

Análise e Tradução Comentada da Obra de Arquimedes Intitulada “MÉTODO SOBRE OS TEOREMAS MECÂNICOS”

Aluno: **Ceno Pietro Magnaghi**

E-mail: cenopietro@gmail.com

Orientador: **Prof. Dr. André Koch Torres de Assis**

E-mail: assis@ifi.unicamp.br

Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

Tese apresentada ao Instituto de Física ‘Gleb Wataghin’ da Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP, para obtenção do título de Mestre em Física.

Este exemplar corresponde à edição final da tese de mestrado defendida pelo aluno Ceno Pietro Magnaghi e aprovada pela Comissão Julgadora.

*André Koch Torres de Assis
03/05/2011*

Campinas, Maio de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW – UNICAMP

M273a Magnaghi, Ceno Pietro
Análise e tradução comentada da obra de Arquimedes intitulada "Método sobre os teoremas mecânicos" / Ceno Pietro Magnaghi. – Campinas, SP : [s.n.], 2011.

Orientador: André Koch Torres de Assis.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Arquimedes. Método sobre os teoremas mecânicos.
2. Alavanca. 3. Mecânica. I. Assis, André Koch Torres de.
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

(vsv/fgw)

- **Título em inglês:** Analysis and commented translation of Archimedes's work "*The method of mechanical theorems*"
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Archimedes. The method of mechanical theorems
 2. Lever
 3. Mechanics
- **Área de Concentração:** Física Geral
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca Examinadora:**
Prof. André Koch Torres de Assis
Prof. Domingos Sávio de Lima Soares
Prof. Varlei Rodrigues
- **Data da Defesa:** 14-04-2011
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **CENO PIETRO MAGNAGHI - RA 026635** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 14 / 04 / 2011.

COMISSÃO JULGADORA:

André Koch Torres de Assis

Prof. Dr. André Koch Torres de Assis - Orientador do Candidato
DRCC/IFGW/UNICAMP

Domingos S. L. Soares

Prof. Dr. Domingos Sávio de Lima Soares – DF/UFMG

Varlei Rodrigues

Prof. Dr. Varlei Rodrigues – DFA/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

Queremos aqui agradecer a todas as pessoas que tornaram possível a realização deste trabalho. Ao Professor André K. Torres de Assis o nosso reconhecimento especial não somente pela ideia que nos conduziu através deste caminho, mas também pela sua dedicação e orientação durante todo o período de realização.

Agradecemos aos respeitadores Professores Fernando Jorge da Paixão Filho, Sandro Guedes de Oliveira, Varlei Rodrigues, Márcio A. A. Pudenzi, Adolfo Maia Jr. e Domingos S. d. L. Soares por seus valiosos comentários relativos à tese. Agradecemos a Daniel Robson Pinto pela assistência na elaboração das figuras e a João Paulo Martins de Castro Chaib pelas sugestões sobre a apresentação da tese. Agradecemos especialmente ao Professor Flávio Ribeiro que, com seus ensinamentos, nos permitiu voltar a apreciar a beleza da língua de Arquimedes.

Resumo

Apresentamos os aspectos essenciais da vida e da obra de Arquimedes. Incluímos os pontos principais da história da sua obra intitulada *Método sobre os Teoremas Mecânicos*, endereçada a Eratóstenes, desde a sua redação até os tempos modernos. Enfatizamos os aspectos físicos contidos neste livro, em particular, o centro de gravidade e a lei da alavanca. Depois apresentamos os aspectos matemáticos necessários para acompanhar as demonstrações de Arquimedes: álgebra geométrica, aplicação das áreas, teoria das proporções e as seções cônicas (parábola, elipse e hipérbole). Discutimos detalhadamente a essência física do método de Arquimedes. Com este objetivo apresentamos as demonstrações físicas de seus teoremas no qual utiliza alavancas em equilíbrio sob a ação gravitacional terrestre. Fazemos uma tradução completa a partir do texto grego de sua obra *Método sobre os Teoremas Mecânicos*. Incluímos diversos comentários, alguns Apêndices técnicos e matemáticos, assim como uma ampla Bibliografia ao final da tese.

Abstract

We present the main aspects of the life and works of Archimedes. We include some important topics in the history of his work *The Method of Mechanical Theorems*, addressed to Eratostenes, from the period in which Archimedes wrote it up to the modern times. We emphasize the physical aspects contained in his book including the center of gravity and the law of the lever. We present the mathematical topics which are required in order to follow Archimedes's demonstrations: geometric algebra, application of areas, theory of proportions and conic sections (parabola, ellipse and hyperbola). We discuss at length the physical essence of Archimedes's method. To this end we include the physical demonstrations of his theorems in which he utilized levers in equilibrium under the gravitational action of the Earth. We make a complete Portuguese translation from the Greek of his book *The Method of Mechanical Theorems*. We include comments, some technical and mathematical Appendices, together with a large Bibliography at the end of the thesis.

Sumário

Ficha Catalográfica	2
Folha de Aprovação da Comissão Julgadora	3
Agradecimentos	4
Resumo	5
Abstract	6
Sumário	7
1 Introdução	10
2 Objetivos da Tese	13
3 A Vida de Arquimedes	15
4 As Obras de Arquimedes	18
5 <i>O Método: A História de uma Obra Perdida</i>	20
6 Os Princípios Físicos de <i>O Método</i>	24
6.1 O Centro de Gravidade	24
6.1.1 Definição do Centro de Gravidade	24
6.1.2 Determinação Experimental do Centro de Gravidade	24
6.1.3 Determinação Teórica do Centro de Gravidade	25
6.2 A Lei da Alavanca	27
7 Os Princípios Matemáticos de <i>O Método</i>	28
7.1 Álgebra Geométrica	28
7.2 Aplicação das Áreas	30
7.3 Teoria das Proporções	33
7.3.1 Conceitos Fundamentais	34
7.3.2 Operações Principais	35
8 As Cônicas no Tempo de Arquimedes	36
8.1 Introdução	36
8.2 Definições	38

8.3	Equações Características	39
8.3.1	Parábola	40
8.3.2	Elipse e Hipérbole	42
9	A Essência do Método de Arquimedes	45
9.1	Elementos Principais do Método	45
9.2	Demonstração Física do Teorema I: Área de um Segmento Parabólico	46
9.2.1	Importância do Teorema I	50
9.3	Demonstração Física do Teorema II: Volume da Esfera	52
9.3.1	Importância do Teorema II	56
9.4	Demonstração Física do Teorema III: Volume do Elipsoide de Revolução	59
9.4.1	Importância do Teorema III	63
9.5	Demonstração Física do Teorema IV: Volume de um Segmento de Paraboloides de Revolução	63
9.5.1	Importância do Teorema IV	66
9.6	Demonstração Física do Teorema V: Centro de Gravidade de um Segmento de Paraboloides de Revolução	66
9.6.1	Importância do Teorema V	70
9.7	Demonstração Física do Teorema VI: Centro de Gravidade de um Hemisfério	71
9.7.1	Importância do Teorema VI	76
9.8	Demonstração Física do Teorema VII: Volume de um Segmento Esférico	77
9.8.1	Importância do Teorema VII	82
9.9	Demonstração Física do Teorema IX: Centro de Gravidade de um Segmento Esférico	82
9.9.1	Importância do Teorema IX	90
9.10	Demonstração Física do Teorema XII: Volume da Unha Cilíndrica	90
9.11	Demonstração Física do Teorema XIII: Volume da Unha Cilíndrica — Continuação	94
9.12	Comentários sobre o Teorema XIV: Uma Outra Determinação do Volume da Unha Cilíndrica	98
9.12.1	Importância dos Teoremas XII a XIV	102
10	A Tradução Comentada de <i>O Método</i>	104
10.1	MÉTODO SOBRE OS TEOREMAS MECÂNICOS — DE ARQUIMEDES PARA ERATÓSTENES	104
10.2	[Introdução]	104
10.3	Lemas	106
10.4	[Teorema] I. [<i>Área de um Segmento Parabólico.</i>]	108
10.5	[Teorema] II. [<i>Volume da Esfera.</i>]	110
10.6	[Teorema] III. [<i>Volume do Elipsoide de Revolução.</i>]	113
10.7	[Teorema] IV. [<i>Volume de um Segmento de Paraboloides de Revolução.</i>]	116
10.8	[Teorema] V. [<i>Centro de Gravidade de um Segmento de Paraboloides de Revolução.</i>]	118
10.9	[Teorema] VI. [<i>Centro de Gravidade de um Hemisfério.</i>]	120
10.10	[Teorema] VII. [<i>Volume de um Segmento Esférico.</i>]	122
10.11	[Teorema] VIII. [<i>Volume de um Segmento de Elipsoide de Revolução.</i>]	125
10.12	[Teorema] IX. [<i>Centro de Gravidade de um Segmento Esférico.</i>]	125
10.13	[Teorema] X. [<i>Centro de Gravidade de um Segmento de Elipsoide de Revolução.</i>]	128
10.14	[Teorema] XI. [<i>Volume e Centro de Gravidade de um Segmento de Hiperboloides de Revolução.</i>]	128

10.15[Teorema] XII. [<i>Volume da Unha Cilíndrica. Determinação Mecânica.</i>]	129
10.16[Teorema] XIII. [<i>Volume da Unha Cilíndrica. Determinação Mecânica — Conti-</i> <i>nuação.</i>]	131
10.17[Teorema] XIV. [<i>Uma Outra Determinação do Volume da Unha Cilíndrica.</i>]	132
10.18[Teorema] XV. [<i>Demonstração Geométrica do Teorema XII.</i>]	134
11 Conclusão	139
Apêndices	140
A Demonstrações das Relações Matemáticas Básicas dos Teoremas de <i>O Método</i>	140
A.1 Teorema I	140
A.2 Teoremas II e VII	141
A.3 Teorema III	143
A.4 Teorema IV	146
A.5 Teorema V	147
A.6 Teorema VI	149
A.7 Teorema IX	150
B A Parábola	152
B.1 A Parábola em Coordenadas Cartesianas	152
B.2 A Subtangente — Considerações de Arquimedes	153
B.3 A Subtangente — Uma Dedução Moderna	154
C Uma Propriedade do Triângulo Retângulo	156
D As Figuras de <i>O Método</i>	158
D.1 Letras Maiúsculas e Minúsculas	158
D.2 As Figuras de Arquimedes	158
D.3 Comentários sobre as Figuras dos Teoremas VI e IX	160
E O Centro de Gravidade de um Semicírculo	162
Referências Bibliográficas	165

Capítulo 1

Introdução

O padre Ioannes Mironas terminou seu trabalho em 14 de abril de 1229 ... Naquele ano, 14 de abril foi véspera do domingo de Páscoa. Por tradição, nesse dia as pessoas faziam doações a instituições religiosas para a salvação de suas almas. Que doação extraordinária fez Ioannes ...

No dia do aniversário da ressurreição de Cristo, Ioannes Myronas deu ao mundo seu mais importante palimpsesto e salvou os segredos de Arquimedes.

Com essas frases Reviel Netz e William Noel terminam de descrever no seu livro *Códex Arquimedes* a história do famoso *palimpsesto de Arquimedes*.¹

No século XIII, época de Ioannes Mironas, o papel ainda não era difundido no Ocidente e os livros eram escritos em pergaminhos. O pergaminho era (e ainda é) obtido a partir de uma pele animal submetida a um processo químico, usualmente com cal, e a uma raspagem para permitir uma boa adesão da tinta à sua superfície. Portanto, é natural que, sendo obtidos por um processo razoavelmente complexo, não houvesse uma grande abundância de pergaminhos.

Por esse motivo tornou-se muito comum a técnica do palimpsesto, que nada mais é do que a reciclagem dos pergaminhos. O termo palimpsesto deriva de duas palavras gregas: $\pi\alpha\lambda\iota\nu$ (palin = de novo) e $\psi\eta\omega$ (pseo = esfregar, raspar). O seu significado indica que o pergaminho usado como suporte do texto foi raspado mais de uma vez.

Ao começar a escrever o seu livro de orações, o padre Ioannes Mironas não tinha os pergaminhos necessários e teve que se socorrer da técnica do palimpsesto. Para isso reciclou os materiais disponíveis, entre eles alguns pergaminhos antigos contendo textos gregos de matemática que certamente não tinham muita utilidade para os monges. Feita a raspagem, ele escreveu no palimpsesto as suas orações, que foram lidas pelos monges durante algumas centenas de anos. Felizmente a raspagem não foi muito bem sucedida e o texto matemático original não foi totalmente eliminado.

Em 1899 foi feito um catálogo das obras existentes no *Metochion*,² biblioteca do Santo Sepulcro de Jerusalém, em Constantinopla. No catálogo foi identificado um manuscrito de orações contendo, parcialmente apagado, um texto grego de matemática. Tratava-se do livro escrito por Ioannes Mironas 670 anos antes.

Em 1906 o professor Johan Ludwig Heiberg (1854-1928), Figura 1.1, da Universidade de Copenhague tomou conhecimento da existência em Constantinopla, de um palimpsesto contendo textos gregos de matemática. Ele foi um estudioso excepcional e pesquisador infatigável dos clássicos gregos de matemática aos quais dedicou grande parte da sua vida.

¹[1, págs. 287-288]

²Ver *Códex Arquimedes*, pág. 138.



Figura 1.1: J. L. Heiberg.

Entre as suas inúmeras publicações podemos citar a edição de obras de diversos autores importantes:

1. *Archimedis Opera Omnia* (1880-1881).
2. *Os Elementos*, de Euclides (1883).
3. *As Cônicas*, de Apolônio (1891).

Ao ver o palimpsesto em Constantinopla, reconheceu facilmente no texto apagado o trabalho de Arquimedes. Além disso, conseguiu identificar uma obra que estava perdida há mais de 2000 anos: **O Método Sobre os Teoremas Mecânicos**.

Em 1907 Heiberg publicou o texto grego e a tradução em alemão de *O Método*.³

Pouco tempo depois o palimpsesto desapareceu novamente, reaparecendo somente em 1998 para ser leiloadado na Christie's de Nova York. Ele foi arrematado por intermédio de terceiros, por uma pessoa que não quis revelar o seu nome até o momento, e que o entregou ao museu Walters de Baltimore (Estados Unidos) para conservação e estudos. Nesta ocasião foi reunido um grupo multidisciplinar de especialistas em manutenção e recuperação de manuscritos antigos, em grego clássico e em matemática antiga. Para recuperar o texto de Arquimedes estão sendo utilizadas modernas técnicas de fotografia digital, de iluminação com diferentes comprimentos de onda e até fluorescência de raios X no *Stanford Linear Accelerator Center*, SLAC.⁴

É interessante citar aqui um trecho do livro de Hirshfeld:⁵

Neste trecho de sua longa e peripatética existência o manuscrito viajou de uma biblioteca monástica na Terra Sagrada para o Metochion - “casa-filha” - da Igreja do Santo Sepulcro de Jerusalém, em Constantinopla. E lá, durante o verão de 1906,

³[2] e [3].

⁴[1, págs. 284-286].

⁵[4, págs. 103-104].

foi examinado pelo Professor Johan Ludvig Heiberg, o principal filólogo do mundo, que havia viajado com pressa de Copenhague para ler o velho documento. Com sua barba bíblica e olhar fixo, a própria presença de Heiberg lançou a biblioteca em uma confluência entre o mundo antigo e o moderno.

Uma imagem do palimpsesto de Arquimedes encontra-se na Figura 1.2.⁶

Hermes XLII. Bd. 1907. S. 235.



Lichtdruck von Albert Frisch, Berlin W 35.

Figura 1.2: O palimpsesto de Arquimedes.

⁶[2].

Capítulo 2

Objetivos da Tese

Apresentamos a seguir alguns dos principais objetivos deste trabalho.

- Inicialmente desejamos apresentar uma tradução completa para o português da obra *Método sobre os Teoremas Mecânicos*. Isto é feito no Capítulo 10. Depois que Heiberg publicou este trabalho tanto no original em grego quanto traduzido para o alemão,¹ foram feitas traduções para diversos idiomas: italiano,² espanhol,³ francês,⁴ inglês⁵ e português.⁶ Resolvemos fazer uma nova tradução partindo do original em grego e comparando nosso trabalho com as outras traduções já publicadas.
- Além da tradução completa, acrescentamos no Capítulo 10 diversas Notas de rodapé que facilitam na compreensão de certas expressões empregadas por Arquimedes.
- No intuito de entender melhor o raciocínio matemático empregado por Arquimedes, achamos por bem incluir no Capítulo 7 alguns pontos fundamentais da geometria grega da época. Em particular, discutimos a álgebra geométrica, a aplicação das áreas e a teoria das proporções. No mesmo sentido incluímos no Capítulo 8 como Arquimedes tratava as seções cônicas (parábola, elipse e hipérbole). Embora o material destes dois Capítulos não seja original, pois foi essencialmente extraído das obras de Dijksterhuis, Heath, Mugler e Rufini quando discutem estes temas,⁷ ele oferece ao leitor uma visão detalhada das deduções matemáticas utilizadas por Arquimedes. Com isto o leitor não necessita de se aprofundar demasiadamente na matemática dos antigos gregos.
- Além da nova tradução em português, nossa principal contribuição nesta tese está contida no Capítulo 9, *A Essência do Método de Arquimedes*. Nosso objetivo aqui foi o de apresentar os principais argumentos físicos que ele utilizou para chegar em resultados puramente geométricos ou matemáticos (cálculos de áreas, de volumes e de centros de gravidade de algumas figuras). Em sua obra Arquimedes utiliza apenas uma figura para cada teorema. Esta figura em geral apresenta objetos tridimensionais vistos de lado. Não é fácil visualizar o que ele tinha em mente. O tempo todo ele fala de alavancas em equilíbrio em

¹[2] e [3].

²[5].

³[6] e [7].

⁴[8].

⁵[9], [10], [11] e [12].

⁶[13].

⁷[14], [15], [16], [17], [18], [19], [20] e [21].

diversas situações, mas nenhuma figura contendo alavancas é encontrada em *O Método*. Além disso, as demonstrações matemáticas são feitas apenas em palavras, sem mencionar explicitamente os postulados ou resultados anteriores que estão sendo empregados em cada passagem. Foi para superar estas limitações e para apresentar ao leitor a essência do método físico utilizado por Arquimedes que preparamos este Capítulo 9. Este Capítulo apresenta figuras de todas as alavancas em equilíbrio consideradas ao longo de cada uma das demonstrações, além de chamar a atenção para todos os postulados e resultados prévios que são necessários ao longo das demonstrações de cada teorema. Esperamos que após acompanhar este Capítulo o leitor possa seguir com mais proveito a tradução da obra de Arquimedes e com isto perceber a profundidade e beleza do seu raciocínio.

- Diversos aspectos técnicos e matemáticos foram deixados na forma de Apêndices.
- Incluímos uma ampla bibliografia que possa permitir ao leitor se aprofundar em qualquer tema discutido nesta tese.
- Ao divulgar no meio científico nacional este livro de Arquimedes que ficou desconhecido por mais de 2000 anos, queremos salientar uma metodologia que o próprio autor considerou muito importante e alguns aspectos da mesma que continuam atuais até hoje.

Encontramos nesse livro um dos embriões da física teórica e experimental pelo uso da lei da alavanca na obtenção de informações sobre grandezas geométricas (cálculos de áreas, volumes e centros de gravidade).

Também podemos apontar neste trabalho as ideias básicas do cálculo integral que somente foram desenvolvidas e estruturadas depois de 1800 anos.

Finalmente as conclusões de alguns de seus teoremas foram colocadas em prática em obras de engenharia que podemos admirar ainda hoje depois de 1500 anos da sua construção.

Escolhemos enriquecer o texto com comentários acompanhados de figuras. Estas figuras às vezes apresentam corpos tridimensionais vistos em perspectiva. Outras vezes apresentam explicitamente alavancas em equilíbrio com corpos dependurados em seus braços a certas distâncias específicas do fulcro da alavanca, sempre seguindo as especificações de Arquimedes. Acreditamos que muitas passagens de aparência complexa possam ser compreendidas de modo mais intuitivo através das figuras que usamos para ilustrar *O Método* de Arquimedes.

Capítulo 3

A Vida de Arquimedes

A vida e a obra de Arquimedes são bem conhecidas, desde a sua época. Mas hoje, 2.300 anos depois, torna-se difícil separar o que é a lenda do que foi a realidade. Costuma-se dizer que tenha vivido entre 287 e 212 a.C. na cidade de Siracusa, na Sicília, onde passou a maior parte de sua vida. Na realidade temos alguma certeza sobre o ano de sua morte, 212 a.C., pois sabe-se que está ligada a fatos históricos importantes que foram relatados por vários historiadores, entre os quais existe uma boa concordância. Mas o que podemos dizer quanto à data de seu nascimento? Tudo o que “sabemos” a respeito disso é que Arquimedes morreu à idade de 75 anos e daí foi deduzida a data de seu nascimento. Acontece que esta última informação nos chegou através de um único historiador que viveu quase 1500 anos depois de Arquimedes, Johannes Tzetzes!¹

Hoje temos quase certeza que, durante sua vida, Arquimedes passou algum tempo no Egito. Provavelmente até tenha estudado na cidade de Alexandria, que era então o centro científico e cultural do mundo e era sede da famosa biblioteca. Euclides, autor de *Os Elementos*,² a pedido do rei Ptolomeu, ensinou por muitos anos na Academia desta cidade. Muitas das cartas de Arquimedes foram endereçadas a cientistas que trabalharam em Alexandria: Cónon de Samos, Dositheu de Pelúsiu e Eratóstenes.

Talvez este seja um dos principais motivos pelos quais muitas das obras de Arquimedes chegaram até nós, pois era na biblioteca de Alexandria, anexa ao famoso templo dedicado às Musas, *Museu*, que os tratados considerados importantes eram muitas vezes copiados e as cópias eram conservadas até em um lugar diferente.³ Arquimedes devia conhecer bem a importância e o funcionamento da biblioteca de Alexandria. Quando escreve a Eratóstenes em *O Método*, ele comenta: “... entendo que alguns dos meus contemporâneos ou sucessores encontrarão, por meio do método demonstrado, outros teoremas que ainda não me ocorreram.” Ou seja, ele acreditava que seus trabalhos fossem destinados à posteridade.

Por outro lado, não há indícios de que ele tenha escrito algo referente aos seus trabalhos de natureza mais prática, ou àquilo que hoje poderíamos chamar de obras de “engenharia.” Este é um dos motivos pelos quais muitos historiadores acreditam que ele não teria dado importância a esta parte de sua atividade. Este fato também pode ter levado outros historiadores a acreditarem que muitos dos feitos a ele atribuídos pela tradição, sejam somente ideias que não tenham sido realizadas, ou tenham sido mesmo realizações concretas, mas que o passar do tempo se encarregou de engrandecer.

¹[1, pág. 41] e [22, pág. 55].

²[23] e [24].

³As cópias de obras importantes eram conservadas no Templo de Serápis, ver o Capítulo 5.

Citamos aqui apenas alguns dos feitos atribuídos a Arquimedes por Plutarco.⁴ Ele foi o historiador que viveu mais próximo à época de Arquimedes e que relatou fatos históricos correlatos à vida do mesmo. Em particular, mencionou diversos feitos atribuídos a Arquimedes quando descreveu o sítio da cidade de Siracusa, que foi tomada pelos romanos sob o comando do general Marcus Claudius Marcellus em 212 a.C.

Segundo Plutarco e outros historiadores da época,⁵ Arquimedes participou ativamente da defesa de sua cidade contra o sítio da frota romana, durante a Segunda Guerra Púnica, por meio de várias das suas invenções. Entre estas invenções são mencionadas as catapultas. Embora já fossem conhecidas e usadas anteriormente, as de Siracusa tinham alcance regulável de modo a evitar “pontos cegos” e dificultar o avanço do exército inimigo. Será que podemos supor aqui a intervenção do conhecimento de Arquimedes sobre as parábolas e algum tipo de observação sobre o movimento dos projéteis 1800 anos antes de Galileu? Simultaneamente, para deter o ataque da frota romana, eram usados grandes braços mecânicos para verter acima dos muros e sobre os navios inimigos enormes pedras, ao mesmo tempo que “mãos de ferro” eram jogadas para agarrar as proas dos barcos levantando-as e deixando-as cair sobre a popa dos mesmos, afundando-os.⁶

Certamente a descrição fantasiosa destes artefatos bélicos é um reconhecimento do historiador à genialidade de Arquimedes.⁷ Com seus conhecimentos de mecânica, Arquimedes conseguiu parar um exército inteiro que o cercava por terra e por mar, durante vários anos.

Outros trabalhos de Arquimedes ligados de alguma forma à “engenharia” despertaram a atenção de escritores com interesse em áreas específicas. Vitruvio no seu livro *De Architectura* cita trabalhos de Arquimedes em várias ocasiões.⁸ Por exemplo, o “problema da coroa,” cuja solução teria sido encontrada por Arquimedes, determinando a concentração de ouro e prata em uma coroa do rei Heron,⁹ com base nas leis da hidrostática por ele descobertas.¹⁰ Vitruvio também fornece uma descrição detalhada de um mecanismo de levantamento de água, até hoje conhecido como cóclea (caracol), ou parafuso de Arquimedes, que parece ter sido usado nas minas e na irrigação dos campos.

Outros escritores¹¹ mencionam a construção, por parte de Arquimedes, de um planetário, no qual o movimento dos corpos celestes era obtido por meio de mecanismos hidráulicos. Outros ainda falam que tenha construído um “órgão hidráulico” no qual o ar dentro dos tubos era comprimido sobre água. Durante a defesa de Siracusa também ficou famosa a história da queima dos navios romanos por espelhos capazes de concentrar os raios do sol. Esta técnica foi atribuída a Arquimedes por vários autores,¹² mas foi posta em dúvida devido à inexistência, naquela época, de tecnologias adequadas à sua construção.

A conquista de Siracusa pelos romanos somente foi possível em 212 a.C., após um cerco que durou quase três anos. O cônsul Marcelo, que durante todo esse tempo de luta havia adquirido um grande respeito pelo “velho homem,” ordenou que a vida de Arquimedes fosse poupada. Apesar disso, segundo a tradição,¹³ Arquimedes acabou sendo morto por um soldado enquanto

⁴Plutarco (45-125 d.C.), [25, págs. 356-358].

⁵Políbio (203-118 a.C.) e Livio (59 a.C. - 17 d.C.), ver [14, pág. 27].

⁶Tito Livio (59 a.C. - 17 d.C.), [26, XXIV, 34]: “... eminente ferrea manus firmæ catenæ inligata cum iniecta proræ...; uma mão de ferro saindo (dos muros) ligada a uma forte corrente lançada sobre a proa...”

⁷Tito Livio (59 a.C. - 17 d.C.), [26, XXIV, 34], “Arquimedes... inventor e construtor de máquinas de guerra.”

⁸Vitruvio (70 a.C. - 15 d.C.), [27, Livro IX, Prefácio, §9].

⁹Também escrito como Hero, Hierão e Herão.

¹⁰Para uma discussão deste problema ver também os comentários de Heath, [15, Capítulo I e as págs. 259-261].

¹¹Cícero (106-43 a.C.), [28, Livro I, §21].

¹²Luciano de Samosata (125-181 d.C.), [29, pág. 41].

¹³Tito Livio, [26, Livro XXV, §31].

estava concentrado nas suas figuras.

Mesmo a ascendência de Arquimedes está condicionada a muitas dúvidas. Aquilo que conhecemos está contido em um trecho da obra *Contador de Areia* do próprio Arquimedes. Este trabalho nos chegou através de repetidas cópias. A existência destas e de muitas outras dúvidas ligadas fatalmente ao tempo, nos faz perceber a importância do descobrimento de um manuscrito contendo, junto com outras obras, uma cópia do *Método sobre os Teoremas Mecânicos*.

Esta obra de Arquimedes estava perdida e não se conhecia seu conteúdo. O manuscrito que foi encontrado é uma cópia na língua original de uma carta escrita pelo próprio Arquimedes, endereçada ao amigo Eratóstenes, curador da biblioteca de Alexandria.

