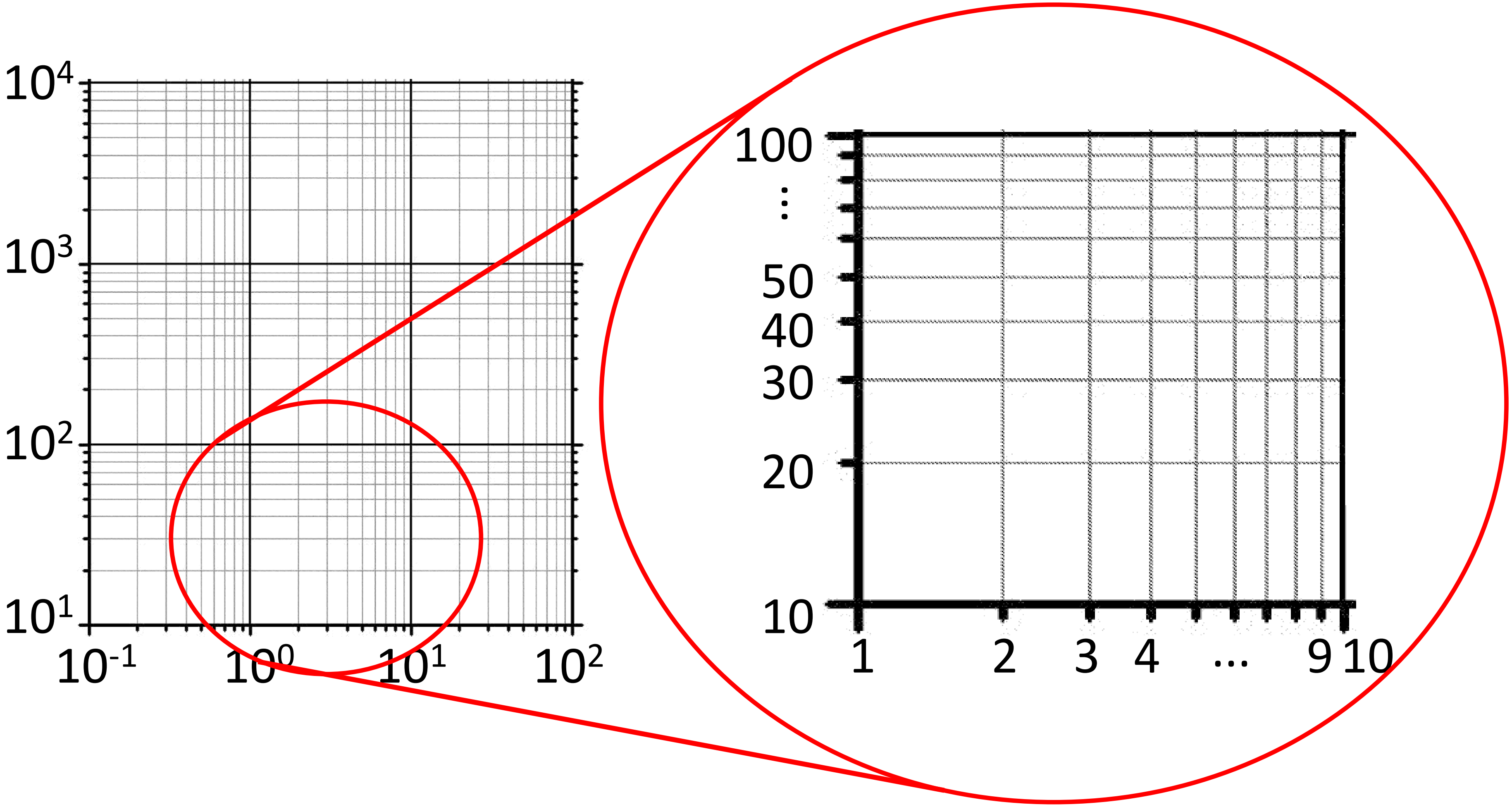


Tanto o eixo das abscissas quanto das ordenadas estão em escala logarítmica. Cada um desses blocos que se repete é chamado de ciclo ou década. No papel ao lado temos 5 ciclos na vertical e 4 ciclos na horizontal. A orientação a ser usada por esse papel é aquela em que a densidade de linhas em cada ciclo vai aumentando da esquerda para a direita e de baixo para cima, como na figura ao lado.