É através desta e das outras obras que chegaram até nossos dias, que podemos conhecer e compreender o pensamento deste gênio, mesmo que sejam lendas muitas das histórias ou das invenções a ele atribuídas.

Capítulo 4

As Obras de Arquimedes

Apresentamos aqui as obras de Arquimedes que chegaram até nós.¹ Elas são apresentadas na ordem em que Heath supõe que foram escritas,² mesmo que existam muitas controvérsias sobre o assunto.³

- *Sobre o Equilíbrio dos Planos*. Livro I.⁴
- *Quadratura da Parábola*.
- *Sobre o Equilíbrio dos Planos*. Livro II.⁵
- *Sobre a Esfera e o Cilindro*. Livros I e II.
- *Sobre as Espirais*.
- *Sobre Conoides e Esferoides*.
- *Sobre os Corpos Flutuantes*. Livros I⁶ e II.
- *Medida do Círculo*.
- *O Contador de Areia*.
- *Método sobre os Teoremas Mecânicos*.

Além destes trabalhos, sabe-se ainda que Arquimedes escreveu outras obras que atualmente existem apenas em fragmentos, em alguns casos existem apenas menções escritas por outros autores. Estas obras são as seguintes (títulos ou assuntos de que tratam):

- *O Problema Bovino*.
- *Livro de Lemas*.
- *Poliedros Semi-Regulares*.

¹[30, Seção 2.1].

²[15, págs. xxxii-xxxiii].

³[31].

⁴Tradução para o português em [32] e [33].

⁵Tradução para o português em [34].

⁶Tradução para o português em [35].

- *Stomachion.*
- *Área do Triângulo.*
- *Sobre o Heptágono em um Círculo.*
- *Elementos de Mecânica.*

Capítulo 5

O Método: A História de uma Obra Perdida

No tempo de Arquimedes, a cidade de Alexandria tinha poucos anos de vida, pois foi fundada por Alexandre o Grande em 331 a.C. e foi governada a partir do ano 305 por Ptolomeu I Sóter (367-283 a.C.). Ptolomeu I foi general e amigo de Alexandre. Ele fundou a dinastia que reinou sobre o Egito até os tempos de Cleópatra. Sob o reinado de Ptolomeu I e de seus descendentes, a cidade de Alexandria conheceu um período de grande esplendor e tornou-se não somente a capital do Egito, mas também o centro da cultura grega. Foram construídos o Templo das Musas (Museu), o Templo de Serápis, uma nova divindade criada para estimular o sincretismo religioso entre a religião egípcia e a grega, e muitos outros monumentos típicos de uma cidade jovem em pleno florescimento.

Foi aqui, na Biblioteca de Alexandria, sob o comando de Ptolomeu I e de seu filho, que começou a ser feito sistematicamente o registro de todo o conhecimento humano, comprando ou copiando as obras produzidas em todo o mundo então conhecido. Aqui chegaram a ser arquivados de 400.000 a 1.000.000 de rolos de papiro.

Eratóstenes (285-194 a.C.), matemático e astrônomo grego, amigo de Arquimedes, foi curador da Biblioteca de Alexandria durante grande parte de sua vida.

“Arquimedes para Eratóstenes, saudações...” Assim começa a carta enviada por Arquimedes ao amigo matemático e que contém o *Método sobre os Teoremas Mecânicos*. Sabemos que o papiro contendo a carta de Arquimedes para Eratóstenes chegou em Alexandria porque temos provas de que nesta cidade ela foi lida e copiada. No século I d.C., Heron de Alexandria escreveu um tratado chamado *Métrica* onde diz que:¹

O mesmo Arquimedes mostra no mesmo livro [*O Método*] que, se forem introduzidos em um cubo dois cilindros cujas bases são tangentes às faces do cubo, o segmento comum dos cilindros será de dois terços do cubo. Isso é útil para abóbadas construídas dessa maneira...

Heron parecia interessado na construção de uma cúpula com o formato de dois cilindros entrelaçados. O seu relato confirma as palavras de Arquimedes na carta para Eratóstenes, de que seus trabalhos seriam úteis para a posteridade.

Mas a tecnologia do papiro, onde estavam registradas as cartas de Arquimedes, acabou entre o I e o IV século, sendo substituída pelo pergaminho como suporte da escrita comum. O pergaminho tem seu nome ligado à cidade de Pérgamo na Ásia Menor, onde aparentemente foi desenvolvido e é obtido de peles de animais tratadas por um processo químico. Além de ter

¹[1, págs. 77-78] e [22, pág. 105].

maior resistência mecânica e ao tempo que o papiro, o pergaminho tem uma vantagem adicional: por ser muito mais flexível ele pode ser dobrado.

Descobriu-se assim a técnica de juntar quatro pergaminhos dobrados, um dentro do outro, formando o chamado “quaternum” (constituindo, portanto, um conjunto de oito folhas) que, colocados um sobre o outro, vieram a constituir o “códice”. O códice (ou “códex”) como era chamado na época, e o “quaternum” (caderno) ainda constituem a estrutura física dos livros de hoje, simplesmente substituindo o pergaminho pelo papel. Os antigos papiros que não passaram para uma transcrição em pergaminho estão quase todos desaparecidos.

O fato de Arquimedes ter sido famoso já na sua época, não garantiria a sobrevivência de sua obra nesta passagem, pois a prioridade era certamente mais voltada para os clássicos como Homero, Aristóteles ou Euclides, cujos trabalhos tinham interesse mais amplo.

Uma das pessoas que garantiu a chegada das obras de Arquimedes até nossos dias foi Eutócio. Sabemos bem pouco sobre a vida de Eutócio, exceto que nasceu em 480 d.C. na cidade de Ascalona e que passou algum tempo em Alexandria, onde teve contato com os trabalhos de Arquimedes. Seu interesse pela obra do matemático grego foi tão grande que ele iniciou uma empreitada para procurar, reunir e comentar todo o material que conseguisse encontrar de Arquimedes. Eutócio conseguiu editar vários tratados de Arquimedes junto com seus próprios comentários, usando a nova tecnologia do pergaminho, garantindo assim a sobrevivência das ideias de Arquimedes.

Foi pelo interesse de Eutócio, assim como de seus amigos Antêmio de Trales (474-534 d.C.) e Isidoro de Mileto (480-540 d.C.), que as obras de Arquimedes chegaram até nossos dias a partir de Constantinopla (hoje Istambul).

A antiga cidade de Bizâncio foi designada pelo imperador Constantino para ser capital do Império Romano do Oriente e, posteriormente, foi chamada de Constantinopla. Ela viveu um período de crescimento e esplendor durante mais de 400 anos. Seus imperadores demonstraram interesse não somente pelo aspecto militar, mas também pela religião e pela cultura.

Foi assim que o imperador Justiniano determinou a construção da igreja de Santa Sofia (532-537 d.C.) aos arquitetos Antêmio de Trales e Isidoro de Mileto: o resultado é uma obra que ainda hoje é considerada uma das grandes maravilhas do mundo. Antêmio, Isidoro e Eutócio, além de terem tido os mesmos mestres em Alexandria,² também tinham em comum a grande admiração por Arquimedes que transmitiram a seus discípulos, permitindo assim a continuidade do conhecimento do grande mestre, seja nas questões teóricas, seja nos aspectos práticos.

É por esse motivo que o interesse nas obras de Arquimedes em Constantinopla permaneceu por muito tempo. As suas cartas foram reunidas e copiadas várias vezes até o século IX, dando origem aos chamados *Códice A*, *Códice B* e *Códice C*.

O *Códice A* continha a maior parte dos tratados de Arquimedes, os *Comentários* de Eutócio e a obra *Sobre as Medidas* de Heron de Alexandria. Ele desapareceu no século XVI. Por sorte, antes de desaparecer, foram feitas várias cópias e traduções, de modo que o seu conteúdo chegou até nossos dias. O *Códice A* não continha nem o tratado *Sobre os Corpos Flutuantes*, nem *O Método*.³

As pistas do *Códice B* também se perderam na idade média. Porém, antes de seu desaparecimento, foi feita uma tradução em latim por Guilherme de Mörbeke em 1269, da qual ainda existem cópias. O *Códice B* contém, além dos *Comentários* de Eutócio, as seguintes obras de Arquimedes:

²[20, pág. 1].

³[17, pág. xxiv].

Sobre as Espirais.
Sobre o Equilíbrio dos Planos.
Quadratura da Parábola.
Medida do Círculo.
Sobre a Esfera e o Cilindro.
Sobre Conoides e Esferoides.
Sobre os Corpos Flutuantes.

O *Códice C* permaneceu desaparecido até 1906. Devemos a sua descoberta ao filólogo dinamarquês Johann Ludwig Heiberg (1854-1928) que dedicou grande parte de sua vida à pesquisa, tradução e publicação das obras de Arquimedes. Entre 1880 e 1881 ele havia publicado a primeira edição moderna de toda a obra de Arquimedes conhecida até aquela época.⁴

Em 1906 descobriu⁵ em Constantinopla um manuscrito com duas escritas sobrepostas (palimpsesto). A escrita superior era um livro de orações do século XIII e a inferior, parcialmente raspada que servia de base ao livro, continha textos de matemática do século IX ou X.

Heiberg reconheceu no texto mais antigo e quase apagado a obra de Arquimedes. Ele conseguiu decifrar a maior parte do palimpsesto, encontrando vários fragmentos das seguintes obras:

Sobre a Esfera e Cilindro.
Sobre as Espirais (quase completo).
Medida do Círculo.
Sobre o Equilíbrio dos Planos.

Mas a extraordinária importância deste documento é que representa a única fonte em grego de:

Sobre os Corpos Flutuantes I, II (quase completo).
Stomachion (as duas primeiras Proposições).
Método sobre os Teoremas Mecânicos.

Em seguida, na época da II Guerra Mundial, o palimpsesto desapareceu novamente para voltar à luz somente em 1998 quando foi leiloadado em Nova York. O trabalho de transcrição dos seus textos gregos ainda está sendo completado pela equipe multidisciplinar coordenada pelo museu Walters, de Baltimore (Estados Unidos). Espera-se que com os recursos e as tecnologias existentes hoje seja possível conseguir uma interpretação do texto mais completa do que aquela obtida por Heiberg. Com os escassos recursos de 100 anos atrás, ele foi obrigado a deixar muitas lacunas no texto e eventualmente induzido a interpretações incorretas do mesmo.

O nosso interesse está dirigido para o tratado: *Método sobre os Teoremas Mecânicos de Arquimedes para Eratóstenes*. Embora o texto matemático do palimpsesto tenha sido copiado no século IX ou X, só se conheciam citações muito superficiais sobre *O Método* feitas por Theodosius (c. 160-90 a.C.) e Heron de Alexandria (século I d.C.). Mas não se conhecia o próprio texto desta obra fundamental de Arquimedes. Pode-se então afirmar que ela tenha ficado perdida por aproximadamente 2000 anos, até sua descoberta e publicação por Heiberg!

Em 1907 Heiberg publicou o texto original em grego, com tradução para o alemão, da carta de Arquimedes para Eratóstenes contendo o *Método*.⁶ Entre 1910 e 1915 publicou uma nova edição

⁴[36].

⁵[14, pág. 44].

⁶[37] e [30, pág. 33].

completa das obras de Arquimedes em grego e latim, a partir da qual foram feitas traduções em diversas línguas.⁷

A grande importância dada à carta de Arquimedes para Eratóstenes reside no fato de que é um dos poucos tratados (talvez até mesmo o único) em que algum cientista da antiguidade revela o seu método de indução física-matemática usado para chegar a determinadas conclusões.

Por suas obras Arquimedes é considerado por muitos como o pai da física matemática. Em seu trabalho *O Método*, perdido por tanto tempo, ele mostra o íntimo relacionamento entre essas duas ciências e como extrair dele o melhor aproveitamento.

⁷[38].

Capítulo 6

Os Princípios Físicos de *O Método*

A linguagem de Arquimedes não tem nada de simples. Para conseguir uma melhor compreensão da mesma é necessário ter presente alguns conceitos e leis da física por ele descobertos, que ainda hoje usamos como base do nosso conhecimento de mecânica e hidrostática. Apresentamos inicialmente o conceito do centro de gravidade (CG) e a lei da alavanca.

6.1 O Centro de Gravidade

6.1.1 Definição do Centro de Gravidade

Nosso conhecimento sobre o conceito do centro de gravidade deriva essencialmente das obras de Arquimedes. Por suas observações e estudos teóricos, ele desenvolveu uma metodologia tanto para a sua determinação experimental quanto matemática. Com isso foi possível dar um tratamento sistemático às condições de equilíbrio dos corpos.

Apesar disto, infelizmente não é possível encontrar nas obras de Arquimedes que chegaram até nossos dias, uma definição clara do centro de gravidade ou, como ele costumava chamar, centro do peso. Mas por uma análise de suas obras ainda existentes e segundo os autores que estudaram seus trabalhos, pode-se concluir que este conceito seria definido da seguinte maneira:¹

O centro de gravidade de um corpo rígido é um ponto tal que, se for concebido que o corpo está suspenso por este ponto, tendo liberdade para girar em todos os sentidos ao redor deste ponto, o corpo assim sustentado permanece em repouso e preserva sua posição original, qualquer que seja sua orientação inicial em relação à Terra.

6.1.2 Determinação Experimental do Centro de Gravidade

A partir do que encontramos em suas obras, podemos concluir que Arquimedes tinha conhecimento de uma maneira experimental para a determinação do centro de gravidade. Em sua obra *Quadratura da Parábola* afirmou o seguinte:²

Todo corpo, suspenso por qualquer ponto, assume um estado de equilíbrio quando o ponto de suspensão e o centro de gravidade do corpo estão ao longo de uma mesma linha vertical; pois esta proposição já foi demonstrada.

¹[16, págs. 24, 301, 350-351 e 430], [14, págs. 17, 47-48, 289-304, 315-316, 321-322 e 435-436], [15, págs. clxxxi-clxxxii] e [30, págs. 90-91 e Capítulo 6, págs. 121-132].

²[18, pág. 171] e [30, pág. 122].

Infelizmente a prova desta afirmação não chegou até nós. De qualquer forma, esta Proposição fornece um procedimento experimental para se encontrar o centro de gravidade de um corpo rígido. Inicialmente suspende-se o corpo por um ponto P_1 tal que o corpo tenha liberdade para girar ao redor deste ponto. Ele é solto do repouso em uma orientação arbitrária em relação ao solo, ficando sob a ação gravitacional terrestre. Aguarda-se que o corpo atinja o equilíbrio, ou seja, que fique em repouso em relação ao solo. Com o auxílio de um fio de prumo é traçada uma vertical passando por P_1 até a extremidade E_1 do corpo, Figura 6.1.

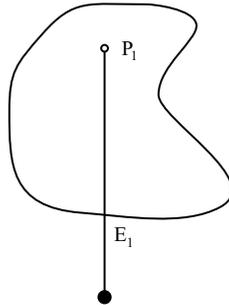


Figura 6.1: Utiliza-se um fio de prumo para traçar a vertical ligando um ponto de suspensão P_1 até a extremidade E_1 do corpo.

Suspende-se o corpo por um outro ponto P_2 que não esteja ao longo desta primeira vertical P_1E_1 . Ele é novamente solto do repouso em uma orientação arbitrária. Aguarda-se que o corpo atinja o equilíbrio. Com o auxílio do fio de prumo traça-se uma segunda vertical passando por P_2 até a extremidade E_2 do corpo. O cruzamento das duas verticais é o centro de gravidade do corpo, Figura 6.2.

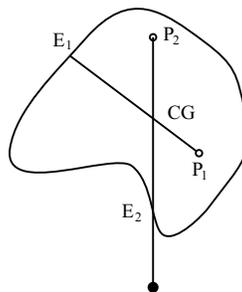


Figura 6.2: O cruzamento de duas verticais é o centro de gravidade (CG) do corpo.

6.1.3 Determinação Teórica do Centro de Gravidade

Na obra de Arquimedes que chegou até nós encontramos vários resultados teóricos relacionados com o centro de gravidade de figuras geométricas filiformes, planas e volumétricas.³

Para chegar nestes resultados Arquimedes utilizou essencialmente os seguintes princípios:

1. Princípios de simetria.
2. O famoso sexto postulado de *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, citado a seguir.

³Ver [30, Seção 6.2, Resultados Teóricos sobre o Centro de Gravidade Obtidos por Arquimedes].

3. O método sobre os teoremas mecânicos.

A seguir discutimos brevemente cada um destes princípios.

Princípio 1. Como exemplo de um princípio de simetria temos a primeira parte do primeiro postulado de *Sobre o Equilíbrio dos Planos*:⁴

Postulamos que grandezas iguais se equilibram a distâncias iguais.

Ou seja, se temos uma alavanca com dois corpos de mesmo peso apoiados sobre os pontos A e B da alavanca, ela vai ficar em equilíbrio com o fulcro localizado sobre um ponto C da alavanca tal que $AC = CB$.

Princípio 2. O sexto postulado de *Sobre o Equilíbrio dos Planos* afirma o seguinte:⁵

Se grandezas se equilibram a certas distâncias, então grandezas equivalentes a estas grandezas se equilibrarão, por sua vez, nas mesmas distâncias.

O significado deste postulado foi esclarecido por Vailati, Toeplitz, Stein e Dijksterhuis.⁶ O ponto principal, que concorda com a maneira implícita com que Arquimedes utiliza este postulado em suas demonstrações, é que por “grandezas equivalentes,” ele quer dizer “grandezas de mesmo peso.” E por “grandezas a certas distâncias,” ele quer dizer “grandezas cujos centros de gravidade estão às mesmas distâncias do fulcro da alavanca.”

Em particular, vamos supor que temos vários corpos em equilíbrio sobre uma alavanca. Vamos chamar um destes corpos de A . Este postulado afirma que se pode substituir este corpo A por um outro corpo B , sem afetar o equilíbrio da alavanca, desde que duas condições sejam satisfeitas: (I) O peso de B tem de ser igual ao peso de A . (II) A distância do centro de gravidade de B até o fulcro da alavanca tem de ser igual à distância que havia entre este fulcro e o centro de gravidade de A .

Em seu trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos* Arquimedes usa este postulado para demonstrar, entre outras coisas, a lei da alavanca e para obter o centro de gravidade de um triângulo.⁷ Este postulado também é utilizado implicitamente por Arquimedes na demonstração de vários teoremas de *O Método*, como discutiremos no Capítulo 9.

Princípio 3. Este princípio corresponde ao próprio método de Arquimedes, o qual será explicado e ilustrado detalhadamente ao longo desta tese. É o método que ele utilizou para calcular a área, o volume e o centro de gravidade de algumas figuras geométricas. Nas Seções 9.2, 9.3 e 9.6, por exemplo, discutimos a aplicação deste método para a obtenção da área de um segmento parabólico, do volume de uma esfera e do centro de gravidade de um segmento de paráboloide de revolução.

⁴[33, pág. 222].

⁵[33, pág. 223].

⁶Ver uma discussão detalhada e as referências relevantes em [33, Subseção 9.7.1].

⁷Ver uma discussão detalhada destes pontos em [30, Seção 9.7: A Demonstração da Lei da Alavanca Apresentada por Arquimedes e o Cálculo do Centro de Gravidade de um Triângulo].

6.2 A Lei da Alavanca

Ao falar sobre alavancas é conveniente lembrar alguns conceitos e definições:⁸

A alavanca consiste em um corpo rígido, geralmente linear e horizontal, capaz de girar ao redor de um eixo horizontal fixo em relação à Terra. Este eixo de rotação é normalmente ortogonal à barra da alavanca. O ponto em que o eixo toca a alavanca é chamado de *fulcro* da alavanca. Este é também o ponto de sustentação da alavanca. Uma alavanca está em equilíbrio quando sua haste ou travessão fica em repouso em relação à Terra, na horizontal. Chamamos de braço da alavanca à distância horizontal entre o ponto de apoio de um corpo sobre o travessão e o plano vertical passando pelo fulcro.

Vamos supor que temos dois corpos ligados aos braços opostos de uma alavanca. O equilíbrio ocorre de acordo com a chamada lei da alavanca, que aqui lembramos nas palavras do próprio Arquimedes:⁹

Grandezas comensuráveis se equilibram em distâncias inversamente proporcionais a seus pesos.

Da mesma maneira, se grandezas são incomensuráveis, elas se equilibrarão em distâncias inversamente proporcionais às grandezas.

Ou seja, vamos supor que os corpos de pesos P_A e P_B estão em equilíbrio sobre uma alavanca, suspensos por seus centros de gravidade a distâncias d_A e d_B do fulcro F , Figura 6.3.

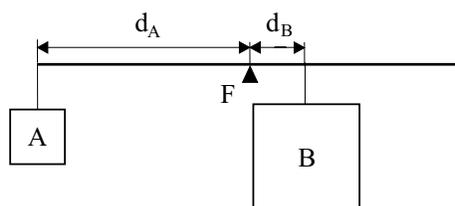


Figura 6.3: Alavanca em equilíbrio ao redor do fulcro F .

Esta lei pode ser expressa matematicamente, tanto para grandezas comensuráveis quanto incomensuráveis, da seguinte forma:

$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{P_B}{P_A}. \quad (6.1)$$

⁸[30, pág. 165].

⁹*Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Proposições VI e VII, [33, págs. 227 e 229].

Capítulo 7

Os Princípios Matemáticos de *O Método*

Os trabalhos de Arquimedes não são voltados a estudantes. Ele se dirigia aos grandes matemáticos e cientistas da época. Entre outros objetivos, escrevia para desafiar a compreensão de seus colegas contemporâneos ou mesmo para a posteridade, como escreveu na carta para Eratóstenes que contém *O Método*. Ele tinha razão. Mais de 700 anos depois de sua morte seus trabalhos eram estudados, traduzidos e aplicados, entre outros, pelos arquitetos Antêmio de Trales e Isidoro de Mileto. Eles usaram as bases estabelecidas por Arquimedes para determinar o volume do espaço delimitado pela interseção de dois cilindros ortogonais, na construção do que é considerado o mais belo exemplo da arquitetura bizantina: a cúpula da igreja de Santa Sofia em Istambul.

Para poder penetrar com maior facilidade no raciocínio de Arquimedes, é necessário lembrar alguns pontos fundamentais da matemática grega daquela época, dos quais vamos apresentar aqui apenas o essencial: a álgebra geométrica, a aplicação das áreas e a teoria das proporções.¹ Estas técnicas foram muito utilizadas nas demonstrações de *O Método*.

7.1 Álgebra Geométrica

A chamada álgebra geométrica (nomenclatura moderna) foi desenvolvida pelos matemáticos gregos antes de Arquimedes e reagrupada por Euclides no Livro II de *Os Elementos*. Ela fornece os recursos matemáticos que hoje são supridos pela álgebra, partindo porém, como diz o nome, de considerações geométricas.

A seguir apresentamos as primeiras Proposições que são as mais usadas em *O Método*, mostrando sua correspondência com as equações algébricas de hoje.

PROPOSIÇÃO I - Caso existam duas retas, e uma delas seja cortada em segmentos, quantos quer que sejam, o retângulo contido pelas duas retas é igual aos retângulos contidos tanto pela não cortada quanto por cada um dos segmentos.²

Uma ilustração desta Proposição encontra-se na Figura 7.1. O lado BG do retângulo tem comprimento a , enquanto que o lado BC do retângulo está dividido por segmentos ortogonais a este lado em três partes cujos comprimentos são b , c e d .

Euclides demonstra geometricamente que a área do retângulo grande, $a(b+c+d)$, é equivalente à soma da área dos três retângulos menores, a saber, $ab + ac + ad$.

¹[14, págs. 51-54], [1, pág. 49], [22, pág. 67] e [15, págs. xl-xxvii].

²[24, pág. 135].

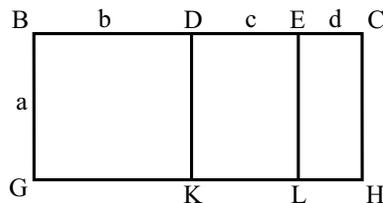


Figura 7.1: A Proposição I em forma geométrica.

Esta Proposição I pode ser colocada em forma algébrica da seguinte maneira:

$$a(b + c + d + \dots) = ab + ac + ad + \dots \quad (7.1)$$

PROPOSIÇÃO II - Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o retângulo contido pela reta toda e cada um dos segmentos é igual ao quadrado sobre a reta toda.³

Uma ilustração desta Proposição encontra-se na Figura 7.2. Euclides demonstra geometricamente que a área do retângulo de lados a e $a + b$, juntamente com a área do retângulo de lados b e $a + b$, é equivalente à área do quadrado de lado $a + b$.

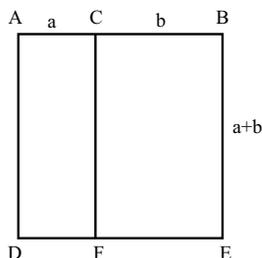


Figura 7.2: A Proposição II em forma geométrica.

Esta Proposição II pode ser colocada de forma algébrica da seguinte maneira:

$$(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2 . \quad (7.2)$$

PROPOSIÇÃO III - Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o retângulo contido pela reta toda e por um dos segmentos é igual a ambos, o retângulo contido pelos segmentos e o quadrado sobre o predito segmento.⁴

Uma ilustração desta Proposição encontra-se na Figura 7.3. Euclides demonstra geometricamente que a área do retângulo de lados b e $a + b$ é equivalente à área do retângulo de lados a e b , somada com a área do quadrado de lado b .

Esta Proposição III pode ser colocada de forma algébrica da seguinte maneira:

$$(a + b)b = ab + b^2 . \quad (7.3)$$

³[24, pág. 136].

⁴[24, pág. 137].

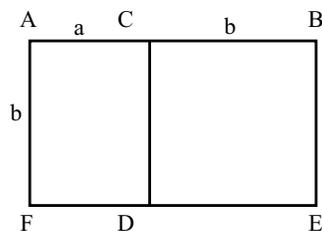


Figura 7.3: A Proposição III em forma geométrica.

PROPOSIÇÃO IV - Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos.⁵

Uma ilustração desta Proposição encontra-se na Figura 7.4. Euclides demonstra geometricamente que a área do quadrado de lado $a + b$ é equivalente à soma de quatro áreas, a saber, o quadrado de lado a , o quadrado de lado b , e duas vezes o retângulo de lados a e b .

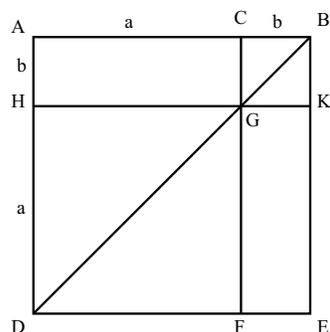


Figura 7.4: A Proposição IV em forma geométrica.

Esta Proposição IV pode ser colocada de forma algébrica da seguinte maneira:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab . \tag{7.4}$$

Estes são apenas alguns exemplos de teoremas puramente geométricos que hoje em dia são expressos de maneira sucinta com a notação algébrica. As regras para manipular as grandezas algébricas foram criadas para reproduzir os teoremas geométricos.

7.2 Aplicação das Áreas

A descoberta do “método de aplicação das áreas” é atribuída à Escola Pitagórica, que floresceu na cidade de Crotona no VI século antes de Cristo, sob a orientação de Pitágoras (aproximadamente 580-500 a.C.). Portanto, esta descoberta ocorreu vários séculos antes de Euclides e Arquimedes. Este método é usado para comparar áreas de figuras geométricas que possuem formatos diferentes,

⁵[24, pág. 137].

fornecendo aos matemáticos gregos os recursos necessários para resolver, por meio da geometria, alguns tipos de equações que hoje tratamos por via algébrica.

O chamado método de aplicação das áreas consiste na comparação de áreas de figuras geométricas que possuem formatos diferentes. O verbo grego $\pi\alpha\rho\alpha\beta\alpha\lambda\lambda\omega$ (*paraballo*) é usualmente traduzido por *aplicar* quando usado neste sentido. Contudo, para explicar a operação aqui realizada, achamos que o verbo *comparar*, que é um outro sentido de *paraballo*, pode ser mais útil na compreensão da ideia que existe por detrás desta palavra.