Antes de usar esse tipo de papel temos de aprender a marcar os valores nos eixos. A seguir apresentamos os aspectos mais importantes.

- No eixo vertical colocamos os valores de y e no eixo horizontal os valores de x. Ou seja, não é para colocar os valores de *log y* nem de *log x* nesses eixos.
- No papel dilog não existe o ponto (0, 0).
- Nos eixos x e y colocamos no cruzamento das linhas fortes potências de 10 em ordem crescente.
- Com qual potência de 10 vamos iniciar em cada eixo vai depender dos valores experimentais (x, y).
- Após preencher as potências de 10 nas linhas fortes, preenchemos as linhas de intensidade média com valores crescentes da potência de 10 anterior. Por exemplo, se na linha forte anterior temos $10^0 = 1$, as próximas linhas de intensidade média serão marcadas com 2, 3, ..., 9. Se na linha forte anterior temos $10^1 = 10$, as próximas linhas de intensidade média serão marcadas com 20, 30, ..., 90.

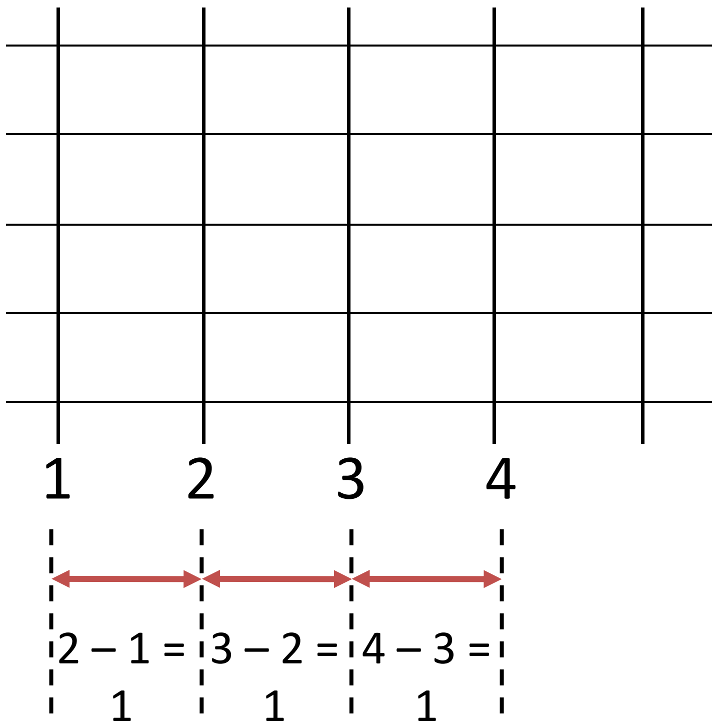
A seguir vai um exemplo dessas marcações.



10^4
10^3
10^2
10^1
10^{-1}
10^0
10^1
10^2
100
⋮
50
40
30
20
10
1
2
3
4
...
9
10

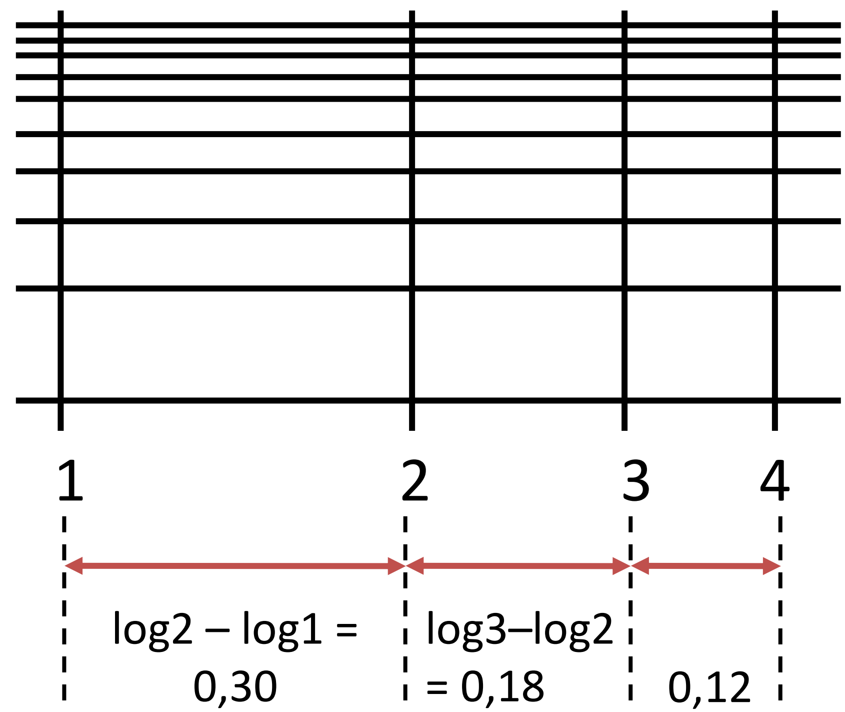
Gráfico linear versus log-log

linear



Distância entre divisões proporcional à diferença entre valores

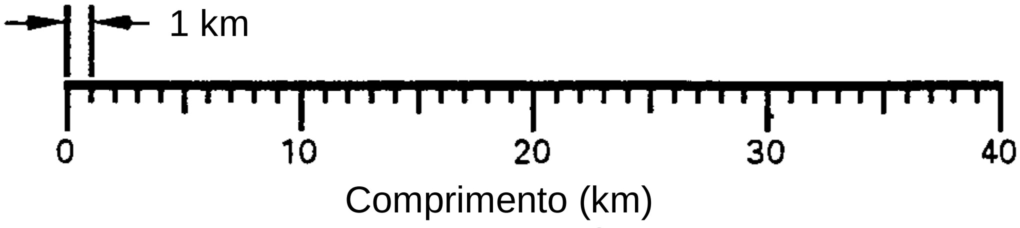
log-log



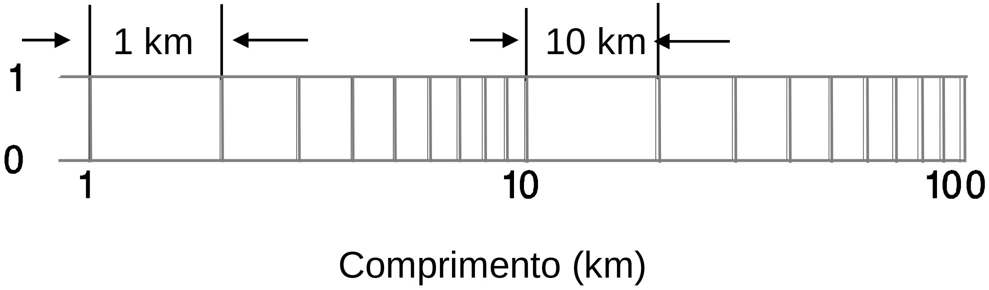
Distância entre divisões proporcional à diferença entre os **logaritmos** dos valores