Neste método inicialmente compara-se um lado de um paralelogramo (geralmente um retângulo), com um segmento de reta dado. Primeiro junta-se uma extremidade do lado do paralelogramo com uma extremidade do segmento dado e verifica-se em que ponto termina o lado do paralelogramo. Se o vértice “livre” do retângulo cai antes da extremidade do segmento de reta considerado, temos um caso de “falta” ou “élleipsis” em grego. Se há uma coincidência exata das duas extremidades, temos uma “aplicação” propriamente dita, ou “parabolé”. Caso exista um excesso do lado do retângulo em relação ao segmento dado, temos um caso de “hiperbolé”. Estes três casos estão ilustrados na Figura 7.5.

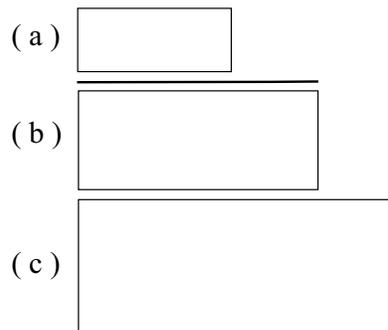


Figura 7.5: Os casos de aplicação das áreas. Comparação do lado superior de um retângulo com um segmento de reta dado, segmento este entre os dois retângulos superiores. (a) Aplicação com falta ou *élleipsis*. (b) Aplicação exata ou *parabolé*. (c) Aplicação com excesso ou *hiperbolé*.

Com esta introdução podemos agora compreender a origem das denominações de “elipse, parábola e hipérbole” dadas por Apolônio de Perga (aproximadamente 262-190 a.C.) às curvas cônicas que conhecemos hoje. Com efeito, na sua dedução da equação da parábola, Apolônio, na interpretação de Heath, chega à seguinte conclusão:⁶

Segue-se que o quadrado de qualquer ordenada $[y]$ em relação a um certo diâmetro determinado PM é igual ao retângulo *aplicado* ($\pi\alpha\rho\alpha\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$) à linha reta determinada PL $[p]$ traçada em ângulo reto com PM [o diâmetro] e com altura igual à abscissa correspondente PV $[x]$. Portanto, esta curva é chamada de *PARÁBOLA*.

Analogamente,⁷ Apolônio deduz as equações da elipse (falta área na aplicação) e da hipérbole (excesso de área na aplicação). Seus resultados, em notação moderna, são apresentados pelas expressões seguintes nas quais p e d são constantes.⁸

⁶Ver [39, Proposição 1, pág. 9].

⁷Ver [39, Proposições 2 e 3, págs. 9-12].

⁸Ver [23, Volume 1, pág. 345].

No caso da parábola:

$$y^2 = px . \quad (7.5)$$

No caso da elipse:

$$y^2 = px - \frac{p}{d}x^2 . \quad (7.6)$$

No caso da hipérbole:

$$y^2 = px + \frac{p}{d}x^2 . \quad (7.7)$$

Um exemplo do método de aplicação das áreas pode ser considerado a seguir:⁹ Dado um triângulo com área de $12 m^2$ e uma linha reta cujo comprimento é $4 m$, dizemos que aplicamos à linha reta uma área igual àquela do triângulo, se tomamos o comprimento total de $4 m$ e encontramos quantos metros de largura deve ter o paralelogramo para ser equivalente ao triângulo. Neste caso a largura do retângulo deve ser de $3 m$, tal que sua área seja de $12 m^2$, igual à área dada do triângulo.

Outros exemplos são encontrados em várias Proposições de *Os Elementos* de Euclides. A Proposição 44 do Livro I, por exemplo, afirma que:¹⁰

Aplicar à reta dada, no ângulo retilíneo dado, um paralelogramo igual ao triângulo dado.

Sem entrar nos detalhes da demonstração geométrica que pode ser encontrada nas referências citadas, percebemos que com essa Proposição os matemáticos gregos podiam resolver equações lineares. Com efeito, vamos considerar o paralelogramo como sendo um retângulo, o segmento de reta dado como tendo um comprimento a dado, e a área do triângulo (ou qualquer outra figura delimitada por linhas retas) como sendo dada por Δ . Vamos ainda indicar por x a largura que deve ter o retângulo para solucionar o problema, ou seja, tal que a área dada do triângulo seja igual à área do retângulo de comprimento dado. Podemos então escrever, em termos algébricos:

$$ax = \Delta . \quad (7.8)$$

Ou seja:

$$x = \frac{\Delta}{a} . \quad (7.9)$$

Como a Proposição 44 do Livro I de *Os Elementos* de Euclides permite determinar geometricamente o valor da variável x , podemos entender como os matemáticos gregos encontraram uma maneira de resolver equações de primeiro grau.

Similarmente, na Proposição 29, Livro VI, de *Os Elementos*, Euclides mostra como:¹¹

A uma dada linha reta *aplicar* um paralelogramo igual a uma dada figura retilínea,¹² e excedente por um paralelogramo semelhante a um (paralelogramo) dado.

⁹Ver [23, Volume 1, pág. 343].

¹⁰Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro I, Proposição 44, [24, pág. 130].

¹¹[23, Volume 2, pág. 262].

¹²O significado de figura retilínea ou ângulo retilíneo corresponde a “delimitado por linhas retas”.

Neste caso também não vamos detalhar a demonstração geométrica dessa Proposição, mas podemos ver como ela pode ser transformada em uma apresentação algébrica familiar, da seguinte maneira:

Sejam dados um segmento de reta com comprimento a e uma figura de área Δ . Consideramos por simplicidade que o paralelogramo a ser aplicado a este segmento de reta de comprimento a seja um retângulo de lado x e que o excedente seja um quadrado de lado x . Devemos então determinar a largura x de um retângulo de modo que a soma das áreas do retângulo (ax) e do quadrado (xx) seja igual à área da figura dada. Então:

$$ax + x^2 = \Delta . \quad (7.10)$$

Ou seja:

$$x^2 + ax - \Delta = 0 . \quad (7.11)$$

Como a Proposição 29 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides permite determinar geometricamente o valor da variável x , percebemos como os matemáticos gregos encontraram uma maneira de resolver equações de segundo grau.

Pelo que foi exposto até aqui, podemos entender melhor as seguintes bases usadas pelos matemáticos gregos e por Arquimedes:¹³

- Qualquer superfície delimitada por linhas retas pode ser subdividida em triângulos.
- A superfície de qualquer triângulo é equivalente à superfície de meio retângulo.
- A superfície de qualquer retângulo pode ser reconduzida à superfície de um quadrado.

A combinação desses três princípios permite concluir que podemos medir qualquer área delimitada por linhas retas como uma soma de quadrados. Foi neste ponto que pararam os matemáticos gregos antes de Arquimedes.

Arquimedes foi um dos primeiros matemáticos a demonstrar a equivalência entre uma superfície delimitada por linhas curvas e uma outra superfície delimitada por linhas retas (triângulo, quadrado, retângulo ou outro polígono). Veremos exemplos disto a seguir, na tradução e comentários sobre *O Método*. Na primeira Proposição deste trabalho, por exemplo, ele obtém a área de um segmento parabólico em termos da área de um triângulo inscrito na parábola.

7.3 Teoria das Proporções

Já citamos em várias ocasiões a obra *Os Elementos* de Euclides. Nessa obra encontramos reunido todo o conhecimento matemático grego daquela época, como foi possível verificar em alguns dos exemplos citados.

Para uma melhor compreensão da matemática de *O Método*, apresentamos a seguir, extraído do Livro V de *Os Elementos*, alguns conceitos básicos da teoria das proporções com os seus equivalentes algébricos, que serão muito úteis posteriormente.¹⁴

¹³[1, pág. 49] e [22, pág. 67].

¹⁴[14, pág. 52].

7.3.1 Conceitos Fundamentais

Vamos lidar aqui com grandezas homogêneas A, B, C, \dots . Diz-se que duas grandezas A e B são homogêneas quando satisfazem ao axioma de Eudoxo (aproximadamente 408-355 a.C.), isto é, quando existem números naturais m e n tais que $mA > B$ e $nB > A$.

Razão dupla

Sendo

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C}, \quad (7.12)$$

então temos:

$$\frac{A}{C} = \frac{A^2}{B^2}. \quad (7.13)$$

Razão tripla

Sendo

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D}, \quad (7.14)$$

então temos:

$$\frac{A}{D} = \frac{A^3}{B^3}. \quad (7.15)$$

Razão composta

Sendo

$$\frac{A}{B} = \frac{M}{N}, \quad (7.16)$$

e

$$\frac{B}{C} = \frac{P}{Q}, \quad (7.17)$$

então temos:

$$\frac{A}{C} = \frac{M \cdot P}{N \cdot Q}. \quad (7.18)$$

7.3.2 Operações Principais

Apresentamos em seguida as principais operações da teoria das proporções usadas nesse livro:¹⁵

A partir da proporção

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}, \quad (7.19)$$

podem ser obtidas outras proporções conhecidas pelos nomes dados a seguir.

Permutando:

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D}. \quad (7.20)$$

Invertendo:

$$\frac{B}{A} = \frac{D}{C}. \quad (7.21)$$

Compondo:

$$\frac{A+B}{B} = \frac{C+D}{D}. \quad (7.22)$$

Separando:

$$\frac{A-B}{B} = \frac{C-D}{D}, \quad (7.23)$$

desde que $A > B$ e $C > D$.

Convertendo:

$$\frac{A}{A-B} = \frac{C}{C-D}, \quad (7.24)$$

desde que $A > B$ e $C > D$.

Por combinação das anteriores temos também:

$$\frac{A+B}{A} = \frac{C+D}{C}, \quad (7.25)$$

$$\frac{B}{A-B} = \frac{D}{C-D}, \quad (7.26)$$

e

$$\frac{A-B}{A} = \frac{C-D}{C}. \quad (7.27)$$

As operações acima podem também ser usadas como desigualdades.

¹⁵[14, págs. 52-54].

Capítulo 8

As Cônicas no Tempo de Arquimedes

8.1 Introdução

Conta a lenda que o povo de Atenas mandou uma delegação ao oráculo de Delos para perguntar como poderia ser combatida uma epidemia de peste que dizimava a cidade. O oráculo respondeu que o altar do deus Apolo deveria ser duplicado. Acontece que o altar em questão tinha a forma de um cubo e os atenienses então construíram um outro altar de forma cúbica cujo lado era o dobro do primeiro... E a epidemia de Atenas continuou!

O “problema de Delos” como ficou conhecido o problema proposto pelo oráculo, consiste na determinação do lado de um cubo cujo volume seja o dobro de um cubo dado. A solução deste problema, por via geométrica, manteve os matemáticos gregos ocupados por muito tempo.

Atribui-se a descoberta das curvas cônicas ao matemático Menecmo (aproximadamente 380-320 a.C.) que, para encontrar uma solução do “problema de Delos”, abriu para a humanidade esta área da geometria que se demonstrou tão rica desde os seus primórdios.¹

Depois de Menecmo os matemáticos gregos dedicaram-se intensivamente ao estudo destas curvas, até sua sistematização geral por parte de Apolônio, que desenvolveu uma abordagem tão completa do assunto que permaneceu praticamente inalterada até a era moderna. Com efeito, o seu livro *As Cônicas*, que chegou até nossos dias quase completo,² constitui a base de tudo o que conhecemos sobre o assunto.

Devemos porém observar que a visão que hoje temos das curvas cônicas difere profundamente da visão dos gregos. Os gregos não as consideravam como lugares geométricos, mas como seções de algum tipo de cone obtidas por planos definidos, sendo esta a origem do nome “seções cônicas”.

Mesmo entre os gregos antigos, porém, as curvas cônicas eram obtidas de maneira diferente, dependendo do tipo de cone usado para a sua geração. Antes de Apolônio, os cones eram considerados como sólidos geométricos de uma só folha gerados pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. Os cones eram classificados de acordo com o tipo de ângulo no vértice do cone, delimitado pelas geratrizes, em um corte por um plano contendo o eixo do cone.³ Podemos ter cones com três tipos de ângulo no vértice, a saber, agudo, reto ou

¹Ver *Comentários de Eutócio de Ascalona ao Primeiro Livro do Tratado de Arquimedes: Sobre a Esfera e o Cilindro*, [20, págs. 90-97].

²[39].

³Ver [14, págs. 56-60]. A geratriz e o eixo de uma superfície de revolução podem ser definidos nas seguintes palavras, [40, pág. 181]: “Uma superfície de revolução é uma superfície que pode ser obtida pela rotação de uma curva plana, chamada geratriz, em torno de uma reta fixa, chamada eixo (de revolução), no plano da referida curva.”

obtusos. É claro que com esse tipo de construção podemos obter somente cones circulares retos como mostrado na Figura 8.1.

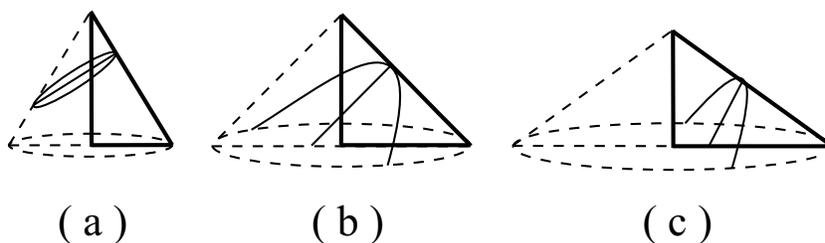


Figura 8.1: Construção das curvas cônicas segundo Menecmo. (a) Elipse em cone circular reto de ângulo agudo. (b) Parábola em cone circular reto de ângulo reto. (c) Hipérbole em cone circular reto de ângulo obtuso.

A partir destes cones, sempre cortando uma das geratrizes com um plano perpendicular a ela, eram obtidas as curvas cônicas. Estas cônicas recebiam as seguintes denominações dependendo do tipo de cone utilizado:

Denominação de Menecmo e Arquimedes:	Denominação moderna:
<i>Seção de cone de ângulo agudo ou oxítomo</i>	<i>Elipse</i>
<i>Seção de cone de ângulo reto ou ortótomo</i>	<i>Parábola</i>
<i>Seção de cone de ângulo obtuso ou amblítomo</i>	<i>Hipérbole.</i>

Os termos *elipse*, *parábola* e *hipérbole*, como costumamos chamar hoje estas curvas, foram atribuídos a elas, posteriormente, por Apolônio, que as obteve da mesma maneira, mas com um procedimento diferente. Com efeito, Apolônio usava cones de base circular, mas os seus planos de corte apresentavam diferentes inclinações em relação às geratrizes. Quando o corte era feito com um plano paralelo a uma geratriz obtínhamos uma parábola. Cortando o cone com um plano que encontrava duas geratrizes, obtínhamos uma elipse. E quando o plano de corte encontrava uma geratriz e o prolongamento de outra, obtínhamos então uma hipérbole.

Não queremos fazer aqui uma análise mais profunda das diferenças entre estas duas maneiras de obtenção das curvas cônicas, pois isso foge aos objetivos desse trabalho, e também porque temos vários motivos para acreditar⁴ que a visão que Arquimedes tinha das curvas cônicas fosse correspondente àquela de Menecmo.

É interessante porém citar aqui dois argumentos para consolidar este ponto de vista, que podem ser considerados entre os mais importantes:

- As denominações das curvas cônicas usadas por Arquimedes correspondem àquelas de Menecmo, e não às denominações de Apolônio (que são as denominações modernas). Ou seja, Arquimedes utilizava *seção de cone de ângulo agudo* no lugar de *elipse*, *seção de cone de ângulo reto* no lugar de *parábola*, e *seção de cone de ângulo obtuso* no lugar de *hipérbole*.
- As equações das curvas usadas por Arquimedes não são as equações de Apolônio, mesmo que em alguns casos haja coincidência.

⁴Ver [14, pág. 63 - 65].

8.2 Definições

Nesta Seção apresentamos algumas definições da matemática grega,⁵ relacionadas com *O Método*.

- O *lado* de um cone ou de um cilindro é uma de suas *geratrizes*.⁶
- O *eixo* de um cone é a linha reta traçada do vértice ao centro da base circular. O *eixo* de um cilindro é a linha reta traçada ligando os centros das bases circulares opostas.
- A *corda* é o segmento de reta que inicia e finda em dois pontos de uma curva.
- O *segmento no plano* é definido por Arquimedes como a área delimitada por uma curva e uma corda.
- A *base* do segmento no plano é a sua corda.
- O *segmento no espaço* é definido por Arquimedes como o volume delimitado por uma superfície de revolução e um plano.
- O *sintoma* de uma curva era o nome dado pelos matemáticos gregos à equação característica da curva.
- A *parábola* é definida por Arquimedes (da mesma maneira que Menecmo) como a seção de um cone reto de base circular, com ângulo no vértice também reto, obtida com um plano perpendicular a uma geratriz, Figura 8.2.

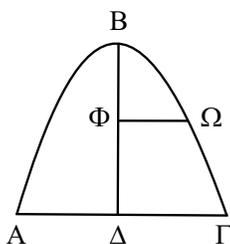


Figura 8.2: Parábola $AB\Gamma$ de base $A\Delta\Gamma$ e diâmetro $B\Delta$, com $A\Delta = \Delta\Gamma$, sendo B o vértice da parábola. A ordenada em um ponto Ω é o segmento $\Omega\Phi$ paralelo à base, enquanto que a abscissa associada a esta ordenada é o segmento ΦB .

- O *diâmetro* de uma parábola é somente o seu eixo de simetria,⁷ Figura 8.2.
- O *vértice* de uma parábola é o ponto de encontro do diâmetro com a curva, Figura 8.2.
- A *ordenada* é a linha traçada de um ponto da curva ao diâmetro, paralelamente à base, Figura 8.2.

⁵[15, Capítulo VIII: A Terminologia de Arquimedes, págs. clv-clxxxvi] e [39, Apêndice à Introdução - Notas sobre a Terminologia da Geometria Grega, págs. clvii-clxx].

⁶A geratriz e o eixo de uma superfície de revolução foram definidos na Nota de Rodapé 3, página 36 desta tese.

⁷De acordo com Heath, [15, Capítulo VIII: A Terminologia de Arquimedes, pág. clxvii].

- A *abscissa* associada a uma ordenada é o segmento de reta ao longo do diâmetro entre o vértice e o ponto em que a ordenada encontra o diâmetro, Figura 8.2.⁸
- O *parâmetro* das ordenadas de uma parábola (ou de outra cônica) é o segmento de reta ao qual é *aplicado* um retângulo de largura igual à abscissa para obter uma área equivalente à área do quadrado contido pela ordenada.⁹
- Os eixos que chamamos de *eixo maior* e *eixo menor* de uma elipse eram chamados por Arquimedes de *diâmetro maior* e *diâmetro menor*, respectivamente. Qualquer um destes diâmetros ou eixos era chamado de *conjugado* do outro.
- A *tangente* é uma reta tocando uma curva em um ponto.
- A *subtangente* de uma parábola (ou de uma curva qualquer) em um ponto é a projeção sobre um eixo do segmento da tangente compreendido entre o ponto de tangência e o ponto onde a tangente encontra o eixo considerado, como está indicado na Figura 8.3.

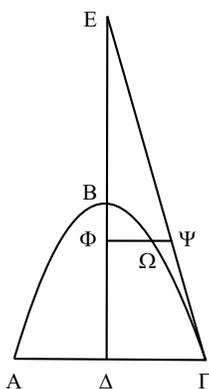


Figura 8.3: A subtangente é dada pelo segmento $E\Delta$.

Seja uma parábola $AB\Gamma$ e uma tangente $E\Gamma$ ao ponto Γ , Figura 8.3. Neste caso a subtangente é dada pelo segmento $E\Delta$.

8.3 Equações Características

Tendo sido feito um panorama geral das curvas cônicas, das denominações das grandezas a elas relacionadas, e de seu relacionamento com os cones e os planos geradores, podemos perceber com maior facilidade a dedução da equação característica (*sintoma*) de cada uma delas.

⁸Estas definições de *ordenada* e *abscissa* permitem construir um sistema de coordenadas com origem no vértice, com o eixo das abscissas no diâmetro da parábola e com o eixo das ordenadas ao longo da tangente à curva passando pelo vértice.

⁹Chamando o parâmetro de p , a abscissa de x e a ordenada de y teremos $y^2 = px$. Ver a Equação (7.5) na Seção 7.2. Em muitos textos, o *parâmetro* é identificado como *orthia* ($\rho\theta\iota\alpha$), termo introduzido posteriormente por Apolônio.

8.3.1 Parábola

Vamos usar a Figura 8.4 para deduzir a equação de uma parábola, tal como foi usada por Arquimedes nos seus livros. A parábola corresponde ao corte de um cone de ângulo reto no vértice T, por um plano passando por A perpendicularmente à geratriz $T\Gamma$ do cone.

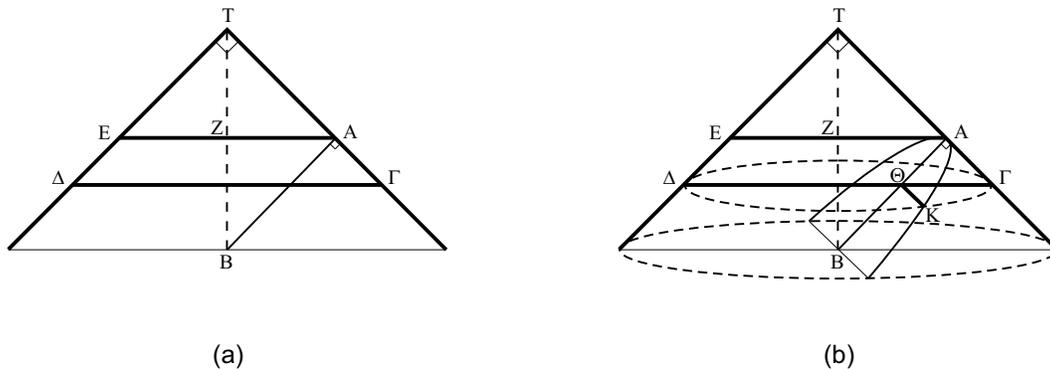


Figura 8.4: Construção de uma parábola de acordo com Menecmo. (a) Visão lateral. (b) Visão em perspectiva.

Na Figura 8.4 (a) o plano do papel contém as geratrizes do cone, ΔT e $T\Gamma$, assim como o eixo do cone, TB . O ângulo $\Delta T\Gamma$ é reto. Consideramos então um plano perpendicular a uma das geratrizes $T\Gamma$ do cone, cortando-a no ponto A. A curva determinada por este plano na superfície do cone é uma *parábola*, ou *seção de cone de ângulo reto* de acordo com Arquimedes, Figura 8.4 (b). O ponto A é chamado de vértice da parábola e o segmento AB ligando este vértice até o eixo do cone é o chamado *diâmetro* da parábola, que coincide com seu eixo de simetria. Temos que por construção AB é perpendicular à geratriz $T\Gamma$.

Para determinar a equação característica desta curva, consideramos um ponto qualquer K sobre a mesma. Logo este ponto estará na superfície do cone. Por este ponto K traçamos um plano paralelo à base do cone, como mostrado na Figura 8.4. A interseção deste plano com o cone será então um círculo cujo diâmetro é $\Gamma\Delta$ e cujo ponto K está na circunferência, Figura 8.5.

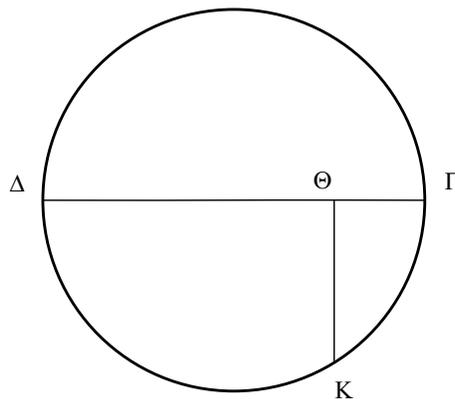


Figura 8.5: Vista superior do círculo paralelo à base do cone e passando por K.

Nestas condições o triângulo $K\Delta\Gamma$ é um triângulo retângulo em K. Seja traçada por K uma reta perpendicular ao diâmetro $\Delta\Gamma$ e cortando-o no ponto Θ . A reta $K\Theta$, perpendicular a $\Gamma\Delta$, é a perpendicular traçada a partir do ângulo reto para a hipotenusa.

A Proposição 8 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides afirma que:¹⁰

Caso em um triângulo retângulo seja traçada uma perpendicular do ângulo reto até a base, os triângulos junto à perpendicular são semelhantes tanto ao todo quanto entre si.

O Corolário desta Proposição diz que:¹¹

A partir disto é claro que, se em um triângulo retângulo, for traçada uma perpendicular a partir do ângulo reto para a base, a linha reta assim traçada é uma média proporcional entre os segmentos da base.

Com este Corolário podemos estabelecer a seguinte igualdade:

$$Q(K\Theta) = R(\Gamma\Theta, \Theta\Delta) . \quad (8.1)$$

Com essa notação indica-se que o quadrado (Q) do segmento $K\Theta$ é equivalente ao retângulo (R) cujos lados são os segmentos $\Gamma\Theta$ e $\Theta\Delta$. Ou seja, a Equação (8.1) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$K\Theta \cdot K\Theta = \Gamma\Theta \cdot \Theta\Delta . \quad (8.2)$$

Pelo vértice A passamos um outro plano paralelo à base, cortando o lado $T\Delta$ no ponto E. Seja Z o ponto médio do segmento EA. Os pontos EA $\Theta\Delta$ formam um paralelogramo. Portanto,

$$\Theta\Delta = EA , \quad (8.3)$$

por serem lados opostos do mesmo paralelogramo. Por definição temos também que

$$EA = 2AZ . \quad (8.4)$$

Então:

$$Q(K\Theta) = R(\Gamma\Theta, 2AZ) . \quad (8.5)$$

Pela Figura 8.4 podemos ver que os triângulos $\Delta\Gamma\Theta$ e ΔTAZ são equiângulos e, portanto, semelhantes.

A Proposição 4 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides afirma que:¹²

Em triângulos equiângulos os lados ao redor dos ângulos iguais são proporcionais, e os lados que subtendem os ângulos iguais são os lados correspondentes [ou homólogos].

Na Figura 8.4 temos dois triângulos retângulos, isósceles e semelhantes, a saber, $\Delta\Gamma\Theta$ e ΔTAZ . Os lados $\Theta\Gamma$ e ZA são paralelos, os lados TA e $\Delta\Gamma$ são colineares, enquanto que são retos os ângulos TZA e $\Theta\Delta\Gamma$. Logo, os lados correspondentes destes dois triângulos são $\Gamma\Theta$ e TA, $\Theta\Gamma$ e ZA, assim como $\Delta\Gamma$ e ZT. De acordo com a Proposição 4 de *Os Elementos* de Euclides podemos então escrever a seguinte proporção:

¹⁰[24, pág. 240].

¹¹Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 8, [23, Volume 2, pág. 211].

¹²Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4: [23, Volume 2, pág. 200].

$$\frac{\Gamma\Theta}{A\Theta} = \frac{TA}{AZ} . \quad (8.6)$$

A partir desta Equação obtemos:

$$(\Gamma\Theta)(AZ) = (TA)(A\Theta) . \quad (8.7)$$

Ou seja:

$$R(\Gamma\Theta, AZ) = R(TA, A\Theta) . \quad (8.8)$$

Ou ainda:

$$R(\Gamma\Theta, 2AZ) = R(2TA, A\Theta) . \quad (8.9)$$

Substituindo essa última expressão na Equação (8.5) obtemos finalmente a equação característica da parábola que é usada por Arquimedes nas suas demonstrações, a saber:

$$Q(K\Theta) = R(2TA, A\Theta) . \quad (8.10)$$

Podemos expressar esta Equação em termos algébricos modernos. Inicialmente chamamos a ordenada de y , a abscissa de x e o parâmetro de p (sendo este parâmetro o segmento de reta característico de uma determinada parábola). Definimos então:

$$y = K\Theta , \quad (8.11)$$

$$x = A\Theta , \quad (8.12)$$

e

$$p = 2TA . \quad (8.13)$$

Com isto a Equação da parábola fica dada por:

$$y^2 = px . \quad (8.14)$$

8.3.2 Elipse e Hipérbole

A dedução da equação característica é a mesma para os dois casos e muito semelhante ao caso anterior. Vamos então detalhar somente a equação da elipse (seção de cone de ângulo agudo), a partir da Figura 8.6. Temos então um cone de ângulo agudo no vértice T. Seja A um ponto ao longo da geratriz TΓ. Ao passar por A um plano perpendicular à geratriz TΓ formamos a elipse na superfície do cone. Seja AB o eixo ou diâmetro desta elipse ortogonal à geratriz TΓ. O eixo do cone corta este diâmetro no ponto Λ.