Escala linear versus log-log

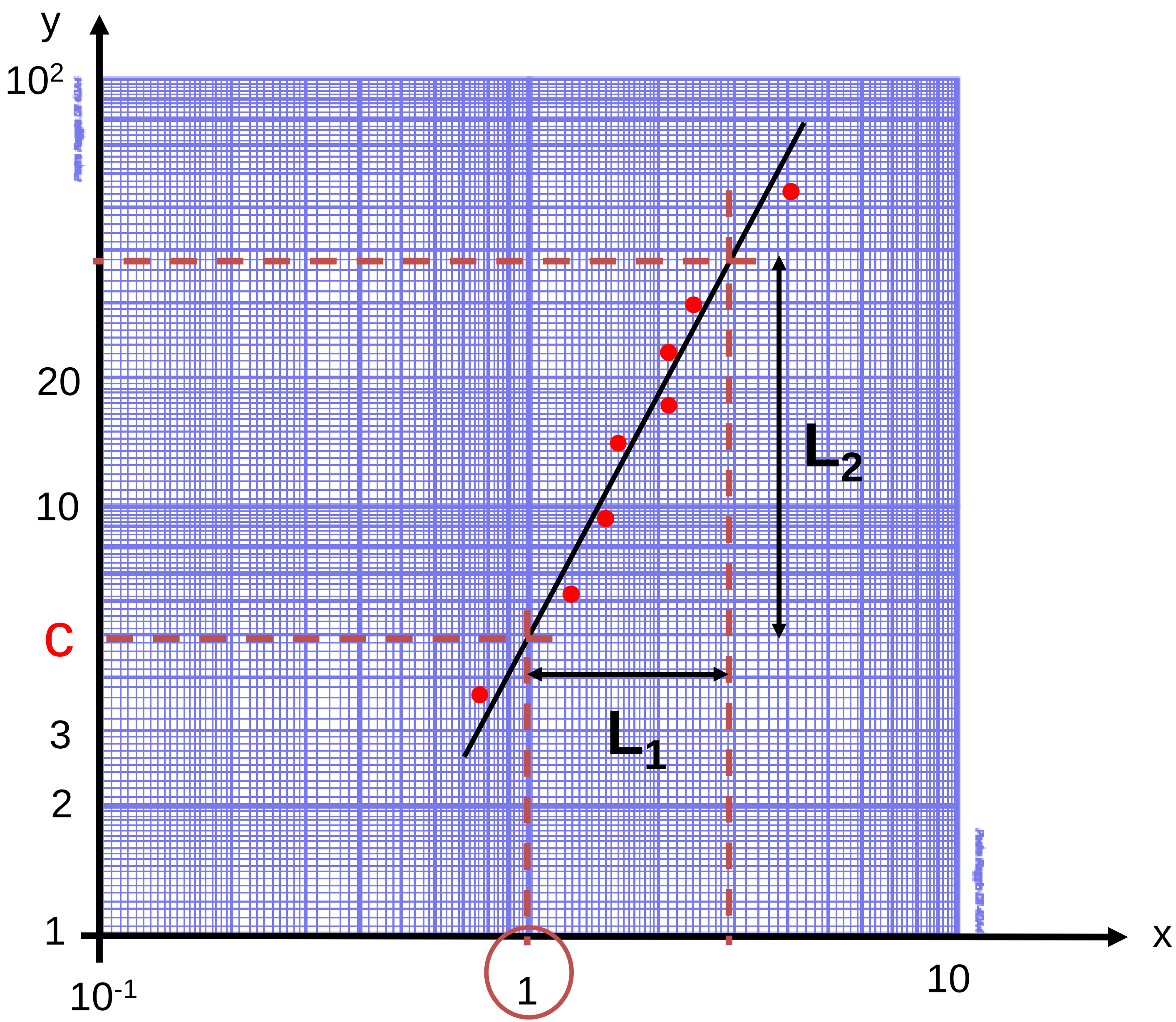
Escala linear:

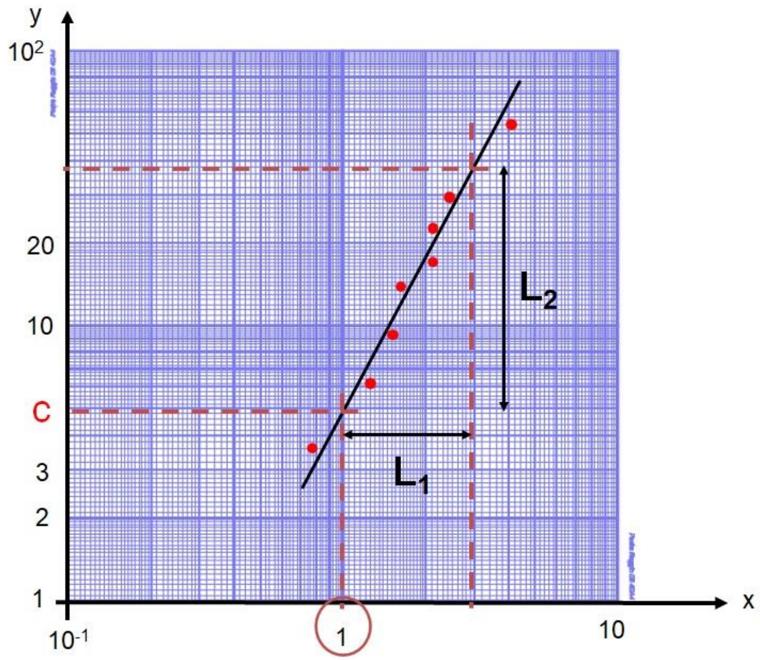


Escala log:



Caso a lei relacionando y e x seja do tipo potência, $y = cx^d$, então o gráfico de y em função de x em papel dilog será uma reta:





Neste caso, para obter a potência d basta escolher dois pontos da reta e medir com uma régua a distância horizontal L_1 e a distância vertical L_2 entre esse pontos. O valor de d é obtido pela divisão entre esses valores: $d = L_2/L_1$.

Caso a inclinação da reta esteja para baixo, a constante *d* deve ser considerada negativa.

Como a lei é do tipo $y = cx^d$, vem que a constante de proporcionalidade c é obtida simplesmente observando o valor numérico de y quando x = 1 nesse gráfico em papel dilog, isto é:

c = y quando x = 1 no papel dilog.