Neste caso também consideramos um ponto qualquer K sobre a elipse e, portanto, na superfície do cone. Por este ponto K traçamos um plano paralelo à base do cone. Logo o ponto K também estará localizado sobre este círculo paralelo à base que é a interseção do cone com este plano paralelo à base. O diâmetro deste círculo é ΓΔ e o ponto K está na sua circunferência. Nestas condições o triângulo KΔΓ é um triângulo retângulo em K. Tracemos por K uma reta perpendicular ao diâmetro ΓΔ, cruzando este diâmetro no ponto Θ. A reta KΘ, perpendicular a ΓΔ, é a perpendicular traçada a partir do ângulo reto para a hipotenusa.

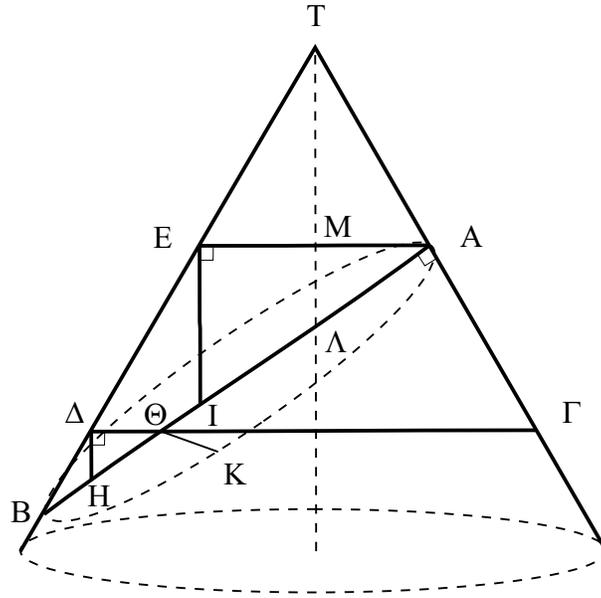


Figura 8.6: Construção de uma elipse de acordo com Menecmo.

Também nestas condições podemos aplicar o Corolário da Proposição 8 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides.¹³ Com isto obtemos então a seguinte igualdade:

$$Q(K\Theta) = R(\Gamma\Theta, \Theta\Delta) . \quad (8.15)$$

Tracemos a partir de Δ uma reta paralela ao eixo do cone, cortando o diâmetro AB no ponto H. Agora observamos na Figura 8.6 que os triângulos $A\Theta\Gamma$ e $H\Theta\Delta$ são equiângulos (semelhantes). Temos então a seguinte proporção:

$$\frac{\Gamma\Theta}{A\Theta} = \frac{H\Theta}{\Delta\Theta} . \quad (8.16)$$

A partir das Equações (8.15) e (8.16) obtemos:

$$Q(K\Theta) = R(A\Theta, H\Theta) . \quad (8.17)$$

Por A passamos um outro plano paralelo à base, cortando o lado $T\Delta$ no ponto E. A partir de E traçamos uma perpendicular ao segmento AE cruzando o diâmetro AB no ponto I. O triângulo AEI também é semelhante aos triângulos $A\Theta\Gamma$ e $H\Theta\Delta$. Portanto, temos as igualdades:

$$\frac{H\Theta}{IA} = \frac{\Delta\Theta}{EA} = \frac{B\Theta}{BA} . \quad (8.18)$$

Na Proposição 16 do Livro V de *Os Elementos* de Euclides se afirma que:¹⁴

Caso quatro magnitudes estejam em proporção, estarão também, alternadamente, em proporção.

A partir destas igualdades obtemos, pelas propriedades das proporções:

¹³Citado na Subseção 8.3.1, página 41 desta tese, ver ainda [23, Volume 2, pág. 211] e [24, pág. 240].

¹⁴Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 16, [24, pág. 221].

$$\frac{H\theta}{B\theta} = \frac{IA}{BA} . \quad (8.19)$$

Consideramos agora o triângulo AEI, cortado pela reta TΛ paralela ao lado EI. Temos então, de acordo com a Proposição 2 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides:¹⁵

Caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporção; e, caso os lados do triângulo sejam cortados em proporção, a reta, sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante do triângulo.

Com isto podemos escrever:

$$\frac{A\Lambda}{AI} = \frac{AM}{AE} = \frac{1}{2} , \quad (8.20)$$

sendo M é o ponto médio do segmento AE. Disto vem que:

$$AI = 2A\Lambda . \quad (8.21)$$

Multiplicando o numerador e o denominador do primeiro membro da Equação (8.19) por Aθ obtém-se:

$$\frac{(A\theta)(H\theta)}{(A\theta)(B\theta)} = \frac{AI}{BA} = \frac{2A\Lambda}{BA} . \quad (8.22)$$

De acordo com a Equação (8.17) obtemos então que:

$$\frac{Q(K\theta)}{R(A\theta, B\theta)} = \frac{2A\Lambda}{BA} , \quad (8.23)$$

onde as grandezas AB e AΛ são características de um determinada curva. Portanto, o segundo membro da Equação acima é uma constante para cada curva.

A Equação (8.23) é usada por Arquimedes para definir as propriedades de uma elipse ou de uma hipérbole, como será visto em vários teoremas de *O Método*.

¹⁵Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 2: [24, pág. 233].

Capítulo 9

A Essência do Método de Arquimedes

9.1 Elementos Principais do Método

Antes de apresentar a tradução de *O Método* de Arquimedes, achamos importante apresentar a essência de sua metodologia. Nos parece que desta maneira seria possível facilitar a compreensão do texto traduzido. O texto original apresenta para o leitor de hoje uma grande complexidade devido à forma descritiva das equações dos matemáticos da antiga Grécia.

Portanto, para contornar as eventuais dificuldades inerentes à leitura do texto original, apresentamos antes dele uma análise dos principais teoremas discutidos por Arquimedes. Nossa ênfase está na demonstração física de cada teorema. Incluímos comentários explicativos contendo as equações escritas em forma moderna. Além disso, enriquecemos o texto incluindo uma representação visual contendo os vários passos da demonstração física de cada teorema.

O método descoberto por Arquimedes e usado neste seu tratado para determinar áreas, volumes e centros de gravidade de figuras geométricas planas e sólidas aparece claramente a partir do primeiro teorema. Ele tem como base os seguintes princípios:

1. Por meio de considerações puramente geométricas determina-se a razão existente entre certas distâncias e certas grandezas pertencentes às figuras. Estas grandezas podem ser os comprimentos de algumas linhas, as áreas de algumas superfícies, ou os volumes de alguns sólidos.
2. Atribui-se um peso às figuras geométricas, supondo-se que ele está distribuído homogeneamente nas figuras. Ou seja, Arquimedes vai considerar que os segmentos lineares, as áreas, e os volumes possuem pesos proporcionais a estes comprimentos, áreas e volumes, respectivamente.
3. Estas grandezas são colocadas em equilíbrio de acordo com a lei da alavanca, Equação (6.1).
4. As figuras planas são consideradas como sendo constituídas por todos os segmentos de linha nelas traçados em uma determinada direção. Analogamente, as figuras sólidas são considerados como sendo constituídas por todas as intersecções nelas determinadas por planos com uma inclinação definida.
5. Pelo equilíbrio da alavanca e por sua lei, Equação (6.1), pode-se determinar uma grandeza desconhecida a partir de outras grandezas conhecidas. Esta grandeza desconhecida pode ser uma área, um volume, ou o centro de gravidade de um objeto.

Os princípios aqui citados são usualmente conhecidos como:¹

- Método do baricentro
- Método dos indivisíveis.

É importante observar que o próprio Arquimedes não considera que este método seja uma demonstração verdadeira. Já no primeiro teorema do *Método* ele deixa claro que a verdadeira demonstração é aquela obtida por via geométrica. Porém, como ele próprio afirma, é mais fácil obter uma demonstração sabendo de antemão qual é o resultado que queremos alcançar. Seu método lhe permitiu descobrir os resultados finais almejados. Em geral ele complementava as demonstrações mecânicas utilizando este método com outras demonstrações puramente geométricas.

A partir da próxima Seção começaremos a ver como Arquimedes utiliza várias alavancas em equilíbrio para obter resultados puramente geométricos. Embora o trabalho desta tese seja essencialmente teórico, achamos importante enfatizar aqui que podem ser construídas balanças reais contendo corpos em equilíbrio sobre ela, satisfazendo às condições estabelecidas por Arquimedes.²

9.2 Demonstração Física do Teorema I: Área de um Segmento Parabólico

Vamos exemplificar a aplicação deste método no primeiro teorema da obra de Arquimedes em que ele obtém a área de um segmento parabólico em termos do triângulo inscrito na parábola. Na Figura 9.1 temos um segmento de parábola $P\Phi\Gamma$ com vértice Φ e diâmetro ΦH . Este diâmetro é o eixo de simetria da parábola. A corda ΓP é a base do segmento, sendo perpendicular a ΦH , com H sendo o ponto médio de $P\Gamma$. Temos ainda uma corda $A\Gamma$ inclinada em relação ao diâmetro. O ponto Δ divide ao meio o segmento $A\Gamma$. A partir do ponto Δ Arquimedes traça um segmento paralelo ao diâmetro ΦH . Seja B o ponto em que esta reta paralela ao diâmetro corta a parábola. Temos então que, por construção, o segmento ΔB é paralelo ao diâmetro ΦH .

No caso particular em que A coincide com P temos que a corda $A\Gamma$ coincidirá com $P\Gamma$ sendo, portanto, perpendicular ao diâmetro ΦH , já que B vai coincidir com Φ enquanto que Δ vai coincidir com H , Figura 9.2 (a). Arquimedes vai considerar o caso geral do segmento parabólico $AB\Gamma$ com corda $A\Gamma$ inclinada em relação ao diâmetro, Figura 9.2 (b). Quando A coincide com P voltamos ao caso simétrico em que B coincide com Φ .

Arquimedes vai mostrar que o segmento parabólico $AB\Gamma$ tem uma área igual a $4/3$ da área do triângulo $AB\Gamma$ inscrito na parábola. Este resultado é válido tanto no caso simétrico em que a corda $A\Gamma$ é perpendicular ao diâmetro, Figura 9.2 (a), quanto no caso geral em que a corda $A\Gamma$ pode estar inclinada em relação ao diâmetro, Figura 9.2 (b).

Ou seja, nos dois casos vale a seguinte relação:

$$\frac{\text{área parabólica } AB\Gamma}{\text{área do triângulo } AB\Gamma} = \frac{4}{3}. \quad (9.1)$$

Na Figura 9.3 apresentamos o caso geral deste primeiro teorema de acordo com as representações de Dijksterhuis³ e Heath.⁴

¹[14, págs. 318-319].

²Ver o trabalho de Seco, [41].

³Ver [11, pág. 317].

⁴Ver [12, pág. 16].

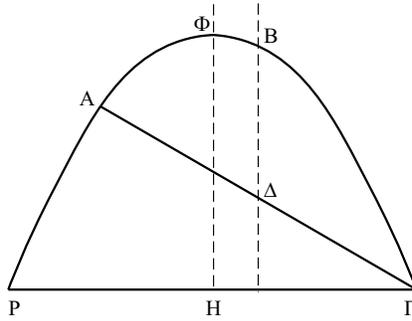


Figura 9.1: Parábola $P\Phi\Gamma$ com vértice Φ , diâmetro ΦH e corda ΓP perpendicular ao diâmetro, sendo dividida ao meio em H . Arquimedes vai considerar o caso geral de um segmento parabólico $AB\Gamma$ com corda AG inclinada em relação ao diâmetro. O ponto Δ divide AG ao meio, enquanto que ΔB é paralela ao diâmetro ΦH .

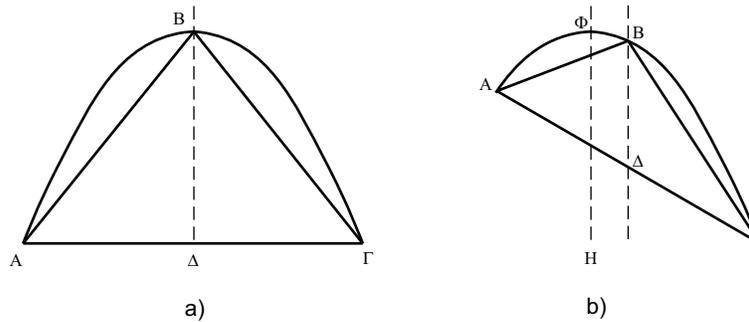


Figura 9.2: (a) Corda AG perpendicular ao diâmetro. (b) Corda AG inclinada em relação ao diâmetro.

Apresentamos agora os passos principais utilizados por Arquimedes para chegar no resultado expresso pela Equação (9.1).

É dada uma parábola $AB\Gamma$ circunscrita ao triângulo $AB\Gamma$. O ponto Δ divide a base AG em duas partes iguais. O segmento de reta $E\Gamma$ é a tangente à parábola no ponto Γ . Os segmentos ZA , $M\Xi$ e $E\Delta$ são paralelos ao diâmetro da parábola, estando $M\Xi$ a uma distância arbitrária de ZA . Além disso, escolhe-se o ponto Θ no prolongamento de ΓB tal que $\Theta\Gamma$ seja dividida ao meio no ponto K que está ao longo de ZA . Arquimedes mostra que os pontos K , N e B dividem ao meio os segmentos ZA , $M\Xi$ e $E\Delta$, respectivamente.

A partir da geometria da Figura 9.3 Arquimedes prova que:⁵

$$\frac{M\Xi}{O\Xi} = \frac{\Theta K}{KN}. \quad (9.2)$$

Arquimedes então considera os segmentos $M\Xi$ e ΞO como tendo pesos proporcionais aos seus comprimentos. Supõe então uma alavanca horizontal colocada ao longo de $\Theta\Gamma$ com seu fulcro no ponto médio K . A partir da lei da alavanca, Equação (6.1), juntamente com a Equação (9.2), vem que ela permanecerá em equilíbrio se o segmento pesado $M\Xi$ permanecer em seu lugar apoiado

⁵Uma demonstração desta Equação encontra-se na Seção A.1 do Apêndice.

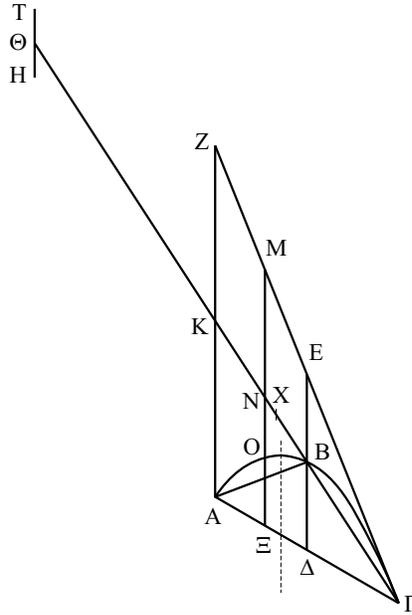


Figura 9.3: Construção geométrica do Teorema I no caso geral. O segmento de reta tracejada é o diâmetro ou eixo de simetria da parábola.

por seu centro N, enquanto que, simultaneamente, o segmento ΞO for deslocado para TH com seu centro colocado em Θ . Esta condição de equilíbrio está representada na Figura 9.4.

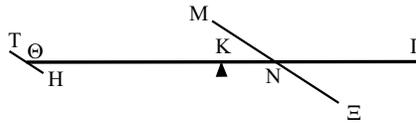


Figura 9.4: Equilíbrio dos segmentos retílineos sobre a alavanca horizontal.

Com isto chegamos à seguinte condição matemática de equilíbrio:

$$\frac{\text{Peso } (M\Xi)}{\text{Peso } (O\Xi)} = \frac{\text{Peso } (M\Xi)}{\text{Peso } (TH)} = \frac{\Theta K}{KN}. \quad (9.3)$$

Arquimedes faz o mesmo procedimento para todas as linhas $M\Xi$ entre A e Γ . Os segmentos $O\Xi$ de A até Γ vão formar o segmento parabólico $AB\Gamma$ apoiado sobre Θ . Os segmentos $M\Xi$ de A até Γ vão formar o triângulo $AZ\Gamma$ distribuído ao longo do segmento $K\Gamma$. Ficamos então com uma alavanca $\Theta\Gamma$ em equilíbrio ao redor do fulcro K com duas figuras sobre ela: o segmento parabólico $AB\Gamma$ com seu centro de gravidade apoiado em Θ , e o triângulo $AZ\Gamma$ distribuído ao longo do segmento $K\Gamma$, como na Figura 9.5.

Pelo sexto postulado de seu trabalho anterior *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, citado na Subseção 6.1.3, página 26 desta tese, vem que esta alavanca ainda continuará em equilíbrio colocando todo o triângulo $AZ\Gamma$ apoiado na alavanca apenas por seu centro de gravidade. Ou seja, em vez

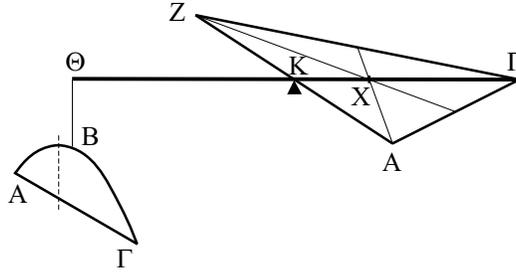


Figura 9.5: Esta alavanca horizontal $\Theta\Gamma$ fica em equilíbrio ao redor do fulcro K com a área parabólica $AB\Gamma$ apoiada sobre Θ , enquanto que o triângulo $AZ\Gamma$ fica distribuído ao longo do segmento $K\Gamma$.

de ficar distribuído ao longo do braço, ele vai ser apoiado apenas por um ponto que coincide com o centro de gravidade do triângulo. Nas Proposições 13 e 14 de *Sobre o Equilíbrio dos Planos* ele também havia provado que:⁶

Em todo triângulo, o centro de gravidade está situado sobre a reta ligando um vértice ao ponto médio do lado oposto.

Em todo triângulo o centro de gravidade é o ponto de encontro das linhas retas ligando os vértices do triângulo aos pontos médios dos lados.

O Lema 5 de *O Método* afirma analogamente que:⁷

O centro de gravidade de todo triângulo é o ponto de interseção das retas traçadas dos ângulos do triângulo aos pontos médios dos lados [opostos].

No caso do triângulo $AZ\Gamma$ da Figura 9.5 temos que ΓK liga o vértice Γ ao ponto médio K do segmento AZ . O centro de gravidade deste triângulo está sobre o ponto X de $K\Gamma$ que divide este segmento tal que

$$\frac{K\Gamma}{KX} = \frac{3}{1}. \quad (9.4)$$

Logo, a alavanca vai continuar em equilíbrio na situação da Figura 9.6.

Pela lei da alavanca, Equação (6.1), juntamente com a proporcionalidade entre os pesos e as áreas, além da Equação (9.4), vem que a situação de equilíbrio representada pela Figura 9.6 pode ser escrita como:

$$\frac{\text{área parabólica } AB\Gamma}{\text{área do triângulo } AZ\Gamma} = \frac{KX}{\Theta K} = \frac{1}{3}. \quad (9.5)$$

A partir das proporcionalidades entre os segmentos da Figura 9.3 é fácil demonstrar que:

$$\text{área do triângulo } AZ\Gamma = 4 \cdot (\text{área do triângulo } AB\Gamma). \quad (9.6)$$

⁶[33, págs. 235 e 238].

⁷Ver ainda *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 14, [33, pág. 238].

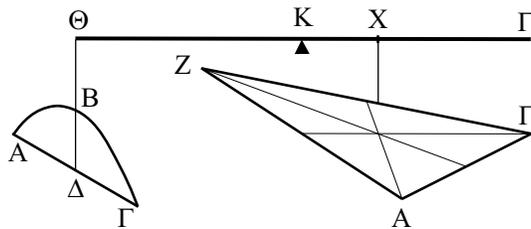


Figura 9.6: A alavanca horizontal fica em equilíbrio ao redor do fulcro K com a área parabólica ABΓ apoiada sobre Θ, enquanto que o triângulo AZΓ fica apoiado sobre X. Temos $KX = K\Gamma/3$.

Utilizando as Equações (9.5) e (9.6) obtém-se finalmente a relação entre a área do segmento parabólico e a área do triângulo inscrito na parábola:

$$\frac{\text{área parabólica } AB\Gamma}{\text{área do triângulo } AB\Gamma} = \frac{4}{3}. \quad (9.7)$$

Este é o resultado obtido pela primeira vez por Arquimedes, a saber, a quadratura da parábola. Ele foi obtido combinando resultados geométricos com a lei da alavanca.

9.2.1 Importância do Teorema I

Apresentamos agora quais são os aspectos mais importantes neste Teorema demonstrado por Arquimedes.

- O próprio Arquimedes menciona na carta endereçada a Eratóstenes que este foi o primeiro teorema geométrico que lhe foi revelado pela mecânica.⁸ Ou seja, não é casual o fato deste teorema aparecer em primeiro lugar em seu trabalho *O Método*. Ele o apresentou na frente dos outros teoremas por ter sido a primeira aplicação do método.
- Já se conhecia há muito tempo a demonstração geométrica apresentada por Arquimedes da quadratura da parábola, a saber, que a área de uma parábola é igual a $4/3$ do triângulo que tem a mesma base e a mesma altura. Esta demonstração geométrica se encontra em seu trabalho *Quadratura da Parábola*, que sempre constou nos manuscritos conhecidos que continham suas obras.⁹ Lá se encontra uma afirmação muito importante de Arquimedes, a saber:

Resolvi comunicar a você [Dositheu], assim como pretendia enviar a Cónon, um certo teorema geométrico que não havia sido investigado anteriormente [por outros cientistas] mas que foi agora investigado por mim, o qual descobri inicialmente por meio da mecânica e então exibi por meio da geometria.

Existem duas coisas muito importantes a serem enfatizadas a partir desta citação. A primeira é que foi o próprio Arquimedes o primeiro a obter a quadratura da parábola. Ou seja, ninguém antes dele havia sequer enunciado este resultado, quanto menos apresentado uma demonstração. A segunda é que o resultado foi inicialmente obtido pela mecânica. Apenas depois que já sabia o resultado é que Arquimedes conseguiu elaborar uma demonstração

⁸Palavras textuais de Arquimedes, como veremos na pág. 106 desta tese: “Portanto, descrevo inicialmente o primeiro [teorema] que me foi revelado pela mecânica.”

⁹[15, Quadrature of the Parabola, págs. 233-252].

geométrica do teorema. Com a descoberta de *O Método* ficamos finalmente sabendo como ele havia chegado a este teorema por meio da mecânica. Em particular, Arquimedes considerou uma alavanca em equilíbrio sob a ação gravitacional terrestre, com uma parábola e um triângulo apoiados sobre os braços da alavanca em distâncias específicas do fulcro, como indicado pela Figura 9.6. Conhecendo o centro de gravidade do triângulo, ou seja, que KX é $1/3$ de ΘK , o equilíbrio desta alavanca permite que se obtenha a área da parábola em termos da área do triângulo, sendo este seu objetivo.

- Com este teorema Arquimedes conseguiu obter a área delimitada por uma curva, a parábola, em termos da área de um certo polígono, o triângulo inscrito na parábola. Os gregos sabiam que a diagonal de um paralelogramo o divide em dois triângulos semelhantes possuindo a metade da área do paralelogramo. Além disso, conseguiram construir geometricamente um quadrado que tinha a mesma área de um dado paralelogramo. Como todo polígono pode ser decomposto em triângulos, isto significa que conseguiam obter geometricamente um quadrado que tinha a mesma área que qualquer polígono dado. Com este teorema Arquimedes conseguiu então obter a quadratura da parábola, ou seja, construir geometricamente um quadrado que tivesse a mesma área que um dado segmento de parábola.

Este é um resultado extremamente importante, já que é um dos primeiros exemplos na geometria em que se consegue obter a área de uma figura curva em termos da área de um certo quadrado.

Anteriormente o próprio Arquimedes havia demonstrado em a *Medida do Círculo* a equivalência entre um círculo e um triângulo:¹⁰

Todo círculo é equivalente a um triângulo retângulo, no qual um dos lados do ângulo reto é igual ao raio e a base [isto é, o outro lado do triângulo] é igual ao perímetro [do círculo, ou seja, é igual à circunferência].

Isto está ilustrado na Figura 9.7.

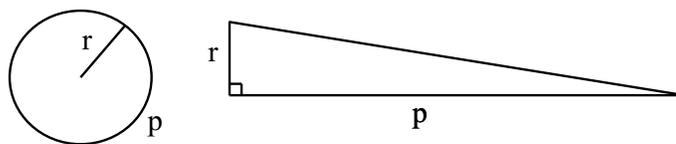


Figura 9.7: Arquimedes provou que este círculo e este triângulo retângulo possuem a mesma área.

Seja A_T a área do triângulo retângulo e A_C a área do círculo de raio r e perímetro p . Vamos chamar de π à razão entre o perímetro do círculo e seu diâmetro de valor $2r$:

$$\frac{p}{2r} = \pi, \quad (9.8)$$

ou,

$$p = 2\pi r. \quad (9.9)$$

¹⁰Ver *Medida do Círculo*, Proposição 1, [17, pág. 138].

O resultado expresso em palavras por Arquimedes em a *Medida do Círculo* é apresentado hoje em dia pela seguinte fórmula:

$$A_C = A_T = \frac{p \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2 . \quad (9.10)$$

9.3 Demonstração Física do Teorema II: Volume da Esfera

Vamos agora ver a essência do método aplicada ao cálculo do volume de uma esfera. No segundo teorema de *O Método* Arquimedes prova o seguinte resultado:

Toda esfera é o quádruplo do cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e uma altura igual ao raio da esfera.

Para chegar neste resultado ele considera a Figura 9.8 (a).

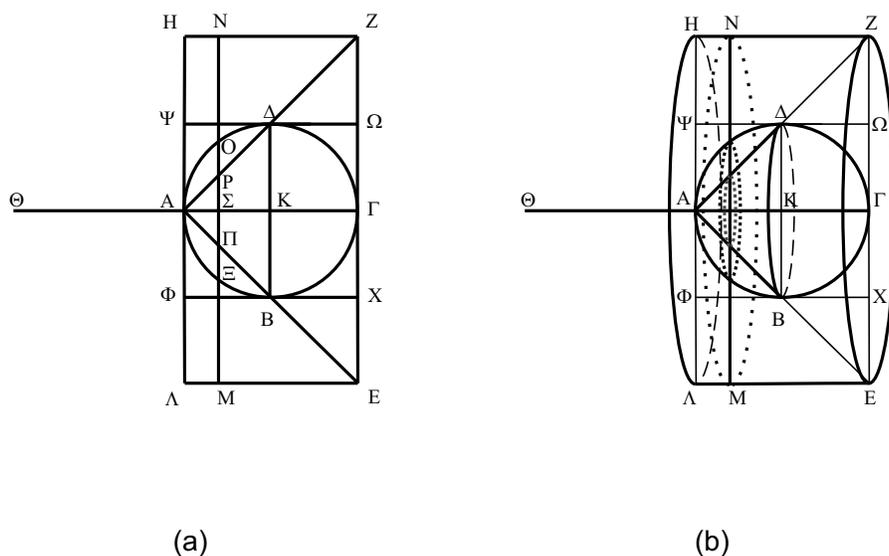


Figura 9.8: (a) Visão lateral. (b) Visão em perspectiva. Esfera $A\Delta\Gamma B$, cone AZE , cilindro $\Phi\Psi\Omega X$ e cilindro ΛHZE .

Na Figura 9.8 (a) temos uma visão lateral de quatro corpos volumétricos, a saber, a esfera $A\Delta\Gamma B$, o cone AZE tendo como base o círculo de diâmetro EZ , o cilindro $\Phi\Psi\Omega X$ circunscrito à esfera e tendo como bases os círculos de diâmetros $\Phi\Psi$ e ΩX , e o cilindro ΛHZE tendo como bases os círculos de diâmetros ΛH e ZE . Estes corpos são vistos em perspectiva na Figura 9.8 (b), não apresentada por Arquimedes. O centro da esfera é K , sendo seus diâmetros ortogonais $A\Gamma$ e $B\Delta$. Escolhe-se um ponto Θ ao longo do prolongamento de ΓA tal que $\Theta A = A\Gamma$. O círculo de diâmetro MN é paralelo às bases circulares dos cilindros, cortando a esfera em um círculo de diâmetro $O\Xi$ e o cone em um círculo de diâmetro $P\Pi$, todos com centros em Σ .

A partir da geometria da Figura 9.8 Arquimedes prova que:¹¹

$$\frac{MN \cdot MN}{O\Xi \cdot O\Xi + P\Pi \cdot P\Pi} = \frac{\Theta A}{A\Sigma} . \quad (9.11)$$

¹¹Uma dedução desta Equação encontra-se na Seção A.2 do Apêndice.

A Proposição 2 do Livro XII de *Os Elementos* de Euclides afirma que:¹²

Os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros.

Portanto, a Equação (9.11) pode ser colocada na seguinte forma:

$$\frac{\Theta A}{A\Sigma} = \frac{\text{Círculo de diâmetro } MN}{(\text{Círculo de diâmetro } \Xi O) + (\text{Círculo de diâmetro } \Pi P)}. \quad (9.12)$$

Arquimedes então considera os círculos de diâmetros MN, OΞ e ΠΙ como tendo pesos proporcionais às suas áreas. Supõe então uma alavanca horizontal colocada ao longo de ΘΓ com seu fulcro no ponto médio A. Utilizando a lei da alavanca, Equação (6.1), vem que ela permanecerá em equilíbrio se a superfície circular pesada MN permanecer em seu lugar apoiada por seu centro Σ, enquanto que, simultaneamente, as áreas circulares pesadas OΞ e ΠΙ forem deslocadas para a extremidade da alavanca, com seus centros apoiados em Θ. Esta condição de equilíbrio está representada na Figura 9.9.

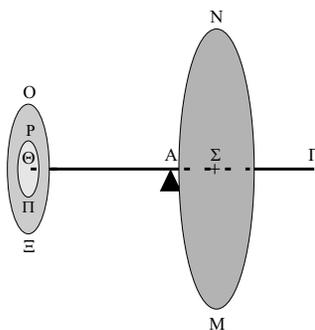


Figura 9.9: A alavanca horizontal ΘΓ fica em equilíbrio ao redor do fulcro A quando o círculo NM está apoiado sobre Σ enquanto que os círculos OΞ e ΠΙ estão apoiados sobre Θ.

Na Figura 9.10 representamos a mesma situação de equilíbrio da Figura 9.9 mas agora com os três círculos vistos de lado e dependurados por fios de peso desprezível. Nesta situação a alavanca permanece em equilíbrio.

A relação matemática indicada nas Figuras 9.9 e 9.10 pode ser expressa pela Equação (9.12).

Arquimedes faz o mesmo procedimento para todos os círculos MN entre ΛΗ e ΖΕ. Os círculos OΞ de ΛΗ até ΖΕ vão formar a esfera ΑΔΓΒ apoiada sobre Θ. Os círculos ΠΙ de ΛΗ até ΖΕ vão formar o cone ΑΖΕ apoiado sobre Θ. Já os círculos MN de ΛΗ até ΖΕ vão formar o cilindro ΛΗΖΕ com seu eixo apoiado ao longo segmento ΑΓ. Ficamos então com uma alavanca ΘΓ em equilíbrio ao redor do fulcro Α com três figuras sobre ela, como representado na Figura 9.11.

Pelo sexto postulado de seu trabalho anterior *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, citado na Subseção 6.1.3, página 26 desta tese, vem que esta alavanca ainda permanecerá em equilíbrio ao redor do fulcro Α colocando todo o cilindro ΛΗΖΕ apoiado apenas por seu centro de gravidade.

No oitavo lema de *O Método* Arquimedes afirma que:

O centro de gravidade de todo cilindro é o ponto que divide o eixo em duas partes iguais.

¹²[24, pág. 528].

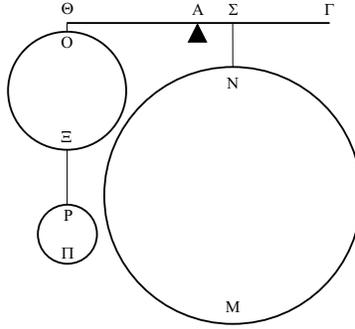


Figura 9.10: A alavanca horizontal $\Theta\Gamma$ fica em equilíbrio ao redor do fulcro A quando o círculo NM está apoiado sobre Σ enquanto que os círculos O Ξ e P Π estão apoiados sobre Θ .

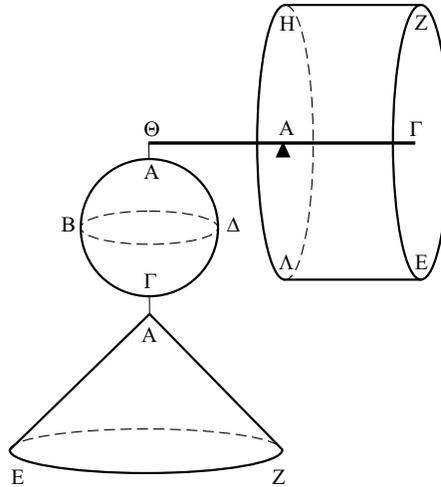


Figura 9.11: Esta alavanca $\Theta\Gamma$ fica em equilíbrio ao redor do fulcro A com a esfera A $\Delta\Gamma$ B e o cone AZE apoiados sobre Θ , enquanto que o cilindro ΛHZE fica com seu eixo apoiado ao longo do segmento A Γ .

O ponto K divide o segmento A Γ ao meio, sendo este segmento o eixo do cilindro ΛHZE . Portanto, este cilindro pode ser apoiado apenas pelo ponto K que ainda assim a alavanca permanecerá em equilíbrio ao redor do fulcro A, Figura 9.12.

Pela lei da alavanca, Equação (6.1), juntamente com a proporcionalidade entre os pesos e os volumes, vem que a situação de equilíbrio representada pela Figura 9.12 pode ser escrita como:

$$\frac{\text{cilindro}_{\Lambda HZE}}{\text{esfera}_{A\Delta\Gamma B} + \text{cone}_{AZE}} = \frac{\Theta A}{AK} = \frac{2}{1}. \quad (9.13)$$

A Proposição 10 do Livro XII de *Os Elementos* de Euclides afirma que:¹³

Todo cone é uma terça parte do cilindro que tem a mesma base que ele e altura igual.

¹³[24, pág. 543].

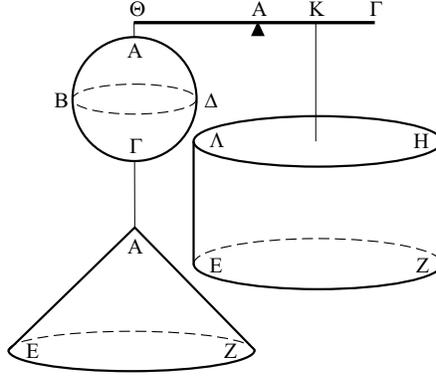


Figura 9.12: A alavanca contínua em equilíbrio ao redor de A com a esfera e o cone apoiados sobre Θ , enquanto que o cilindro fica apoiado apenas sobre seu centro de gravidade K.

Ou seja, todo cilindro é equivalente ao triplo do cone inscrito no cilindro:

$$\text{cilindro}_{\Lambda H Z E} = 3 \cdot (\text{cone}_{A Z E}) . \quad (9.14)$$

Combinando as Equações (9.13) e (9.14) obtém-se:

$$2 \cdot \text{esfera}_{A \Delta \Gamma B} = \text{cone}_{A Z E} . \quad (9.15)$$

Como o cone AZE tem o dobro da altura do cone AΔB e sua base tem o dobro do diâmetro da base do cone AΔB vem que:

$$\text{cone}_{A Z E} = 8 \cdot \text{cone}_{A B \Delta} . \quad (9.16)$$

Combinando as Equações (9.15) e (9.16) obtém-se finalmente o resultado anunciado por Arquimedes, a saber:

$$\text{esfera}_{A \Delta \Gamma B} = 4 \cdot \text{cone}_{A B \Delta} . \quad (9.17)$$

É desta forma que ele provou a primeira parte do segundo teorema de *O Método*. Ou seja, novamente por resultados puramente geométricos combinados com a lei da alavanca.

Arquimedes prossegue então para a segunda parte deste teorema utilizando a seguinte relação geométrica, ver a Figura 9.8:

$$\text{cone}_{A B \Delta} = \frac{1}{3} \text{cilindro}_{\Phi \Psi \Delta B} = \frac{1}{6} \text{cilindro}_{\Phi \Psi \Omega X} . \quad (9.18)$$

Combinando as Equações (9.17) e (9.18) obtém-se:

$$\text{cilindro}_{\Phi \Psi \Omega X} = \frac{3}{2} \text{esfera}_{A \Delta \Gamma B} . \quad (9.19)$$

Ou seja:

O cilindro que tem uma base igual ao círculo máximo de uma esfera e uma altura igual ao diâmetro da esfera é equivalente a três meios da esfera.

9.3.1 Importância do Teorema II

Ressaltamos aqui os pontos mais relevantes deste segundo Teorema.

- O aspecto mais importante deste Teorema é que Arquimedes conseguiu obter pela primeira vez na história o volume de uma esfera. Seja V_E o volume de uma esfera de raio r . Este volume é expresso hoje em dia pela seguinte fórmula:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3 . \quad (9.20)$$

Para ver como este resultado é equivalente àquele apresentado por Arquimedes, começamos apresentando com suas palavras a segunda parte do teorema:

O cilindro que tem uma base igual ao círculo máximo de uma esfera e uma altura igual ao diâmetro da esfera é equivalente a três meios da esfera.

Uma representação da esfera inscrita neste cilindro encontra-se na Figura 9.13.

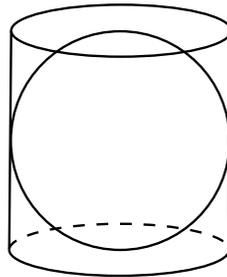


Figura 9.13: Esfera inscrita em um cilindro que tem uma base igual ao círculo máximo da esfera e uma altura igual ao diâmetro da esfera.

Vamos agora ver como o resultado obtido pela primeira vez por Arquimedes é equivalente à fórmula moderna. Chamando o volume do cilindro circunscrito à esfera de V_C e o volume da esfera de V_E , o teorema de Arquimedes pode ser expresso matematicamente da seguinte maneira:

$$V_C = \frac{3}{2}V_E . \quad (9.21)$$

O volume do cilindro é dado pela sua altura multiplicada por sua base. Sua altura é o diâmetro da esfera de raio r , ou seja, $2r$. Sua base é o círculo máximo da esfera. Pela Equação (9.10) vem que Arquimedes conhecia esta área, que é expressa hoje em dia por πr^2 . A partir da Equação (9.21) vem então que o volume da esfera é dado por:

$$V_E = \frac{2}{3}V_C = \frac{2}{3}2r \cdot (\pi r^2) = \frac{4}{3}\pi r^3 . \quad (9.22)$$

Este resultado é a conhecida fórmula dada pela Equação (9.20).

- Poucos estudantes sabem hoje em dia que o volume da esfera foi obtido pela primeira vez por Arquimedes (como visto no item anterior, embora a fórmula dada pela Equação (9.20) seja moderna, ela é equivalente ao resultado expresso em palavras por Arquimedes). Apesar disto, os especialistas em Arquimedes sabiam que este resultado era devido a ele, já que se conhecia seu trabalho *Sobre a Esfera e o Cilindro* no qual apresentou uma demonstração geométrica deste teorema.¹⁴ Mas foi apenas com a descoberta de *O Método* que se tornou conhecido como ele obteve este resultado pela primeira vez, ou seja, utilizando proporções entre áreas e supondo uma alavanca em equilíbrio sob a ação gravitacional terrestre. Utilizando este método concluiu que a alavanca da Figura 9.12 fica em equilíbrio com AK sendo a metade de ΘA . Desde Demócrito já se sabia que o volume de um cone vale um terço do volume do cilindro de mesma base e mesma altura, sendo isto demonstrado pela primeira vez por Eudoxo. Em *Os Elementos* de Euclides encontra-se uma demonstração deste teorema. Combinando este resultado com a lei da alavanca e a situação de equilíbrio representada pela Figura 9.12, Arquimedes conseguiu então relacionar o volume da esfera com o volume do cone inscrito na esfera (primeira parte deste segundo Teorema), ou então relaciona o volume da esfera com o volume do cilindro circunscrito na esfera (segunda parte deste segundo Teorema).

Depois que chegou ao volume da esfera por meio da mecânica, conseguiu obter também uma demonstração geométrica.

- Também poucos estudantes sabem hoje em dia que a área de uma esfera foi obtida pela primeira vez por Arquimedes. Seja A_E a área de uma esfera de raio r . A fórmula moderna que representa esta área é dada por:

$$A_E = 4\pi r^2 . \quad (9.23)$$

Embora não utilizasse fórmulas e não falasse do número π , Arquimedes demonstrou o seguinte teorema:¹⁵

A superfície de qualquer esfera é igual a quatro vezes o círculo máximo da esfera.

A área do círculo máximo da esfera de raio r é igual à área de um círculo de raio r . A área de um círculo era conhecida de Arquimedes, sendo expressa hoje em dia pela Equação (9.10). Combinando esta Equação com a Proposição 33 de *Sobre a Esfera e o Cilindro* que acabamos de citar, vem que o teorema expresso em palavras por Arquimedes pode ser colocado algebricamente na seguinte fórmula bem conhecida:

$$A_E = 4A_C = 4\pi r^2 . \quad (9.24)$$

Acontece que em sua obra *Sobre a Esfera e o Cilindro* este resultado aparece como o Teorema 33, sendo que o volume da esfera aparece como o Teorema 34. Logo todos pensavam que inicialmente Arquimedes havia calculado a área da esfera, para só então deduzir seu volume. Foi apenas com a descoberta de *O Método* que se ficou sabendo que Arquimedes inicialmente obteve o volume da esfera utilizando a lei da alavanca. Após isto é que foi levado à conclusão de que a área da esfera era o quádruplo de seu círculo máximo.

¹⁴[15, Proposição 34, págs. 41-44].

¹⁵[15, Proposição 33, págs. 39-41].

Apresentamos aqui o trecho importante de *O Método* contendo esta revelação:¹⁶

Demonstrado isto, [a saber,] que toda esfera é o quádruplo do cone que tem como base o círculo máximo e como altura o raio da esfera, surgiu a ideia de que a superfície de toda esfera fosse o quádruplo de seu círculo máximo. Com efeito, supus que, posto que todo círculo é equivalente a um triângulo tendo por base a circunferência do círculo e por altura o raio do círculo, toda esfera também é equivalente a um cone tendo como base a superfície e como altura o raio da esfera.

- Arquimedes dava tanta importância às conclusões deste teorema relacionando o volume da esfera com o volume do cilindro circunscrito a ela que pediu que fosse colocada no seu túmulo a figura de uma esfera e de um cilindro. Sabemos que seu desejo foi realizado devido ao relato de Cícero.

O grande escritor romano Marcus Tullius Cícero foi governador da província da Sicília no ano de 75 a.C. Homem de letras e com profunda admiração pela cultura grega, tomou conhecimento da existência do local onde Arquimedes tinha sido sepultado 137 anos antes. Após sair em sua procura com algumas pessoas auxiliando-o, descobriu o túmulo de Arquimedes. Nele encontrou a figura que o próprio Arquimedes desejou fosse colocada em seu túmulo, a saber, uma esfera inscrita em um cilindro. Uma representação moderna destes objetos encontra-se na Figura 9.14. Cícero relata estes fatos em seus numerosos escritos que nos chegaram praticamente intactos.¹⁷



Figura 9.14: Esfera inscrita em um cilindro.

Podemos inferir que a descoberta da razão entre os volumes da esfera e do cilindro circunscrito a ela foi considerada por Arquimedes como sendo seu maior feito, motivo pelo qual desejou preservar esta grande descoberta em seu túmulo. É fascinante perceber em *O Método* que esta razão puramente geométrica foi obtida originalmente pela mecânica utilizando uma alavanca em equilíbrio.

¹⁶ver a pág. 112 desta tese.

¹⁷Cícero, *Tusculanae Disputationes*, [42, V, 23]: “ ... procurei o túmulo... encontrei uma pequena coluna aparecendo sobre os arbustos, na qual estava a figura de uma esfera e de um cilindro.”

9.4 Demonstração Física do Teorema III: Volume do Elipsoide de Revolução

No terceiro teorema de *O Método* Arquimedes prova o seguinte:¹⁸

O cilindro que tem a base igual ao círculo máximo de um elipsoide de revolução¹⁹ e a altura igual ao eixo do elipsoide, é equivalente a uma vez e meia o elipsoide; e de todo elipsoide cortado por um plano pelo centro e perpendicular ao eixo, a metade do elipsoide é o dobro do cone que tem a mesma base do segmento do elipsoide e o mesmo eixo.

Na Figura 9.15 temos a construção de Arquimedes para este teorema.

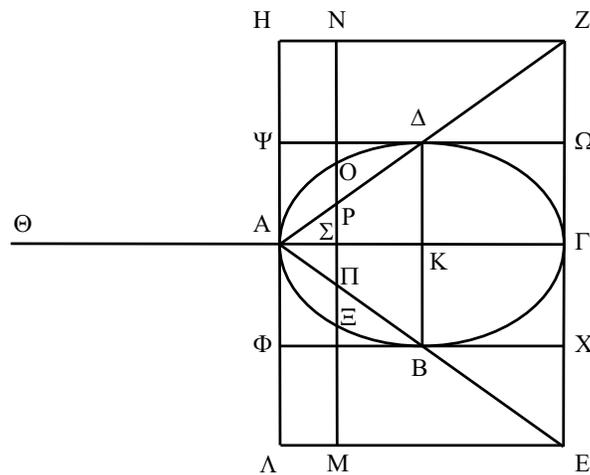


Figura 9.15: Construção geométrica do teorema III.

A elipse $AB\Gamma\Delta$ representa a interseção de um elipsoide de revolução por um plano passando pelo eixo $A\Gamma$, sendo $A\Gamma$ e $B\Delta$ os dois eixos da elipse. Seja o círculo de diâmetro $B\Delta$ perpendicular ao eixo $A\Gamma$ e seja construído o cone que tem por base este círculo e como vértice o ponto A .

Seja prolongada a superfície lateral deste cone até encontrar um plano passando por Γ e paralelo à sua base. A interseção será um círculo perpendicular a $A\Gamma$ de diâmetro EZ . Sobre o círculo de diâmetro EZ seja construído um cilindro de eixo $A\Gamma$. Seja prolongada a reta $A\Gamma$ até o ponto Θ de modo que $A\Theta$ seja igual a $A\Gamma$ e seja considerado $\Theta\Gamma$ como o travessão de uma alavanca da qual A é o ponto médio, que será considerado como fulcro.

No paralelogramo $HZEA$ seja traçada a reta MN paralela a EZ e cortando o segmento $A\Gamma$ no ponto Σ . Arquimedes considera esta distância $A\Sigma$ arbitrária, sendo que esta distância vai variar ao longo da demonstração do teorema desde $A\Sigma = 0$ até $A\Sigma = A\Gamma$. Seja levantado por MN um plano perpendicular a $A\Gamma$. Este plano cortará o cilindro segundo um círculo de diâmetro MN , o elipsoide segundo um círculo de diâmetro $O\Xi$ e o cone segundo um círculo de diâmetro $\Pi\Pi$.

A partir da geometria da Figura 9.15, Arquimedes obtém a seguinte relação matemática:²⁰

¹⁸Ver *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposição 27, [17, pág. 226].

¹⁹Arquimedes usa o termo *esferoide* para designar o que chamamos hoje de elipsoide de revolução.

²⁰A demonstração desta Equação encontra-se na Seção A.3 do Apêndice.

$$\frac{\Theta A}{A\Sigma} = \frac{Q(M\Sigma)}{Q(\Xi\Sigma) + Q(\Pi\Sigma)} . \quad (9.25)$$

Esta é a relação matemática básica que vai ser utilizada por Arquimedes, juntamente com a lei da alavanca, para demonstrar o terceiro teorema de *O Método*.

Apresentamos agora a demonstração física deste teorema.

Como nos teoremas anteriores, Arquimedes observa que uma proporção entre os quadrados de segmentos é a mesma proporção que existe entre as áreas ou os pesos dos círculos homogêneos cujos diâmetros são estes mesmos segmentos. Portanto, utilizando a Figura 9.15 vem que a Equação (9.25) pode ser escrita como:

$$\frac{\Theta A}{A\Sigma} = \frac{\text{círculo de diâmetro } MN}{(\text{círculo de diâmetro } \Xi O) + (\text{círculo de diâmetro } \Pi P)} . \quad (9.26)$$

Sempre considerando os círculos como objetos homogêneos com peso distribuído uniformemente, a Equação (9.26) representa a lei da alavanca, considerando o ponto A como fulcro. Ou seja, esta alavanca fica em equilíbrio com os círculos de diâmetro OΞ e ΠP colocados no ponto Θ e com seus centros de gravidade em Θ, juntamente com o círculo de diâmetro MN permanecendo no seu lugar. Isto está representado na Figura 9.16 com os círculos dependurados por cordas cujas projeções passam por seus centros de gravidade.

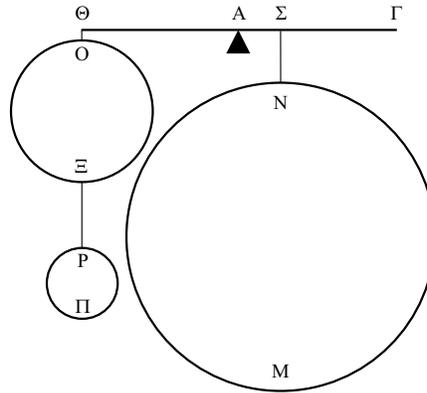


Figura 9.16: Representação do equilíbrio das seções circulares sobre uma alavanca com fulcro em A.

O mesmo ocorre com qualquer reta MN traçada entre A e Γ e o plano correspondente paralelo a EZ. Ou seja, todos os círculos assim determinados estarão em equilíbrio em relação ao ponto A, com todos aqueles de diâmetro MN permanecendo em seus lugares, enquanto que todos aqueles de diâmetro OΞ e ΠP são transportados com seus centros de gravidade atuando sobre Θ.

Mas o elipsoide, o cone e o cilindro são constituídos por todos os círculos a eles correspondentes. Portanto, eles também estarão em equilíbrio em relação ao ponto A, o cilindro permanecendo no seu lugar, mas o cone e o elipsoide sendo transportados para o ponto Θ e com seus centros de gravidade em Θ, como mostrado na Figura 9.17.

Pelo Lema 8 de *O Método*,²¹ o ponto K é o centro de gravidade do cilindro, enquanto que Θ é o centro de gravidade comum do elipsoide e do cone. Pelo Postulado 6 de *Sobre o Equilíbrio*

²¹Citado na Seção 9.3, página 53 desta tese.

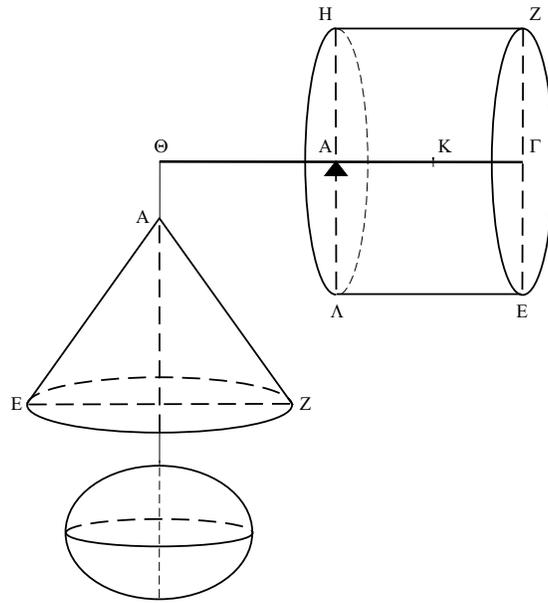


Figura 9.17: Representação do equilíbrio dos sólidos na alavanca.

*dos Planos*²² vem então que a alavanca vai continuar em equilíbrio quando o cilindro atua sobre ela apenas por seu centro de gravidade passando por K, como está representado na Figura 9.18.

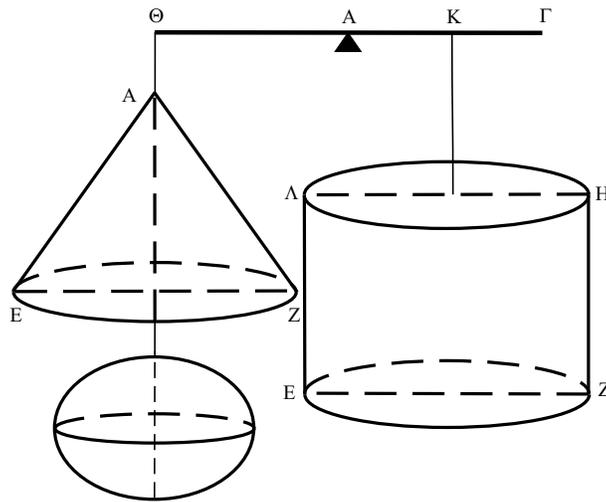


Figura 9.18: O equilíbrio com os corpos atuando sobre a alavanca através de seus centros de gravidade.

O equilíbrio representado pela Figura 9.18 pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{\Theta A}{AK} = \frac{\text{cilindro}}{\text{elipsoide} + \text{cone } AEZ} . \quad (9.27)$$

Mas:

²²Citado na Subseção 6.1.3, página 26 desta tese, ver ainda [33, págs. 215 a 220 e 226].

$$\Theta A = 2AK . \quad (9.28)$$

Isto significa que temos também o seguinte resultado:

$$cilindro = 2(elipsoides) + 2(cones AEZ) . \quad (9.29)$$

Vamos apresentar agora as Proposições 10 a 14 do Livro XII de *Os Elementos* de Euclides, já que serão utilizadas ao longo deste trabalho:²³

Proposição 10: Todo cone é uma terça parte do cilindro que tem a mesma base que ele e altura igual.

Proposição 11: Os cones e cilindros que estão sob a mesma altura estão entre si como as bases.

Proposição 12: Os cones e cilindros semelhantes estão entre si em uma razão tripla da [razão] dos diâmetros das bases.

Proposição 13: Caso um cilindro seja cortado por um plano que é paralelo aos planos opostos, como o cilindro estará para o cilindro, assim o eixo para o eixo.

Proposição 14: Os cones e cilindros que estão sobre bases iguais estão entre si como as alturas.

Ou seja, pela Proposição 10:

$$cilindro = 3(cones AEZ) . \quad (9.30)$$

Com isso temos que:

$$3(cones AEZ) = 2(elipsoides) + 2(cones AEZ) . \quad (9.31)$$

Eliminando os dois cones em comum (esta é a maneira de expressão do próprio Arquimedes) vem:

$$cone AEZ = 2(elipsoides) . \quad (9.32)$$

Pela Proposição 12 do Livro XII de *Os Elementos* de Euclides:

$$cone AEZ = 8(cones AB\Delta) , \quad (9.33)$$

já que o diâmetro EZ é o dobro do diâmetro B\Delta.

Com isto ficamos então com:

$$elipsoide = 4(cones AB\Delta) . \quad (9.34)$$

Então como o elipsoide é o quádruplo do cone AB\Delta, temos demonstrado a segunda parte do teorema. Ou seja, a metade do elipsoide é o dobro do cone AB\Delta.