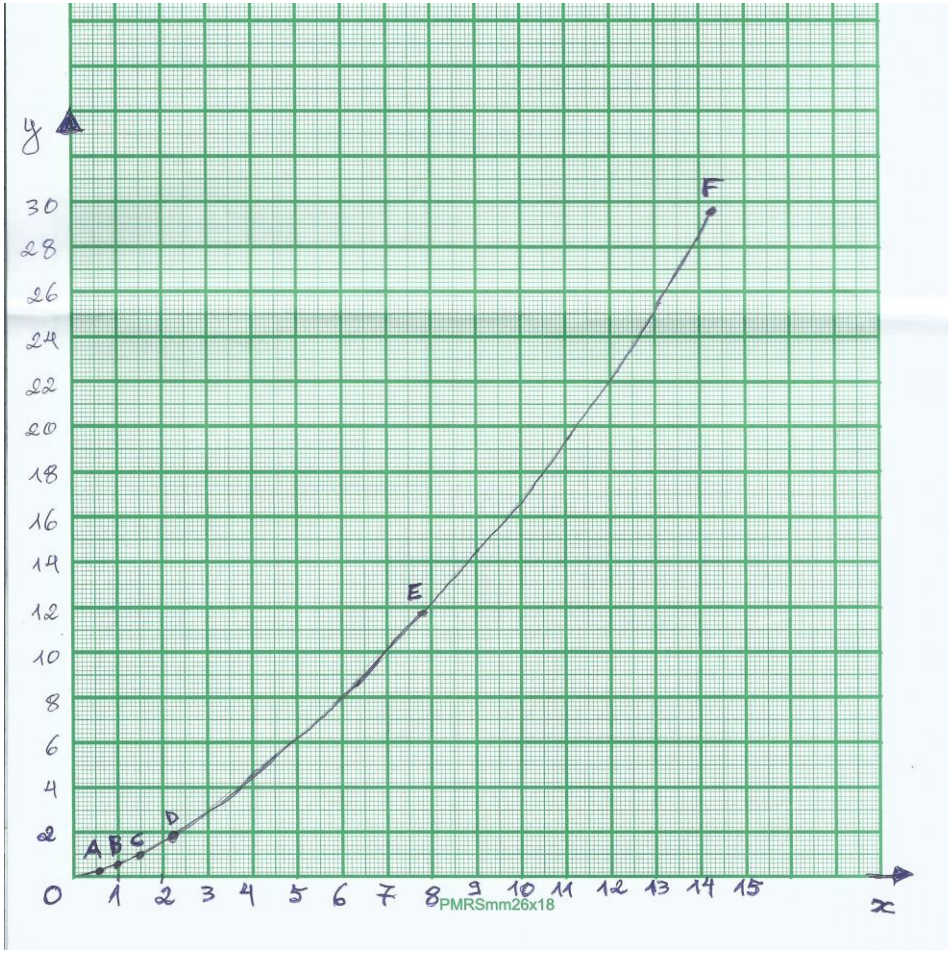
Por exemplo, nesse papel dilog temos c ≈ 4,9.

Vamos ver um exemplo concreto que ilustra tudo o que vimos até agora. São dados seis pontos experimentais (x, y) e pede-se para encontrar a lei relacionando y com x.

pontos	*x*	*y*
A	0,579	0,241
B	1,08	0,615
C	1,50	1,00
D	2,28	1,88
E	7,78	11,9
F	14,3	29,5

Ao colocar esses pontos em um gráfico feito em papel milimetrado encontramos uma curva:

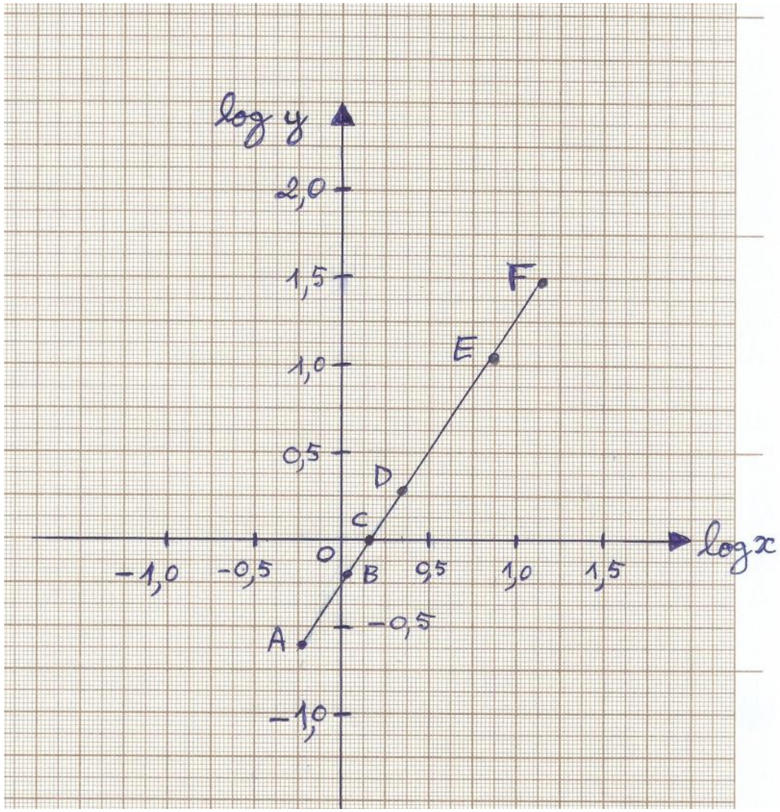
pontos	x	y
A	0,579	0,241
B	1,08	0,615
C	1,50	1,00
D	2,28	1,88
E	7,78	11,9
F	14,3	29,5



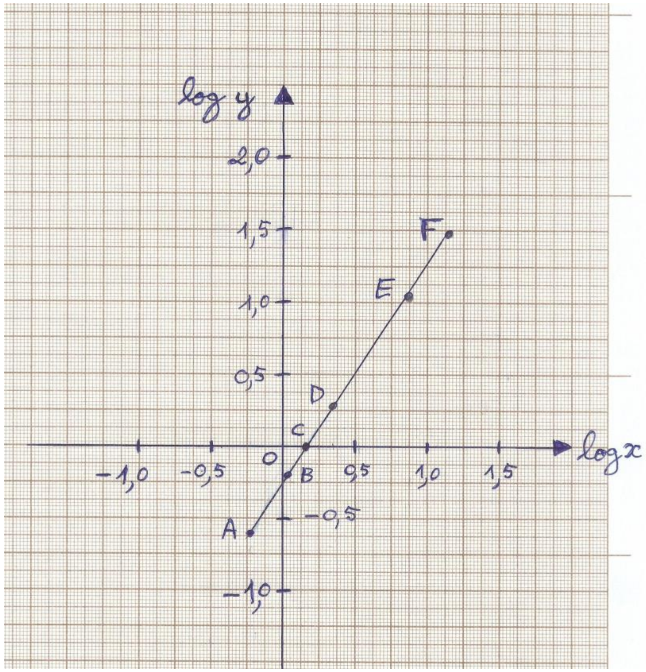
Concluímos que a lei não é linear, ou seja, $y \neq ax + b$.

Calculamos então o logaritmo de todos esses pontos e fazemos agora um gráfico de log y em função de log x em papel milimetrado:

pontos	*log x*	*log y*
A	-0,237	-0,618
B	0,0334	-0,211
C	0,176	0,00
D	0,358	0,274
E	0,891	1,08
F	1,16	1,47



Como os pontos estão sobre uma reta, concluímos que a lei relacionando y com x é do tipo potência: $y = cx^d$. Vamos calcular c e d com 2 algarismos significativos:



k_1 é o valor de log *y* quando log *x* = *0*. Nesse caso: $k_1 \approx -0{,}26$.

Como $k_1 = \log c$, obtemos:

$c = 10^{k1} = 10^{-0,26} \approx 0{,}54$.