Vamos agora concluir a demonstração do teorema. Traçamos agora pelos pontos B e \Delta as retas \Phi X e \Psi \Omega paralelas a A\Gamma e consideramos o cilindro que tem como bases os círculos de diâmetro \Phi\Psi e X\Omega.

²³[24, págs. 543-553].

Pela Proposição 13 do Livro XII de *Os Elementos* de Euclides temos que o cilindro $\Phi\Psi\Omega X$ é o dobro do cilindro $\Phi\Psi\Delta B$, pois as bases são iguais e o eixo de um é o dobro do eixo do outro. Com isso:

$$\text{cilindro } \Phi\Psi\Omega X = 2(\text{cilindros } \Phi\Psi\Delta B) . \quad (9.35)$$

Temos também que:

$$\text{cilindro } \Phi\Psi\Omega X = 6(\text{cones } AB\Delta) . \quad (9.36)$$

Combinando a Equação (9.36) com a Equação (9.34) vem que:

$$\text{cilindro } \Phi\Psi\Omega X = \frac{3}{2}(\text{elipsoide}) . \quad (9.37)$$

Esta Equação é a representação matemática da primeira parte deste teorema, expressa pelas seguintes palavras por Arquimedes:

O cilindro que tem a base igual ao círculo máximo de um elipsoide de revolução e a altura igual ao eixo do elipsoide, é equivalente a uma vez e meia o elipsoide.

E isto conclui a demonstração física deste teorema.

9.4.1 Importância do Teorema III

Este teorema já era conhecido pelos especialistas em Arquimedes por aparecer em sua obra *Sobre Conoides e Esferoides*.²⁴ Nesta obra bem conhecida este teorema é demonstrado de forma puramente geométrica. Foi apenas com a descoberta de *O Método* que ficou evidente que este resultado foi obtido originalmente pela mecânica. Já era conhecida na época de Arquimedes a relação entre o volume do cone e do cilindro circunscrito a ele. Arquimedes obteve então, a partir do equilíbrio representado pela Figura 9.18, juntamente com a lei da alavanca, além do fato de que AK é a metade de ΘA , uma relação entre o volume do elipsoide e do cone inscrito nele. Analogamente obteve uma relação entre o volume do elipsoide e o volume do cilindro circunscrito a ele.

9.5 Demonstração Física do Teorema IV: Volume de um Segmento de Parabolóide de Revolução

Enunciado do teorema:²⁵

Todo segmento de parabolóide cortado por um plano perpendicular ao eixo é uma vez e meia o cone que tem a mesma base e o mesmo eixo que o segmento.

A Figura 9.19 (a) foi utilizada por Arquimedes na demonstração deste teorema. Na Figura 9.19 (b) temos os mesmos corpos vistos em perspectiva.

Nesta Figura a parábola $B\Gamma$ representa a interseção de um segmento de parabolóide de revolução pelo plano do papel. O eixo do segmento de parabolóide e da parábola é $A\Delta$.

²⁴Ver *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposição 27, [17, pág. 226].

²⁵Ver a demonstração geométrica deste teorema em *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposição 21, [17, pág. 202].

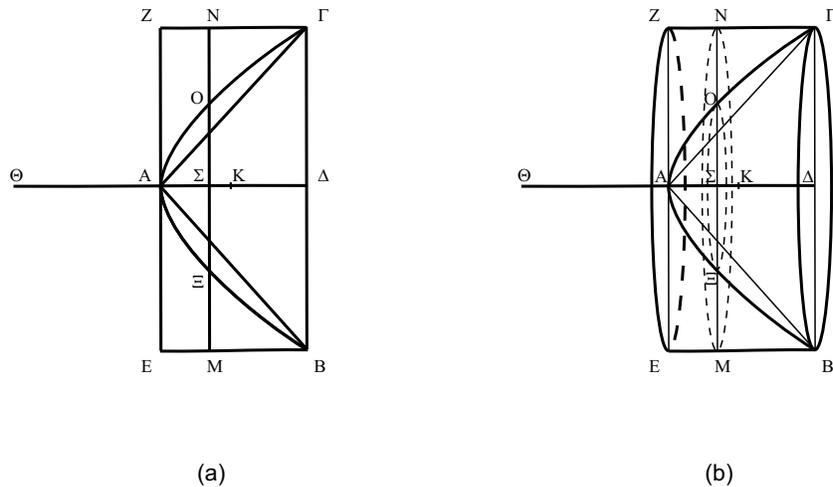


Figura 9.19: (a) Construção geométrica do teorema IV, vista lateral. (b) Vista em perspectiva.

Seja prolongado $A\Delta$ até o ponto Θ , de modo que:

$$A\Theta = A\Delta . \quad (9.38)$$

Considere-se $\Theta\Delta$ como o travessão de uma alavanca do qual A é o ponto médio, que será considerado como fulcro. A base do segmento de parabolóide é o círculo de diâmetro $B\Gamma$. Seja traçado em um plano perpendicular ao segmento $A\Delta$, um círculo com centro A e diâmetro EZ . Este círculo é igual e paralelo ao círculo de diâmetro $B\Gamma$. Seja construído também o cilindro que tenha por bases esses dois círculos e por eixo $A\Delta$. Além disso, consideremos o cone cuja base é o círculo de diâmetro $B\Gamma$ e cujo vértice é o ponto A .

Seja traçada no paralelogramo $ZEB\Gamma$ uma reta qualquer MN paralela a $B\Gamma$ e cruzando o segmento $A\Delta$ no ponto Σ . A distância $A\Sigma$ será considerada arbitrária por Arquimedes, sendo que na demonstração do teorema irá de $A\Sigma = 0$ até $A\Sigma = A\Delta$. Seja levantado um plano perpendicular ao eixo $A\Delta$ passando por $M\Sigma N$. Este plano cortará o cilindro segundo um círculo de diâmetro MN e cortará o segmento de parabolóide segundo um círculo de diâmetro ΞO .

A partir da geometria da Figura 9.19, Arquimedes demonstra a seguinte relação matemática:²⁶

$$\frac{A\Theta}{A\Sigma} = \frac{Q(M\Sigma)}{Q(\Xi\Sigma)} . \quad (9.39)$$

Já vimos nos teoremas anteriores que a razão entre os quadrados de dois segmentos pode ser substituída pela razão entre os círculos cujos diâmetros (ou raios, como neste caso) são esse mesmos segmentos. Logo:

$$\frac{A\Theta}{A\Sigma} = \frac{\text{círculo de diâmetro } MN}{\text{círculo de diâmetro } \Xi O} . \quad (9.40)$$

Esta é a relação matemática básica que é utilizada por Arquimedes, juntamente com a lei da alavanca, para demonstrar o presente teorema.

Apresentamos agora a dedução física deste teorema.

Aqui também, como nos casos anteriores, Arquimedes considera os círculos como objetos homogêneos com seus pesos distribuídos uniformemente nas figuras. A Equação (9.40) representa a lei da alavanca em relação ao ponto A como fulcro. Ou seja, esta alavanca fica em equilíbrio

²⁶A dedução desta Equação encontra-se na Seção A.4 do Apêndice.

com o círculo de diâmetro $OΞ$ colocado no ponto $Θ$ e o círculo de diâmetro MN permanecendo no seu lugar, como representamos na Figura 9.20.

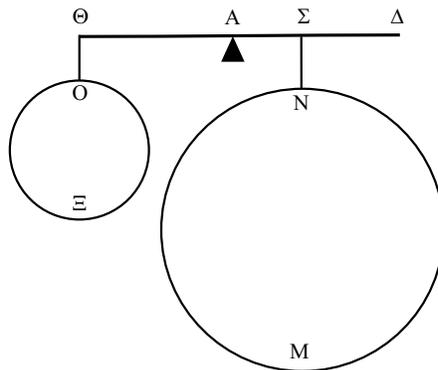


Figura 9.20: Equilíbrio dos círculos sobre a alavanca.

O mesmo raciocínio aplica-se a qualquer outra reta paralela a MN dentro do paralelogramo $ZEBΓ$. O cilindro $ZEBΓ$ é constituído por todos os círculos de diâmetro MN que vão de $AΣ = 0$ até $AΣ = AΔ$. Já o parabolóide $BAΓ$ é constituído por todos os círculos de diâmetro $OΞ$ que vão de $AΣ = 0$ até $AΣ = AΔ$. A situação de equilíbrio da Figura 9.20 vale para todos estes círculos. Ao considerar todos estes círculos em conjunto, chegaremos em uma situação de equilíbrio de uma alavanca ao redor de seu fulcro localizado no ponto A na qual o parabolóide $BAΓ$ está atuando sobre o ponto $Θ$, enquanto que o cilindro $ZEBΓ$ permanece em seu lugar. Esta configuração de equilíbrio está representada na Figura 9.21.

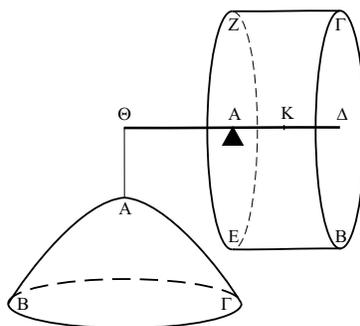


Figura 9.21: Equilíbrio dos sólidos.

Consideramos agora o ponto K que divide a reta $AΔ$ pela metade. Pelo Lema 8 de *O Método*,²⁷ este ponto será também o centro de gravidade do cilindro. O Postulado 6 de *Sobre o Equilíbrio dos Planos*²⁸ permite concluir que a alavanca vai continuar em equilíbrio quando o cilindro atua sobre ela apenas por seu centro de gravidade. Isto está representado na Figura 9.22.

A situação de equilíbrio da Figura 9.22 pode ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{AΘ}{AK} = \frac{\text{cilindro}}{\text{segmento de parabolóide}} . \quad (9.41)$$

²⁷Citado na Seção 9.3, página 53 desta tese.

²⁸Citado na Subseção 6.1.3, página 26 desta tese, ver ainda [33, págs. 215 a 220 e 226].

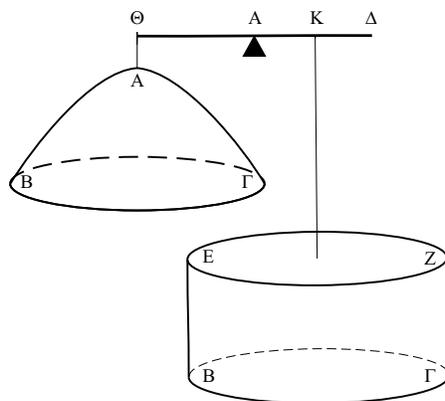


Figura 9.22: Equilíbrio dos sólidos atuando sobre a alavanca por seus centros de gravidade.

Podemos então concluir a demonstração física do teorema. Por construção temos que

$$A\Theta = 2AK . \quad (9.42)$$

Logo:

$$\text{cilindro} = 2(\text{segmentos de paraboloides}) . \quad (9.43)$$

Como já foi visto, o cilindro é o triplo do cone com a mesma base e a mesma altura. Portanto, fica claro que:

$$\text{segmento de paraboloides} = \frac{3}{2}(\text{cone } AB\Gamma) . \quad (9.44)$$

Isto conclui a demonstração física deste teorema.

9.5.1 Importância do Teorema IV

Este teorema já era conhecido pelos especialistas em Arquimedes por aparecer em sua obra *Sobre Conoides e Esferoides*.²⁹ Nesta obra bem conhecida este teorema é demonstrado de forma puramente geométrica. Foi apenas com a descoberta de *O Método* que ficou evidente que este resultado foi obtido originalmente pela mecânica. Já era conhecida na época de Arquimedes a relação entre o volume do cone e do cilindro circunscrito a ele. Arquimedes obteve então, a partir do equilíbrio representado pela Figura 9.22, juntamente com a lei da alavanca, além do fato de que AK é a metade de ΘA , uma relação entre o volume do paraboloides e do cilindro circunscrito a ele. Analogamente obteve uma relação entre o volume do paraboloides e o volume do cone inscrito nele.

9.6 Demonstração Física do Teorema V: Centro de Gravidade de um Segmento de Paraboloides de Revolução

Enunciado deste teorema:

²⁹Ver *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposições 21 e 22, [15, págs. 131-133].

O centro de gravidade de um segmento de parabolóide cortado por um plano perpendicular ao eixo está sobre o seu eixo dividindo-o de modo que a parte do mesmo do lado do vértice é o dobro da parte restante.

A Figura 9.23 (a) foi utilizada por Arquimedes na demonstração deste teorema.

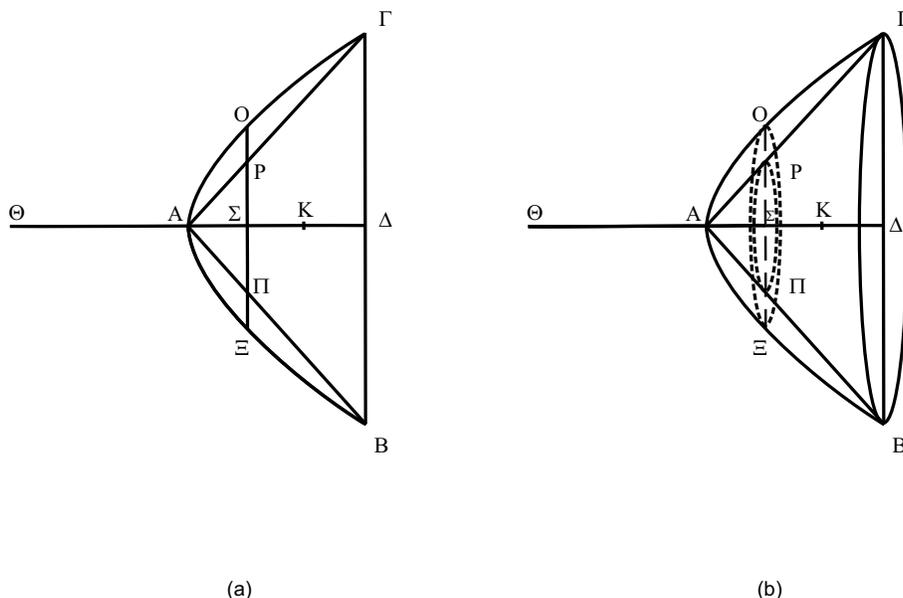


Figura 9.23: Construção geométrica do teorema V. (a) Visão lateral. (b) Visão em perspectiva.

A parábola BAG representa a interseção de um segmento de parabolóide de revolução pelo plano do papel. O eixo do segmento de parabolóide e da parábola é AΔ.

Seja prolongado AΔ até o ponto Θ, de modo que:

$$A\Theta = A\Delta . \quad (9.45)$$

Considere-se ΘΔ como o travessão de uma alavanca na qual A é o ponto médio, que será considerado como fulcro. Considere-se também o cone inscrito no segmento de parabolóide, tendo como geratrizes as retas AB e AΓ.

Seja traçada na parábola a reta ΞO paralela a BΓ, a qual encontra as geratrizes do cone nos pontos P e Π, a própria parábola nos pontos O e Ξ, encontrando o eixo AΔ no ponto Σ. Esta reta ΞO está a uma distância arbitrária da base BΓ. Na prova deste teorema esta distância vai variar de $A\Sigma = 0$ até $A\Sigma = A\Delta$.

Sobre a reta ΞO é levantado um plano perpendicular ao eixo AΔ, o qual determina como intersecção nos sólidos, os círculos de diâmetros ΞO e ΠP.

A partir da geometria da Figura 9.23 Arquimedes demonstra a seguinte relação matemática:³⁰

$$\frac{\Theta A}{A\Sigma} = \frac{Q(\Xi\Sigma)}{Q(\Pi\Sigma)} . \quad (9.46)$$

Mas já vimos nos teoremas anteriores que uma proporção entre quadrados é igual a uma proporção entre os círculos que tenham os raios (ou os diâmetros) respectivamente iguais aos lados dos quadrados. Logo, utilizando a Figura 9.23 vem que a Equação (9.46) pode ser escrita como:

³⁰A dedução matemática desta Equação encontra-se na Seção A.5 do Apêndice.

$$\frac{\Theta A}{A\Sigma} = \frac{\text{círculo de diâmetro } \Xi O}{\text{círculo de diâmetro } \Pi P} . \quad (9.47)$$

Esta é a relação matemática básica que é utilizada por Arquimedes, juntamente com a lei da alavanca, para fazer a demonstração física deste teorema, a qual apresentamos a seguir.

Consideramos então os círculos como objetos homogêneos com seus pesos distribuídos uniformemente. A Equação (9.47) representa a lei da alavanca, em relação ao ponto A como fulcro. Ou seja, esta alavanca fica em equilíbrio com o círculo de diâmetro ΠP colocado no ponto Θ e o círculo de diâmetro ΞO permanecendo no seu lugar. Esta situação está representada na Figura 9.24.

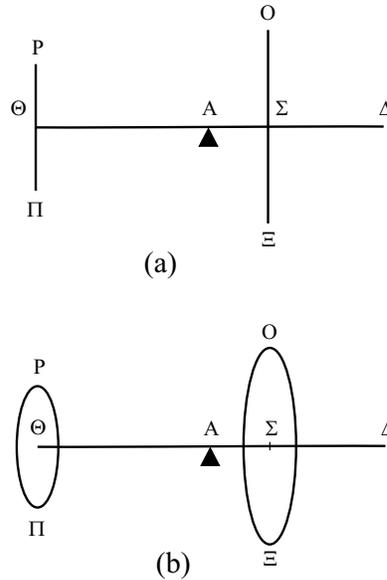


Figura 9.24: Equilíbrio dos círculos na alavanca. a) Vista de perfil. b) Vista em perspectiva.

A mesma demonstração é válida para qualquer outra reta paralela a $B\Delta$ entre A e Δ . Se levantarmos sobre ela um plano perpendicular a $A\Delta$, então o círculo que é a interseção deste plano com o parabolóide, permanecendo no seu lugar, estará em equilíbrio com o círculo que é a interseção do plano com o cone, transportado para o ponto Θ da alavanca.

Sendo o parabolóide e o cone constituídos por todos os seus respectivos círculos, conclui-se que também estes sólidos estarão em equilíbrio em relação ao ponto A, desde que o parabolóide permaneça no seu lugar distribuído sobre o braço da alavanca, enquanto que o cone seja transportado para a esquerda passando a atuar sobre a alavanca apenas sobre o ponto Θ , isto é, com o seu centro de gravidade em Θ . Esta situação de equilíbrio está representada na Figura 9.25.

Por simetria vem que o centro de gravidade do parabolóide está ao longo do seu eixo de simetria $A\Delta$. Vamos chamar de K a este centro de gravidade. O objetivo de Arquimedes é obter a razão entre AK e $A\Delta$. Pelo sexto postulado de *Sobre o Equilíbrio dos Planos*³¹ vem que se a situação da Figura 9.25 é de equilíbrio, então a alavanca vai continuar em equilíbrio quando o parabolóide está atuando sobre a alavanca apenas sobre o ponto K, como indicado na Figura 9.26.

³¹Citado na Subseção 6.1.3, na página 26 desta tese.

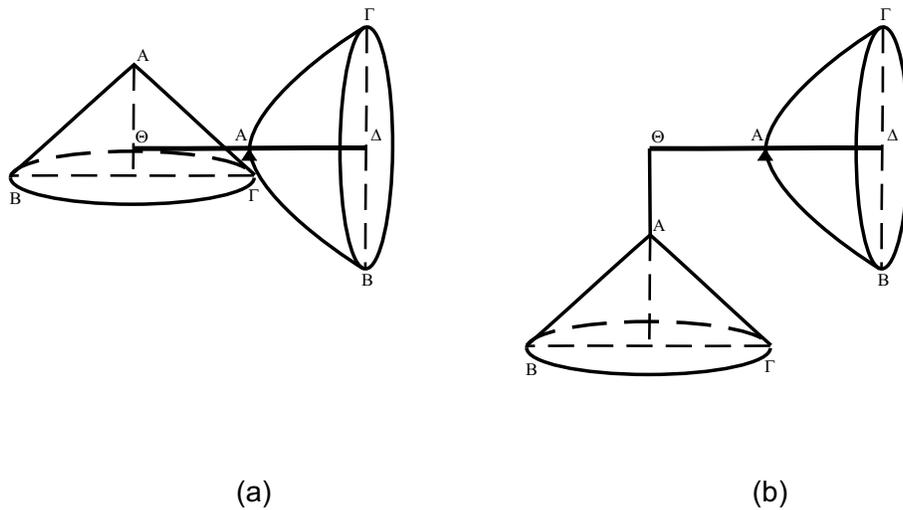


Figura 9.25: (a) Equilíbrio dos sólidos sobre a alavanca ao redor do ponto A com o parabolóide permanecendo em seu lugar distribuído sobre o braço da alavanca, enquanto que o cone está atuando apenas sobre o ponto Θ . (b) Mesma situação de equilíbrio com o cone dependurado em Θ por um fio de peso desprezível, com o parabolóide distribuído sobre o braço da alavanca.

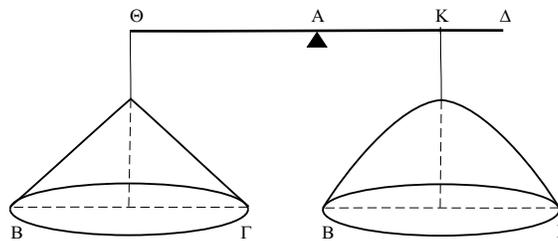


Figura 9.26: Alavanca em equilíbrio ao redor do ponto A com o cone atuando em Θ e o parabolóide atuando em K.

A situação de equilíbrio representada pela Figura 9.26 pode ser expressa matematicamente como:

$$\frac{AK}{A\Theta} = \frac{\text{cone}}{\text{segmento de parabolóide}} . \quad (9.48)$$

Com isto então podemos concluir a demonstração. Pelo Teorema IV sabemos que:

$$\text{segmento de parabolóide} = \frac{3}{2}(\text{cone}) . \quad (9.49)$$

Então:

$$AK = \frac{2}{3}A\Theta = \frac{2}{3}A\Delta . \quad (9.50)$$

Como

$$AK + K\Delta = A\Delta , \quad (9.51)$$

podemos concluir a demonstração. Ou seja, combinando as Equações (9.50) e (9.51), concluímos que o centro de gravidade de um segmento de parabolóide de revolução está situado sobre o seu eixo $A\Delta$ em um ponto K que o divide como foi definido no enunciado do teorema. Ou seja, a parte situada do lado do vértice é o dobro da parte restante, ver a Figura 9.23:

$$AK = 2K\Delta . \tag{9.52}$$

E esta é a formulação matemática deste teorema que foi expresso nas seguintes palavras por Arquimedes:

O centro de gravidade de um segmento de parabolóide cortado por um plano perpendicular ao eixo está sobre o seu eixo dividindo-o de modo que a parte do mesmo do lado do vértice é o dobro da parte restante.

9.6.1 Importância do Teorema V

Enfatizamos aqui os aspectos mais relevantes deste Teorema.

- No Teorema I Arquimedes havia obtido a área desconhecida da parábola a partir da área conhecida de um triângulo ao encontrar uma alavanca em equilíbrio com estes dois corpos dependurados por seus centros de gravidade, sabendo a razão entre estas distâncias, Figura 9.6. No Teorema II obteve o volume desconhecido de um sólido a partir do mesmo método, como ilustrado na Figura 9.12. Neste caso ele conhecia os volumes do cilindro e do cone, assim como a lei da alavanca e a razão entre as distâncias AK e ΘA . Com isto conseguiu obter o volume da esfera em termos dos volumes dos outros corpos conhecidos. O mesmo procedimento foi obtido no Teorema III para obter o volume de um elipsoide de revolução, e no Teorema IV para obter o volume de um parabolóide de revolução. Já no Teorema V obtém pela primeira vez a localização a princípio desconhecida do centro de gravidade de um corpo utilizando o mesmo método. A situação de equilíbrio que ele obteve é representada pela alavanca da Figura 9.26. Neste caso ele conhece a razão entre os volumes do cone e do parabolóide (pelo Teorema IV), mas não sabe a razão de AK para ΘA . Mas pela lei da alavanca consegue relacionar esta razão desconhecida entre as distâncias com a razão já conhecida entre os volumes. Desta forma obteve a razão entre AK e ΘA , ou seja, a localização do centro de gravidade do parabolóide de revolução.
- Este resultado que Arquimedes obteve pela primeira vez é extremamente importante. Ele já era conhecido antes da descoberta do manuscrito de *O Método*. Em seu trabalho *Sobre os Corpos Flutuantes*, que já se encontra traduzido para o português,³² Arquimedes havia pesquisado as condições de equilíbrio de um parabolóide de revolução flutuando em um fluido. Em particular, analisou para quais ângulos de inclinação do eixo do parabolóide em relação à vertical haveria um equilíbrio estável ou instável do parabolóide. Neste trabalho ele utilizou o centro de gravidade do parabolóide, indicando sua localização exata. Mas até a descoberta de *O Método* no início do século XX não se conhecia como Arquimedes havia calculado este centro de gravidade do parabolóide, já que os cálculos para se chegar neste resultado não apareciam em *Sobre os Corpos Flutuantes*, nem nos trabalhos conhecidos de todos os outros matemáticos gregos da antiguidade.³³

³²[35].

³³Ver [12, pág. 265].

Mais uma vez, é fascinante perceber como Arquimedes utilizou a lei da alavanca para chegar a um resultado inédito sobre a localização do centro de gravidade de um corpo.

9.7 Demonstração Física do Teorema VI: Centro de Gravidade de um Hemisfério

Enunciado do teorema:

O centro de gravidade de todo hemisfério está sobre o seu eixo, dividindo-o de tal maneira que a razão entre o segmento de reta do lado da superfície e o segmento restante é de cinco para três.

A Figura 9.27 foi apresentada por Mugler na demonstração deste teorema.³⁴

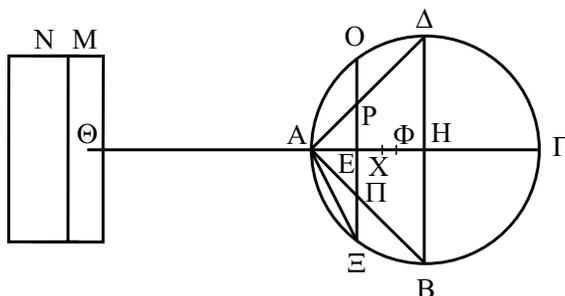


Figura 9.27: Construção geométrica do teorema VI de acordo com Mugler.

Nesta Figura o círculo $AB\Gamma\Delta$ representa o corte de uma esfera no plano do papel. Sejam neste círculo $A\Gamma$ e $B\Delta$ dois diâmetros perpendiculares entre si, cruzando-se no ponto H . Sejam construídos sobre $B\Delta$ um plano perpendicular a $A\Gamma$, determinando um hemisfério, e um cone tendo por base o círculo de diâmetro $B\Delta$, vértice em A e geratrizes AB e $A\Delta$. Seja prolongada $A\Gamma$ até o ponto Θ , fazendo

$$\Theta A = A\Gamma . \quad (9.53)$$

Arquimedes considera $\Theta\Gamma$ como sendo o travessão de uma alavanca da qual A é o ponto médio, que será considerado como fulcro.

Seja traçada no semicírculo $BA\Delta$ uma reta qualquer ΞO paralela a $B\Delta$, a qual encontrará a circunferência nos pontos O e Ξ , as geratrizes do cone em P e Π , e a reta $A\Gamma$ no ponto E . Sobre a reta $O\Xi$ seja levantado um plano perpendicular a AE . Este plano cortará o hemisfério segundo um círculo de diâmetro ΞO e o cone segundo um círculo de diâmetro PIP .

A partir da geometria da Figura 9.27 Arquimedes demonstra a seguinte relação matemática:³⁵

$$\frac{A\Gamma}{AE} = \frac{Q(\Xi E) + Q(E\Pi)}{Q(E\Pi)} . \quad (9.54)$$

³⁴[19, pág. 102].

³⁵A demonstração matemática desta Equação encontra-se na Seção A.6 do Apêndice.