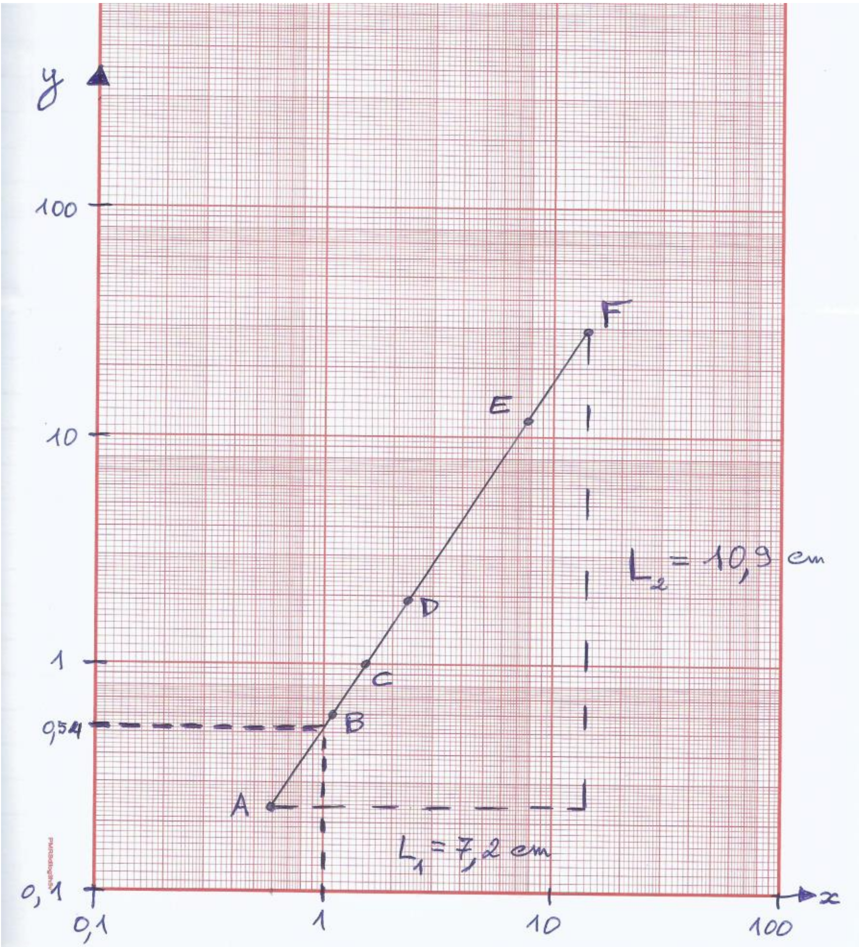
Como os pontos experimentais estão sobre uma reta podemos fazer:

$$d = \frac{\Delta(\log y)}{\Delta(\log x)} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} = \frac{1{,}47 - (-0{,}618)}{1{,}16 - (-0{,}237)} = \frac{2{,}088}{1{,}397} \approx 1{,}5.$$

Concluímos então que a lei é do tipo:

$$y = 0{,}54x^{1,5}.$$

Também podemos obter essa lei colocando y contra x em um papel dilog:



Como os pontos ficaram sobre uma reta, concluímos novamente que $y = cx^d$.

A constante de proporcionalidade c é obtida vendo diretamente no gráfico o valor de y quando x = 1, ou seja, c ≈ 0,54.

Já o valor da potência d é obtida pela razão entre os comprimentos L_2 e L_1 medidos com régua:

d = 10,9/7,2 ≈ 1,5.

Ou seja, a lei é do tipo $y = 0{,}54x^{1{,}5}$.

Como curiosidade vem que esses valores de x e de y não são inventados.

Os valores de *x* são as distâncias médias ao Sol (vezes 10^{11} m) dos seis primeiros planetas (Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno).
Os valores de *y* são os períodos de revolução desses planetas ao redor do Sol, em anos terrestres.

Por exemplo, a distância média de Mercúrio ao Sol é de 0,579 X 10^{11} m.
Ele completa uma volta ao redor do Sol em 0,241 anos terrestres.

A lei que obtivemos, $y = 0{,}54x^{1{,}5}$, também pode ser escrita como: $y^2 = 0{,}29x^3$.
Essa é a terceira lei de Kepler (1571-1630) publicada em 1619:

O quadrado do período de revolução de qualquer planeta é proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol.

Exercício:

São dados os pontos experimentais abaixo.

x	y
0,890	4,0
1,26	6,0
1,55	13
1,78	18
2,00	19
2,19	24
2,34	25
2,51	40

a) Faça um gráfico de y em função de x em papel milimetrado e veja que os pontos não estão ao longo de uma reta.

b) Calcule log x e log y. Faça um gráfico de log y em função de log x em papel milimetrado e veja que os pontos estão aproximadamente sobre uma reta. Logo podemos assumir que seguem uma lei de potência $y = cx^d$. Obtenha desse gráfico as constantes c e d com 2 algarismos significativos.

c) Faça um gráfico de y em função de x em papel dilog. Obtenha a partir desse gráfico as constantes c e d com 2 algarismos significativos.