Mas a razão entre quadrados é a mesma razão que existe entre as áreas dos círculos cujos diâmetros são os lados dos quadrados. Além disso:

$$A\Gamma = \Theta A . \tag{9.55}$$

Portanto, com a Figura 9.27:

$$\frac{\Theta A}{AE} = \frac{\text{círculo de diâmetro } \Xi O + \text{círculo de diâmetro } \Pi P}{\text{círculo de diâmetro } \Pi P} . \tag{9.56}$$

Isto conclui a demonstração da relação matemática básica necessária para a prova deste teorema. Apresentamos agora a demonstração física deste teorema.

Arquimedes considera a Equação (9.56) como representando uma alavanca em equilíbrio ao redor do ponto A. Ou seja, ela fica em equilíbrio com os dois círculos de diâmetro ΞO e ΠP permanecendo em seus lugares, juntamente com o círculo de diâmetro ΠP colocado em Θ , como mostrado na Figura 9.28.

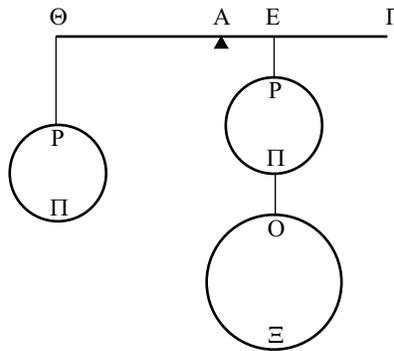


Figura 9.28: Equilíbrio de uma alavanca ao redor de A.

Sendo o plano $OΞ$ um plano qualquer entre A e H, o mesmo raciocínio aplica-se a todos os círculos de interseção com o hemisfério. O cone é constituído por todos os círculos de diâmetro $\Pi\Pi$, enquanto que o hemisfério é constituído por todos os círculos de diâmetro $OΞ$. Ao considerar todos os círculos na região que vai de $AE = 0$ até $AE = AH$, acabamos com o equilíbrio de três sólidos em uma alavanca com fulcro em A como mostrado na Figura 9.29. Ou seja, com um cone $AB\Delta$ transportando para Θ , juntamente com o cone $AB\Delta$ e o hemisfério $BA\Delta$ permanecendo em seus lugares.

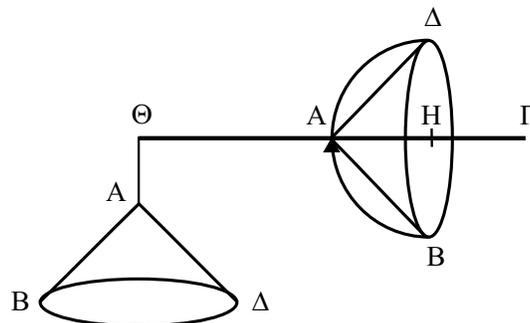


Figura 9.29: Alavanca com três sólidos em equilíbrio ao redor do ponto A.

Arquimedes considera então um cilindro MN com mesmo peso que o cone AB Δ , Figura 9.30 (a).

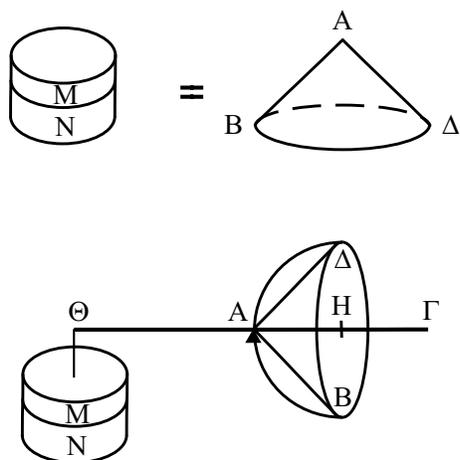


Figura 9.30: (a) Cilindro MN de mesmo volume que o cone AB Δ . (b) Alavanca com três sólidos em equilíbrio ao redor do ponto A.

A alavanca da Figura 9.29 vai continuar em equilíbrio ao redor do ponto A se substituirmos o cone atuando em Θ por este cilindro MN de mesmo volume que o cone, desde que o centro de gravidade do cilindro também esteja atuando em Θ . Isto está representado na Figura 9.30 (b).

Por este motivo não nos parece que a Figura 9.27 seja uma boa representação da situação física de equilíbrio. Nesta Figura o centro de gravidade do cilindro M está localizado em Θ , enquanto que o centro de gravidade do cilindro N está fora de Θ . Na Figura 9.31 apresentamos a nossa representação física da situação descrita neste teorema. Neste caso temos os centros de gravidade dos cilindros M e N atuando verticalmente abaixo de Θ . Uma discussão sobre estas Figuras é apresentada no Apêndice D, Seção D.3.

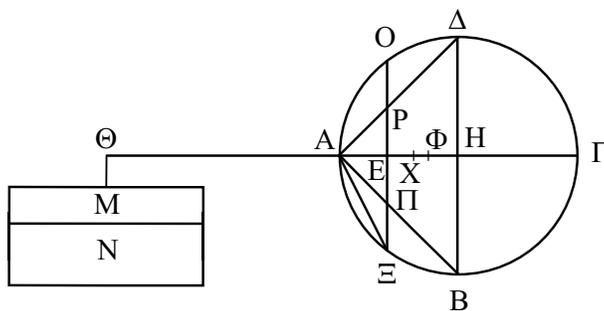


Figura 9.31: A figura do Teorema VI apresentada em nosso trabalho.

Corte-se esse cilindro MN por um plano perpendicular ao eixo, obtendo dois cilindros, M e N que, ao atuarem separadamente sobre o ponto Θ , satisfazem às seguintes condições de equilíbrio da alavanca em relação ao ponto A: O cilindro M sozinho equilibra o cone AB Δ permanecendo em seu lugar, enquanto que o cilindro N sozinho equilibra o hemisfério BA Δ permanecendo em seu lugar, Figura 9.32.

Consideramos sobre AH um ponto Φ satisfazendo às seguintes relações:

$$A\Phi = 3\Phi H , \tag{9.57}$$

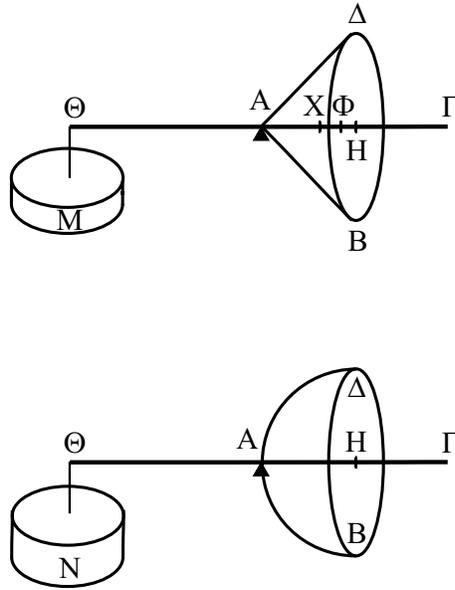


Figura 9.32: Alavancas em equilíbrio ao redor do ponto A: (a) O cilindro M equilibra o cone $AB\Delta$ permanecendo em seu lugar. (b) O cilindro N equilibra o hemisfério $BA\Delta$ permanecendo em seu lugar.

e

$$A\Phi + \Phi H = AH . \quad (9.58)$$

O Lema 10 de *O Método* afirma que:³⁶

O centro de gravidade de todo cone está situado sobre o eixo, dividindo-o de modo que o segmento próximo do vértice seja o triplo do restante.

Por este Lema vem que o ponto Φ é o centro de gravidade do cone. Pelo sexto postulado de *Sobre o Equilíbrio dos Planos*³⁷ vem que a situação da Figura 9.32 (a) vai continuar em equilíbrio com o cone $AB\Delta$ atuando sobre a alavanca apenas por seu centro de gravidade localizado em Φ , como indicado na Figura 9.33.

Temos que

$$\Theta A = A\Gamma = 2AH . \quad (9.59)$$

Usando as Equações (9.57), (9.58) e (9.59) vem que a Figura 9.33 pode ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{\text{cone } AB\Delta}{\text{cilindro } M} = \frac{\Theta A}{A\Phi} = \frac{8}{3} . \quad (9.60)$$

Consideramos agora um outro ponto X satisfazendo à seguinte relação:

$$\frac{AH}{AX} = \frac{8}{5} . \quad (9.61)$$

³⁶Não se encontra a prova deste Lema nas obras de Arquimedes que chegaram até nós. Para uma reconstrução desta demonstração seguindo a linha de raciocínio de Arquimedes, ver [43].

³⁷Citado na Subseção 6.1.3, na página 26 desta tese.

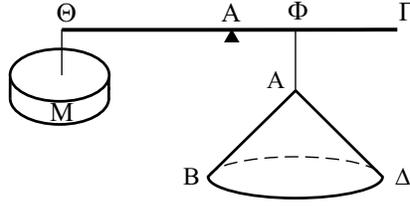


Figura 9.33: O cilindro M, ao atuar em Θ , equilibra a alavanca ao redor do ponto A com o cone $AB\Delta$ atuando em Φ .

Temos que:

$$AH = AX + XH . \quad (9.62)$$

Substituindo a Equação (9.62) na Equação (9.61) vem:

$$\frac{AX + XH}{AX} = \frac{8}{5} . \quad (9.63)$$

Pelas propriedades das proporções³⁸ temos:

$$\frac{AX + XH - AX}{AX} = \frac{8 - 5}{5} = \frac{3}{5} = \frac{XH}{AX} . \quad (9.64)$$

A partir destas considerações Arquimedes encontra a localização de centro de gravidade do hemisfério por meio de deduções físicas e matemáticas alternadamente, como podemos acompanhar a seguir.

O cilindro MN foi construído como sendo equivalente ao cone $AB\Delta$. Portanto, utilizando a Equação (9.60), temos que:

$$\frac{\text{cilindro } M}{\text{cone } AB\Delta} = \frac{\text{cilindro } M}{\text{cilindro } MN} = \frac{\text{cilindro } M}{\text{cilindro } M + \text{cilindro } N} = \frac{3}{8} . \quad (9.65)$$

Desta Equação vem que:

$$5(\text{cilindros } M) = 3(\text{cilindros } N) . \quad (9.66)$$

Pelas propriedades das proporções³⁹ ou então utilizando diretamente as Equações (9.65) e (9.66) vem:

$$\frac{\text{cilindro } N}{\text{cilindro } MN} = \frac{5}{8} . \quad (9.67)$$

Mas o cilindro MN é equivalente ao cone $AB\Delta$. Portanto:

$$\frac{\text{cone } AB\Delta}{\text{cilindro } N} = \frac{8}{5} . \quad (9.68)$$

³⁸Ver a Equação (7.23).

³⁹Ver as Equações (7.21) e (7.27).

Mas no início da demonstração Arquimedes tomou o ponto X de modo que os segmentos AH e AX satisfizessem à razão de 8/5. Portanto, podemos substituir na Equação (9.68) a razão 8/5 por AH/AX obtendo:

$$\frac{\text{cone } AB\Delta}{\text{cilindro } N} = \frac{AH}{AX} . \quad (9.69)$$

Foi visto no Teorema II que a esfera é o quádruplo do cone que tem por base o círculo máximo $B\Delta$ e por eixo (altura) o seu raio AH. Então o hemisfério é o dobro do cone $AB\Delta$. Combinando estes resultados vem que:

$$\frac{\text{hemisfério}}{\text{cone } AB\Delta} = \frac{2}{1} = \frac{\Theta A}{AH} , \quad (9.70)$$

pois ΘA é o dobro de AH por construção. Portanto, multiplicando membro a membro as duas últimas Equações temos:

$$\frac{\text{hemisfério}}{\text{cilindro } N} = \frac{\Theta A}{AX} . \quad (9.71)$$

Mas essa é a lei da alavanca com fulcro em A. Ou seja, esta alavanca fica em equilíbrio com o cilindro N atuando sobre Θ , com o hemisfério atuando em X, Figura 9.34.

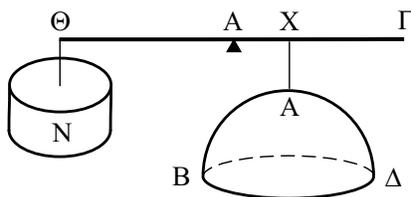


Figura 9.34: O cilindro N, ao atuar em Θ , equilibra a alavanca ao redor do ponto A com o hemisfério $BA\Delta$ atuando em X.

Concluimos então, pelo Postulado 6 de *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, que o centro de gravidade do hemisfério é realmente o ponto X. As características deste ponto X foram definidas pela Equação (9.61), a partir da qual deduzimos a Equação (9.64), a saber:

$$\frac{AX}{XH} = \frac{5}{3} . \quad (9.72)$$

Esta é a formulação matemática deste sexto teorema de *O Método*.

9.7.1 Importância do Teorema VI

- Novamente temos Arquimedes utilizando seu método para calcular o centro de gravidade de um corpo.

- Sabia-se que Arquimedes havia calculado o centro de gravidade não apenas de um hemisfério, mas de qualquer segmento esférico, já que utilizou estes resultados para estudar o equilíbrio de um corpo com este formato flutuando em um líquido em seu trabalho *Sobre os Corpos Flutuantes*.⁴⁰ Infelizmente a parte final da primeira parte deste trabalho chegou mutilada até nós, faltando a maior parte da obra. Com a descoberta de *O Método* ficou-se sabendo pelo menos como ele havia calculado estes centros de gravidade.

9.8 Demonstração Física do Teorema VII: Volume de um Segmento Esférico

Enunciado do Teorema:⁴¹

A razão entre todo segmento esférico e o cone que tem a mesma base e o mesmo eixo do segmento, é igual à razão da soma do raio da esfera com a altura do segmento restante, para a altura do segmento restante.

A Figura 9.35 representa com $AB\Gamma\Delta$ o círculo máximo de uma esfera, sendo $A\Gamma$ e TY dois diâmetros perpendiculares. Corta-se a esfera pelo ponto H com um plano perpendicular ao segmento de reta $A\Gamma$ definindo assim um segmento esférico cuja base é o círculo de diâmetro $B\Delta$. Sobre este círculo é construído um cone com vértice em A .

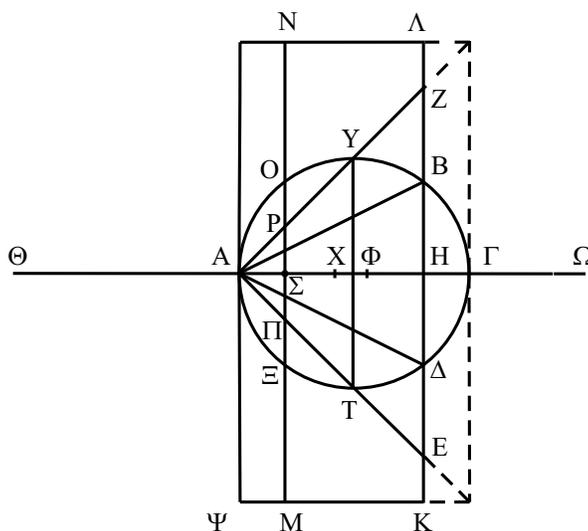


Figura 9.35: Representação geométrica do Teorema VII.

Além disso, tendo como base o círculo de diâmetro TY , seja construído um outro cone também com vértice em A . Seja prolongada a superfície lateral deste cone até encontrar o plano passando por $B\Delta$ e perpendicular ao eixo $A\Gamma$. Esta interseção será o círculo de diâmetro EZ .

⁴⁰Tradução para o português em [35].

⁴¹A demonstração geométrica deste teorema pode ser encontrada em *Sobre a Esfera e o Cilindro*, Livro II, Proposição 2, [17, pág. 104].

Neste mesmo plano passando por $B\Delta$ e perpendicular ao eixo $A\Gamma$ seja também construído um círculo com centro em H e raio igual a $A\Gamma$. O seu diâmetro está indicado na figura como $K\Lambda$. Sobre este círculo seja construído um cilindro cujo eixo é AH . O corte deste cilindro no plano do papel é então representado pelo paralelogramo $\Psi K\Lambda$.⁴²

Agora Arquimedes prolonga o eixo do segmento esférico $A\Gamma$ dos dois lados. Este prolongamento é feito de um lado com o segmento de reta $\Gamma\Omega$ igual ao raio da esfera e do outro lado, como de costume, com um segmento $A\Theta$ igual a $A\Gamma$. O segmento $\Theta\Gamma$ será considerado uma alavanca com fulcro em A .

Dentro do paralelogramo $\Psi K\Lambda$ traça-se a reta MN paralela a $B\Delta$. Esta reta MN está a uma distância arbitrária de $K\Lambda$. Sobre a reta MN levanta-se um plano perpendicular ao eixo $A\Gamma$. Este plano corta o cilindro segundo um círculo de diâmetro MN , o segmento esférico segundo um círculo de diâmetro ΞO , e o cone AEZ segundo um círculo de diâmetro ΠP .

Aqui observamos que a Figura deste teorema é muito semelhante àquela já construída no Teorema II, Figura 9.8 (a). A dedução matemática das equações que vão ser utilizadas na lei da alavanca aplica-se também às figuras geométricas deste teorema. Podemos usar então como ponto de partida da demonstração física a mesma Equação (9.12), a saber:

$$\frac{\Theta A}{A\Sigma} = \frac{\text{Círculo de diâmetro } MN}{(\text{Círculo de diâmetro } \Xi O) + (\text{Círculo de diâmetro } \Pi P)}. \quad (9.73)$$

A situação de equilíbrio representada pela Equação (9.73) é indicada na Figura 9.36.

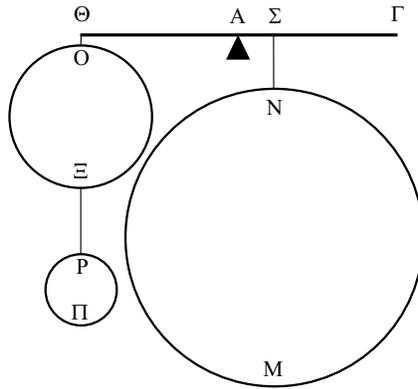


Figura 9.36: Alavanca em equilíbrio ao redor do fulcro A com o círculo de diâmetro MN permanecendo com seu centro de gravidade em Σ , juntamente com os círculos de diâmetro $O\Xi$ e ΠP com seus centros de gravidade deslocados para Θ .

Portanto, a Figura 9.36 representa o equilíbrio, em relação ao ponto A , entre os círculos homogêneos e uniformes que são as interseções dos sólidos considerados. O cilindro, o cone AEZ e o segmento esférico $AB\Delta$ são constituídos por todos os seus respectivos círculos. Aplicando a mesma condição de equilíbrio da Figura 9.36 para todos os círculos entre $A\Sigma = 0$ até $A\Sigma =$

⁴²A descrição da construção geométrica foi perdida no original grego, tendo sido reconstituída por Heiberg. Neste ponto aparece uma incoerência na reconstituição ou na tradução feita por Mugler, pois o paralelogramo é chamado de $\Phi\Lambda$. Mas este ponto Φ está claramente definido no texto grego, sendo localizado sobre o eixo e não como vértice do paralelogramo. Para evitar as dúvidas que naturalmente surgiriam ao indicar dois pontos com o mesmo símbolo, optamos por identificar um dos vértices do paralelogramo com o símbolo Ψ .

AH obtemos os três sólidos em equilíbrio em relação ao ponto A, com o cilindro permanecendo no seu lugar, enquanto o cone AEZ e o segmento esférico são transportados com seus centros de gravidade sobre o ponto Θ , como na Figura 9.37.

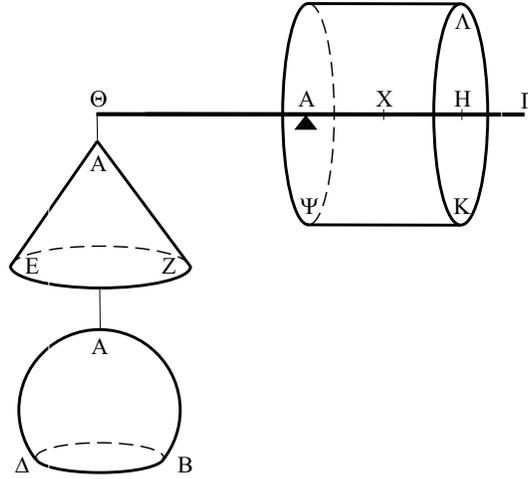


Figura 9.37: Equilíbrio da alavanca ao redor do fulcro A com o cilindro permanecendo em seu lugar, enquanto que o cone AEZ e o segmento esférico são transportados com seus centros de gravidade atuando sobre o ponto Θ .

Para continuar o estudo do equilíbrio dos sólidos sobre a alavanca, Arquimedes define agora dois pontos sobre o eixo AH, a saber, X e Φ , tais que:

$$AX = XH , \quad (9.74)$$

e

$$H\Phi = \frac{AH}{3} . \quad (9.75)$$

Com essas definições, X é o centro de gravidade do cilindro pelo Lema 8 de *O Método* citado na Seção 9.3, página 53 desta tese. Assim podemos representar o equilíbrio entre os sólidos com a situação representada na Figura 9.38.

Partindo destas considerações e da condição de equilíbrio da alavanca, podemos então escrever:

$$\frac{\Theta A}{AX} = \frac{\text{Cilindro}}{(\text{Cone } AEZ) + (\text{Segmento esférico } AB\Delta)} . \quad (9.76)$$

Invertamos a Equação (9.76) e substituimos ΘA por $A\Gamma$, que são iguais entre si por construção. Multiplicamos também o numerador e o denominador do primeiro membro por $A\Gamma$, obtendo:

$$\frac{(\text{Cone } AEZ) + (\text{Segmento esférico } AB\Delta)}{\text{Cilindro}} = \frac{AX}{A\Gamma} = \frac{(AX)(A\Gamma)}{(A\Gamma)(A\Gamma)} . \quad (9.77)$$

Por construção temos que:

$$EH = AH , \quad (9.78)$$

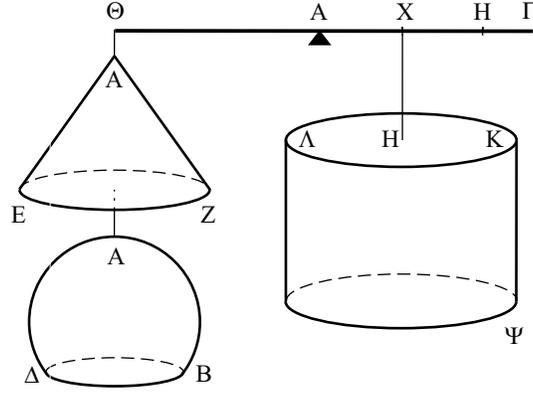


Figura 9.38: Equilíbrio da alavanca ao redor do fulcro A com o cilindro dependurado pelo ponto X (que é o ponto médio de AH) através de seu centro de gravidade, enquanto que o cone AEZ e o segmento esférico são transportados com seus centros de gravidade atuando sobre o ponto Θ .

e

$$H\Lambda = A\Gamma . \quad (9.79)$$

Considerando agora as Equações (9.78) e (9.79), assim como as proporções existentes entre cones e cilindros de mesma altura, como estão apresentadas por Euclides,⁴³ vem que também podemos escrever:

$$\frac{\text{Cilindro}}{\text{Cone } AEZ} = \frac{Q(H\Lambda)}{\frac{1}{3}Q(EH)} = \frac{Q(A\Gamma)}{\frac{1}{3}Q(AH)} . \quad (9.80)$$

Multiplicando membro a membro as Equações (9.77) e (9.80) e sendo, por construção,

$$AX = \frac{1}{2}AH , \quad (9.81)$$

temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\text{Cone } AEZ + \text{Segmento esférico } AB\Delta}{\text{Cone } AEZ} \\ &= \frac{(AX)(A\Gamma)}{\frac{1}{3}Q(AH)} = \frac{\left(\frac{1}{2}A\Gamma\right)}{\left(\frac{1}{3}AH\right)} . \end{aligned} \quad (9.82)$$

Com base nas propriedades das proporções,⁴⁴ e pela Equação (9.82) temos que:

$$\frac{\text{Segmento esférico } AB\Delta}{\text{Cone } AEZ} = \frac{\left(\frac{1}{2}A\Gamma\right) - \left(\frac{1}{3}AH\right)}{\frac{1}{3}AH} . \quad (9.83)$$

⁴³Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposições 10 e 11, citadas na Seção 9.4, página 62 desta tese, ver ainda [23, Vol. 3, pág. 400 a 409] e [24, pág. 543 a 549].

⁴⁴Ver a Equação (7.23).

Lembramos agora que cones da mesma altura são proporcionais às respectivas bases.⁴⁵ Por outro lado, as bases destes cones, sendo círculos, são proporcionais aos quadrados de seus diâmetros (ou raios), conforme a Proposição 2 do Livro XII de *Os Elementos* de Euclides:⁴⁶

Os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros.

Utilizando estes resultados obtemos que:

$$\frac{\text{Cone } AEZ}{\text{Cone } AB\Delta} = \frac{Q(EH)}{Q(\Delta H)}. \quad (9.84)$$

Pela Equação (9.74) temos:

$$EH = AH. \quad (9.85)$$

Pela propriedade dos triângulos retângulos temos que:⁴⁷

$$Q(\Delta H) = (AH)(H\Gamma). \quad (9.86)$$

Substituindo a Equação (9.86) na Equação (9.84) vem que:

$$\frac{\text{Cone } AEZ}{\text{Cone } AB\Delta} = \frac{Q(AH)}{(AH)(H\Gamma)} = \frac{AH}{H\Gamma}. \quad (9.87)$$

Ou ainda, dividindo por 3 o numerador e o denominador do último membro, obtemos:

$$\frac{\text{Cone } AEZ}{\text{Cone } AB\Delta} = \frac{\frac{1}{3}AH}{\frac{1}{3}H\Gamma}. \quad (9.88)$$

Multiplicando membro a membro as Equações (9.83) e (9.88) podemos concluir:

$$\frac{\text{Segmento esférico } AB\Delta}{\text{Cone } AB\Delta} = \frac{\left(\frac{1}{2}A\Gamma\right) - \left(\frac{1}{3}AH\right)}{\frac{1}{3}H\Gamma}. \quad (9.89)$$

Ou:

$$\frac{\text{Segmento esférico } AB\Delta}{\text{Cone } AB\Delta} = \frac{\left(\frac{3}{2}A\Gamma\right) - (AH)}{H\Gamma}. \quad (9.90)$$

Sendo:

$$A\Gamma = AH + H\Gamma, \quad (9.91)$$

temos que:

$$\frac{3}{2}A\Gamma - AH = \frac{1}{2}A\Gamma + A\Gamma - AH = \frac{1}{2}A\Gamma + AH + H\Gamma - AH = \frac{1}{2}A\Gamma + H\Gamma. \quad (9.92)$$

Então, substituindo este resultado na Equação (9.90):

⁴⁵Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 11, citada na Seção 9.4, página 62 desta tese.

⁴⁶[24, pág. 528].

⁴⁷Ver o Apêndice C.

$$\frac{\text{Segmento esférico } AB\Delta}{\text{Cone } AB\Delta} = \frac{\frac{1}{2}A\Gamma + H\Gamma}{H\Gamma}. \quad (9.93)$$

Mas $\frac{1}{2}A\Gamma$ é o raio da esfera. Isto conclui a demonstração do teorema, já que a Equação (9.93) é a representação matemática daquilo que foi apresentado por Arquimedes nas seguintes palavras (ver ainda a Figura 9.35):

A razão entre todo segmento esférico e o cone que tem a mesma base e o mesmo eixo do segmento, é igual à razão da soma do raio da esfera com a altura do segmento restante, para a altura do segmento restante.

9.8.1 Importância do Teorema VII

A demonstração geométrica deste Teorema devido a Arquimedes era conhecida de sua obra *Sobre a Esfera e o Cilindro*.⁴⁸ Foi com a descoberta de *O Método* que se ficou sabendo que Arquimedes havia obtido este resultado originalmente utilizando a mecânica para só então encontrar a demonstração geométrica. A demonstração mecânica utiliza essencialmente o equilíbrio representado pela Figura 9.38, a lei da alavanca, a razão entre as distâncias AX e ΘA , assim como a razão entre os volumes do cone e do cilindro. Com isto Arquimedes obtém a relação entre o volume do segmento esférico e o volume do cone inscrito.

9.9 Demonstração Física do Teorema IX: Centro de Gravidade de um Segmento Esférico

Enunciado do teorema:

O centro de gravidades de todo segmento esférico está sobre o eixo do segmento, dividindo-o de tal maneira que a razão entre a parte do mesmo do lado do vértice do segmento, e a parte restante, é a mesma [razão] que a soma do eixo do segmento e o quádruplo do eixo do segmento oposto, com a soma do eixo do segmento e o dobro do eixo do segmento oposto.

Na Figura 9.39 temos a construção geométrica apresentada por Mugler para a demonstração deste teorema.⁴⁹

Por simplicidade de notação vamos representar Q(AB) como sendo o quadrado de lado AB. Da mesma forma vamos representar R(CD, EF) como sendo o retângulo de lados CD e EF.

Na Figura 9.39 o círculo $AB\Gamma\Delta$ de diâmetro $A\Gamma$ representa o corte de uma esfera por um plano passando pelo centro. Cortamos essa esfera pelo ponto H com um plano perpendicular ao diâmetro $A\Gamma$, obtendo como interseção o segmento esférico $AB\Delta$ cuja base é o círculo de diâmetro $B\Delta$. Com essa construção, o diâmetro $B\Delta$ é perpendicular ao diâmetro $A\Gamma$ e o divide nas partes AH e $H\Gamma$. A altura do segmento esférico que nos interessa é AH. O seu complemento em relação ao diâmetro da esfera é $H\Gamma$.

Arquimedes define agora, ao longo de AH, um ponto X satisfazendo à seguinte relação:

⁴⁸Ver *Sobre a Esfera e o Cilindro*, Livro II, Proposição 2, [17, pág. 104].

⁴⁹[19, pág. 109].

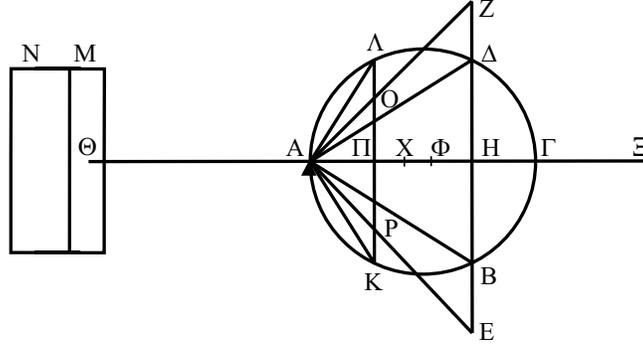


Figura 9.39: Representação em corte do segmento esférico, dos cones e cilindros.

$$\frac{AX}{XH} = \frac{AH + 4H\Gamma}{AH + 2H\Gamma} . \quad (9.94)$$

De acordo com o enunciado do teorema, afirma então o seguinte:

Digo que o ponto X é o centro de gravidade do segmento esférico cujo vértice é o ponto A...

A construção da Figura 9.39 continua ainda com o prolongamento do diâmetro AΓ dos dois lados da esfera. De um lado prolonga-se AΘ, de modo que:

$$A\Theta = A\Gamma . \quad (9.95)$$

Do outro lado prolonga-se ΓΞ igual ao raio da esfera.

Imaginamos, sempre de acordo com o método de Arquimedes, que ΓΘ seja uma alavanca da qual A é o ponto médio, que será considerado como fulcro.

Arquimedes completa a Figura construindo um segundo círculo no plano que determina a base do segmento esférico. Este círculo tem centro em H e raio dado por

$$HZ = HE = AH . \quad (9.96)$$

O diâmetro deste segundo círculo está indicado na Figura 9.39 como sendo dado por:

$$EZ = 2AH . \quad (9.97)$$

Sobre este segundo círculo construimos o cone que tem como vértice o ponto A e como geratrizes as retas AE e AZ.

Na demonstração do teorema Arquimedes usa também o cone com vértice no ponto A e cuja base é o primeiro círculo de diâmetro BΔ, que é a mesma base do segmento esférico. Este cone também está representado na Figura 9.39, mas não aparece na descrição da construção (provavelmente estaria nas linhas que foram perdidas deste palimpsesto).

Tracemos agora uma reta qualquer KΛ paralela a EZ. Esta reta encontra a superfície do segmento esférico em K e Λ, as geratrizes do cone AEZ em P e O, e a reta AΓ em Π.

A partir da geometria da Figura 9.39 Arquimedes demonstra a seguinte relação matemática:⁵⁰

$$\frac{A\Gamma}{A\Pi} = \frac{Q(K\Pi) + Q(\Pi O)}{Q(\Pi O)} . \quad (9.98)$$

Mas já sabemos que uma proporção entre os quadrados de dois segmentos é a mesma proporção existente entre os círculos que têm como raio (ou diâmetro) estes mesmos segmentos (ver o Teorema 2 de *A Medida do Círculo*).⁵¹ Portanto, podemos escrever o lado direito da Equação (9.98) como sendo:

$$\frac{Q(K\Pi) + Q(\Pi O)}{Q(\Pi O)} = \frac{(Círculo\ de\ diâmetro\ K\Lambda) + (Círculo\ de\ diâmetro\ P O)}{Círculo\ de\ diâmetro\ P O} . \quad (9.99)$$

Com isto temos a relação matemática básica necessária para a demonstração física deste teorema, apresentada a seguir.

Por construção temos que:

$$A\Gamma = A\Theta . \quad (9.100)$$

Então das Equações (9.98) até (9.100) temos que:

$$\frac{A\Theta}{A\Pi} = \frac{(Círculo\ de\ diâmetro\ K\Lambda) + (Círculo\ de\ diâmetro\ P O)}{Círculo\ de\ diâmetro\ P O} . \quad (9.101)$$

Supondo círculos de pesos distribuídos uniformemente, esta é a lei da alavanca considerando o ponto A como fulcro. Ou seja, esta alavanca permanece em equilíbrio para o círculo de diâmetro PO colocado no ponto Θ (com seu centro de gravidade em Θ), juntamente com a soma dos círculos de diâmetro PO e K Λ , permanecendo nos seus lugares (com seus centros de gravidade em Π), como na Figura 9.40.

Portanto, o círculo do segmento esférico BA Δ mais aquele do cone AEZ, equilibram em relação ao ponto A o círculo do cone AEZ. Da mesma maneira, todos os círculos que podem ser obtidos no segmento esférico BA Δ e todos os que podem ser obtidos no cone AEZ, permanecendo nos seus lugares, equilibrarão em relação ao ponto A, todos os círculos do cone AEZ, transportados e colocados em Θ , de modo que seus centros de gravidade estejam em Θ .

Assim também o segmento esférico BA Δ e o cone AEZ, permanecendo nos seus lugares, equilibrarão o cone AEZ deslocado para o ponto Θ da alavanca de modo que seu centro de gravidade seja Θ , Figura 9.41.

Dividimos AH pelo ponto Φ de modo que:

$$AH = 4H\Phi . \quad (9.102)$$

Pelo Lema 10 de *O Método*, citado na Seção 9.7 na página 74 desta tese, vem então que Φ é o centro de gravidade do cone AEZ. Pelo sexto postulado de *Sobre o Equilíbrio dos Planos*⁵² vem que se a alavanca da Figura 9.41 estava em equilíbrio, então também vai continuar em equilíbrio quando o cone AEZ que estava apoiado sobre o braço direito da alavanca passa a atuar apenas sobre seu centro de gravidade no ponto Φ , ou seja, como indicado na Figura 9.42.

Consideramos agora um cilindro⁵³ MN de mesmo peso que o cone AEZ, como mostrado na Figura 9.43.

⁵⁰ A dedução desta fórmula encontra-se na Seção A.7 do Apêndice.

⁵¹ [17, pág. 139].

⁵² Citado na Subseção 6.1.3, página 26 desta tese.

⁵³ Ver a discussão sobre o posicionamento dos cilindros na Seção D.3 do Apêndice D.

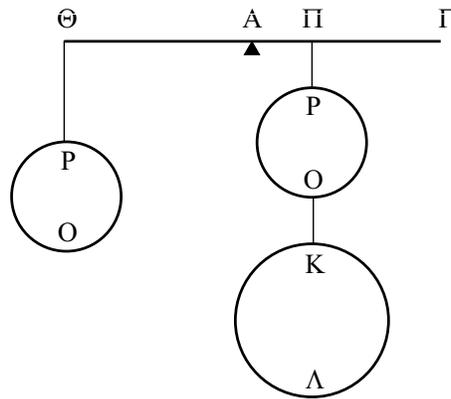


Figura 9.40: Alavanca em equilíbrio ao redor do ponto A com o círculo de raio PO atuando em Θ , juntamente com os círculos de raios PO e $K\Lambda$ atuando em Π .

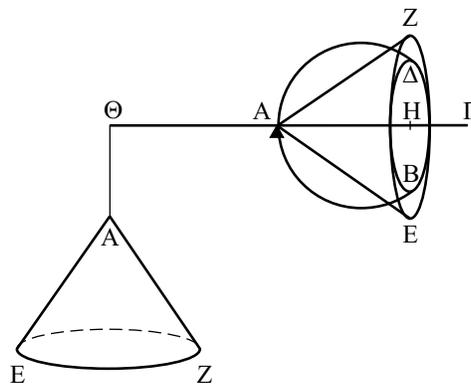


Figura 9.41: Alavanca em equilíbrio ao redor do ponto A, com o cone à esquerda atuando em Θ , juntamente com o cone e o segmento esférico à direita apoiados sobre o braço da alavanca.

Arquimedes supõe este cilindro MN cortado por um plano perpendicular ao seu eixo em dois cilindros, M e N. O cilindro MN é cortado de tal forma que somente o cilindro M equilibre o cone AEZ atuando sobre Φ , Figura 9.44.

Por hipótese vem que o cilindro MN possui mesmo peso que o cone AEZ. Logo, o cone AEZ colocado à esquerda na Figura 9.42 que estava atuando em Θ pode ser substituído por este cilindro MN, Figura 9.45, sem afetar o equilíbrio da alavanca.

Por hipótese Arquimedes considerou que a parte M deste cilindro atuando em Θ equilibrava ao cone AEZ atuando em Φ , como indicado na Figura 9.44. Logo podemos tirar da Figura 9.45, sem afetar o equilíbrio da alavanca, o cilindro M atuando em Θ juntamente com o cone AEZ atuando em Φ . Ficamos então com a situação da Figura 9.46 (a). Ou seja, com o cilindro N atuando em Θ e equilibrando a alavanca em relação ao ponto A com o segmento esférico

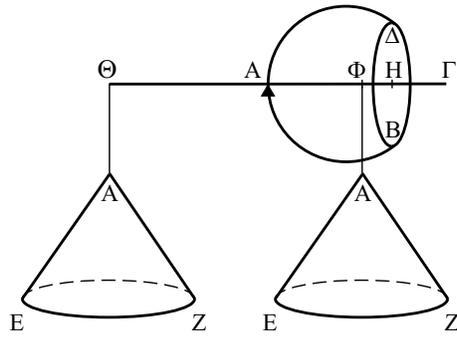


Figura 9.42: Alavanca em equilíbrio ao redor do ponto A, com o cone à esquerda atuando em Θ , juntamente com o segmento esférico à direita apoiado sobre o braço da alavanca e com o cone à direita atuando apenas sobre Φ .

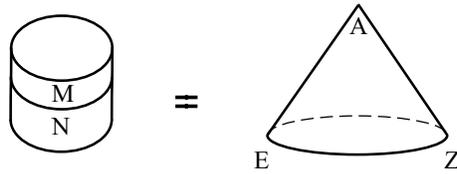


Figura 9.43: Cilindro MN com mesmo peso que o cone AEZ.

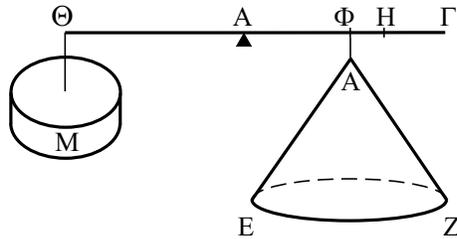


Figura 9.44: Supõe-se que o cilindro M atuando em Θ equilibra a alavanca ao redor do ponto A quando o cone AEZ está atuando em Φ .

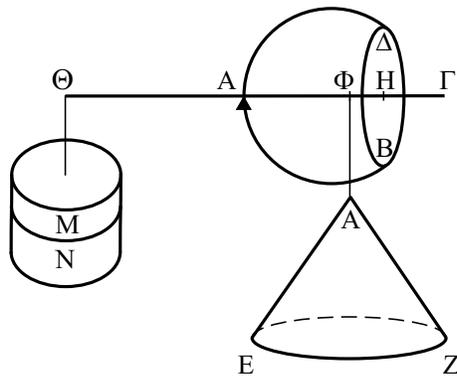


Figura 9.45: Cilindro MN equilibrando o cone AEZ e o segmento esférico.

distribuído sobre o braço da alavanca.

Vamos supor que X seja o centro de gravidade do segmento esférico. Portanto, aplicando agora o Postulado 6 de *Sobre o Equilíbrio dos Planos*,⁵⁴ temos que se a situação da Figura 9.46

⁵⁴Citado na Subseção 6.1.3, página 26 desta tese, ver ainda [33, págs. 215 a 220 e 226].

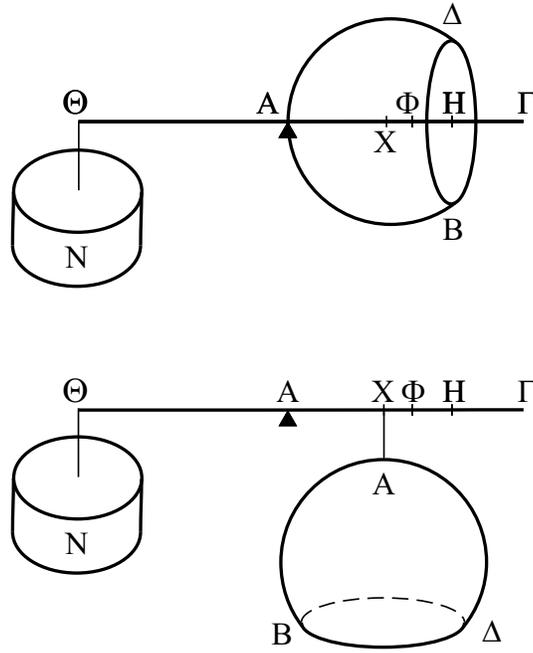


Figura 9.46: (a) Cilindro N equilibrando o segmento esférico distribuído sobre o braço da alavanca. (b) Cilindro N equilibrando o segmento esférico atuando sobre seu centro de gravidade.

era de equilíbrio, vai continuar equilibrada quando o segmento esférico atua apenas sobre X, como indicado na Figura 9.46 (b).

Mas já foi demonstrado pelo Teorema VII que (ver a Figura 9.39):

$$\frac{\text{Segmento esférico } BAA\Delta}{\text{Cone } BAA\Delta} = \frac{\text{Raio da esfera} + H\Gamma}{H\Gamma} = \frac{H\Xi}{H\Gamma}. \quad (9.103)$$

Sabendo que⁵⁵ os volumes de cones com a mesma altura são proporcionais às respectivas bases, e sendo as áreas dos círculos proporcionais aos quadrados de seus diâmetros (ou de seus raios), podemos escrever:

$$\frac{\text{Cone } BAA\Delta}{\text{Cone } EAZ} = \frac{\text{Círculo de diâmetro } B\Delta}{\text{Círculo de diâmetro } EZ} = \frac{Q(BH)}{Q(HE)}. \quad (9.104)$$

Mas também temos, pela propriedade do triângulo retângulo:⁵⁶

$$Q(BH) = R(H\Gamma, HA). \quad (9.105)$$

Por construção temos ainda que:

$$Q(HE) = Q(HA). \quad (9.106)$$

Portanto:

$$\frac{\text{Cone } BAA\Delta}{\text{Cone } EAZ} = \frac{H\Gamma}{HA}. \quad (9.107)$$

⁵⁵Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 11, citada na Seção 9.4, página 62 desta tese, ver ainda [23, Vol. 3, pág. 406] e [24, pág. 546].

⁵⁶Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 8, Corolário, citado na Subseção 8.3.1, página 41 desta tese, ver ainda [23, Vol. 2, pág. 211] e [24, pág. 241].

Multiplicando membro a membro as Equações (9.103) e (9.107), obtemos:

$$\frac{\text{Segmento esférico } BAA\Delta}{\text{Cone } EAZ} = \frac{H\Xi}{HA} . \quad (9.108)$$

Mas pela definição do ponto X dado pela Equação (9.94) temos que:

$$\frac{AX}{XH} = \frac{HA + 4H\Gamma}{HA + 2H\Gamma} . \quad (9.109)$$

Invertendo vem que:

$$\frac{HX}{XA} = \frac{HA + 2H\Gamma}{HA + 4H\Gamma} . \quad (9.110)$$

A Proposição 18 do Livro V de *Os Elementos* de Euclides afirma que:⁵⁷

Caso magnitudes, tendo sido separadas, estejam em proporção, também, tendo sido compostas, estarão em proporção.

Pela propriedade *componendo* das proporções obtemos que:⁵⁸

$$\frac{HX + XA}{XA} = \frac{(HA + 2H\Gamma) + (HA + 4H\Gamma)}{HA + 4H\Gamma} . \quad (9.111)$$

Ou então:

$$\frac{HA}{XA} = \frac{6H\Gamma + 2HA}{HA + 4H\Gamma} . \quad (9.112)$$

Por construção temos que:

$$H\Xi = H\Gamma + (\text{raio da esfera}) , \quad (9.113)$$

Ou seja:

$$H\Xi = \frac{4H\Gamma + 4\frac{A\Gamma}{2}}{4} . \quad (9.114)$$

Mas:

$$A\Gamma = AH + H\Gamma . \quad (9.115)$$

De onde:

$$H\Xi = \frac{4H\Gamma + 2H\Gamma + 2HA}{4} = \frac{6H\Gamma + 2HA}{4} . \quad (9.116)$$

Da mesma maneira, pela definição do ponto Φ temos que:

$$AH = 4H\Phi . \quad (9.117)$$

Pela Figura 9.39 verificamos que:

$$\Gamma\Phi = A\Gamma - A\Phi , \quad (9.118)$$

⁵⁷[24, pág. 223].

⁵⁸Ver a Equação (7.22) na teoria das proporções.

e ainda:

$$A\Phi = AH - H\Phi . \quad (9.119)$$

E sendo:

$$A\Gamma = AH + H\Gamma , \quad (9.120)$$

temos que:

$$\Gamma\Phi = (AH + H\Gamma) - AH + H\Phi = H\Gamma + H\Phi = H\Gamma + \frac{AH}{4} , \quad (9.121)$$

e ainda:

$$\Gamma\Phi = \frac{4H\Gamma + HA}{4} . \quad (9.122)$$

Substituindo as Equações (9.116) e (9.122) na Equação (9.112), vem:

$$\frac{HA}{XA} = \frac{H\Xi}{\Gamma\Phi} . \quad (9.123)$$

Pelas propriedades das proporções temos ainda que:

$$\frac{H\Xi}{HA} = \frac{\Gamma\Phi}{XA} . \quad (9.124)$$

Mas já foi demonstrado na Equação (9.108) que:

$$\frac{\text{Segmento esférico } BA\Delta}{\text{Cone } EAZ} = \frac{H\Xi}{HA} . \quad (9.125)$$

Portanto, substituindo na Equação (9.125) a Equação (9.124), chegamos a:

$$\frac{\text{Segmento esférico } BA\Delta}{\text{Cone } EAZ} = \frac{\Gamma\Phi}{XA} . \quad (9.126)$$

Mas como o cilindro M equilibra o cone EAZ em relação ao ponto A, e o centro de gravidade do cilindro é Θ e aquele do cone é Φ , concluímos pela lei da alavanca que:

$$\frac{\text{Cone } EAZ}{\text{Cilindro } M} = \frac{A\Theta}{A\Phi} = \frac{A\Gamma}{A\Phi} . \quad (9.127)$$

Com isto podemos concluir a demonstração. Sendo o cone EAZ igual à soma dos cilindros M e N por construção, podemos escrever:

$$\text{Cone } EAZ = \text{Cilindro } M + \text{Cilindro } N . \quad (9.128)$$

Pela Equação (9.127) vem que:

$$\frac{\text{Cilindro } M + \text{Cilindro } N}{\text{Cilindro } M} = \frac{A\Gamma}{A\Phi} . \quad (9.129)$$

O Corolário da Proposição 19 do Livro V de *Os Elementos* de Euclides afirma que.⁵⁹

⁵⁹[24, pág. 225].

Disso, é evidente que, caso magnitudes, tendo sido compostas, estejam em proporção, também estarão em proporção, por conversão: o que era preciso provar.

Por esta propriedade das proporções, juntamente com a Equação (9.129), temos então:

$$\frac{\text{Cilindro } M + \text{Cilindro } N}{\text{Cilindro } M + \text{Cilindro } N - \text{Cilindro } M} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma - A\Phi} . \quad (9.130)$$

Ou seja:

$$\frac{\text{Cilindro } M + \text{Cilindro } N}{\text{Cilindro } N} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Phi} . \quad (9.131)$$

Combinando esta Equação com a Equação (9.128) vem:

$$\frac{\text{Cone } EAZ}{\text{Cilindro } N} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Phi} = \frac{A\Theta}{\Gamma\Phi} . \quad (9.132)$$

Multiplicando membro a membro as Equações (9.126) e (9.132) obtemos finalmente:

$$\frac{\text{Segmento esférico } BA\Delta}{\text{Cilindro } N} = \frac{A\Theta}{AX} . \quad (9.133)$$

Mas esta é a lei da alavanca para o segmento $BA\Delta$ e o cilindro N em equilíbrio em relação ao ponto A , com seus centros de gravidade nos pontos X e Θ , respectivamente. Assim, concluímos que o centro de gravidade do segmento $BA\Delta$ é o ponto X . Este centro de gravidade está caracterizado pela relação matemática dada pela Equação (9.94).

9.9.1 Importância do Teorema IX

- Novamente temos Arquimedes utilizando seu método para calcular o centro de gravidade de um corpo.
- Sabia-se que Arquimedes havia calculado o centro de gravidade não apenas de um hemisfério, mas de qualquer segmento esférico, já que utilizou estes resultados para estudar o equilíbrio de um corpo com este formato flutuando em um líquido em seu trabalho *Sobre os Corpos Flutuantes*.⁶⁰ Infelizmente a parte final da primeira parte deste trabalho chegou mutilada até nós, faltando a maior parte da obra. Com a descoberta de *O Método* ficou-se sabendo pelo menos como ele havia calculado estes centros de gravidade.

9.10 Demonstração Física do Teorema XII: Volume da Unha Cilíndrica

Enunciado do Teorema:

Se for inscrito em um prisma reto de bases quadradas, um cilindro com as bases nos quadrados opostos e sua superfície tangente aos quatro paralelogramos restantes, e se for traçado um plano pelo centro de um dos círculos de base do cilindro e por um dos lados do quadrado oposto, a figura cortada pelo plano traçado, é a sexta parte de todo o prisma.

⁶⁰Tradução para o português em [35].

O sólido descrito por Arquimedes é conhecido como *unha cilíndrica*. A sua forma pode ser visualizada com o auxílio da Figura 9.47. Em (a) temos o prisma e o cilindro a partir dos quais a unha cilíndrica é obtida, estando ela representada na letra (b).

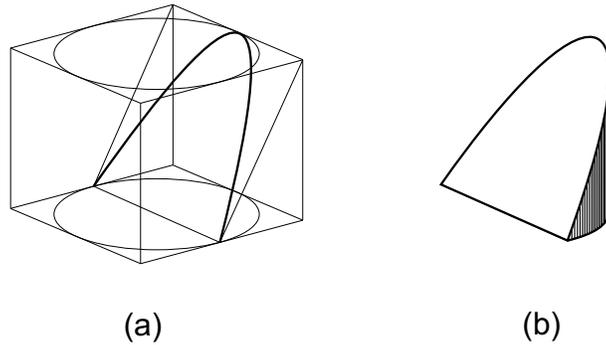


Figura 9.47: (a) Vista do prisma de bases quadradas com o cilindro inscrito, juntamente com o plano que define a unha cilíndrica. (b) Vista em perspectiva da unha cilíndrica.

Os sólidos estudados neste teorema são bem mais complexos que nos casos anteriores. Para chegar a uma equação da alavanca que permita resolver o problema, Arquimedes divide o problema em duas partes, sendo a primeira o Teorema XII e a segunda o Teorema XIII.

A primeira figura do teorema é obtida fazendo um corte dos sólidos por um plano passando pelo eixo e perpendicular às bases. A figura assim obtida representa o corte dos sólidos visto de perfil. Na Figura 9.48, $\Delta\Gamma$ representa o eixo comum do prisma e do cilindro, enquanto que $B\Gamma$ é o eixo de simetria (diâmetro) da parábola obtida pelo corte do plano inclinado sobre o cilindro. O paralelogramo $A\Phi B\Omega$ é a figura resultante do corte do prisma e do cilindro pelo plano passando pelo eixo. Seja traçada a reta EZ perpendicular a $\Gamma\Delta$, dividindo-a pela metade. Por EZ passa-se um plano perpendicular às bases do cilindro.

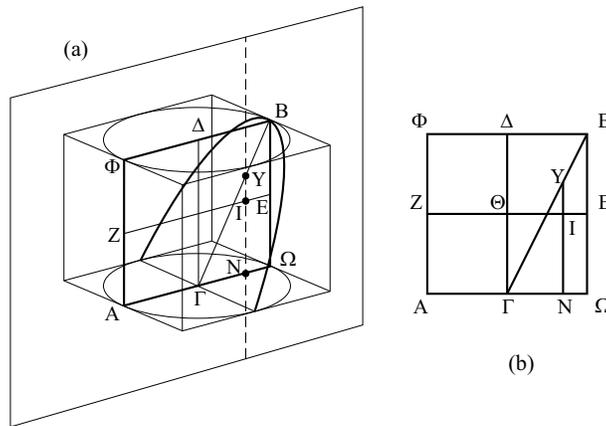


Figura 9.48: (a) Vista dos sólidos cortados por um plano passando pelo eixo e perpendicular às bases. (b) Primeira Figura do Teorema XII (paralelogramo de corte).

A segunda figura usada por Arquimedes corresponde a um corte dos sólidos por um plano paralelo às bases e passando pelo ponto médio do eixo, ou seja, pelo ponto Θ . Portanto, a figura obtida nestas condições mostra uma visão de cima. Na Figura 9.49 o paralelogramo $PNOM\Xi$ representa o corte do prisma por um plano paralelo à base e passando pelo ponto médio do eixo. O círculo inscrito representa o corte do cilindro pelo mesmo plano.

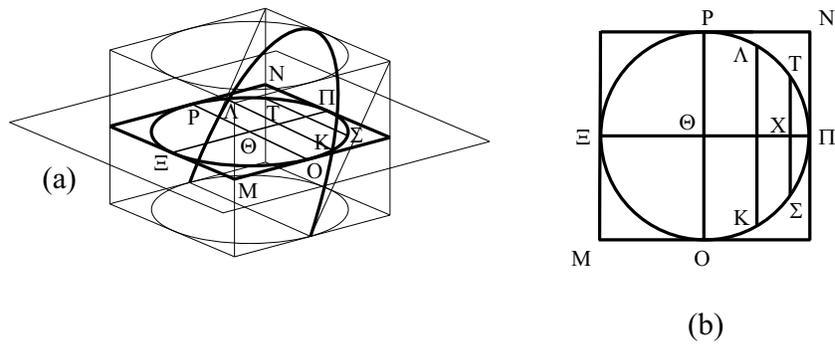


Figura 9.49: (a) Vista dos sólidos cortados por um plano paralelo às bases. (b) Segunda Figura do Teorema XII (quadrado com círculo inscrito).

Nesta Figura 9.49 a reta $K\Lambda$ é a interseção do plano inclinado que gerou a unha com o mesmo plano horizontal. A reta $T\Sigma$ é uma reta qualquer, paralela a $K\Lambda$, traçada no semicírculo $O\Pi P$. Sobre a reta $T\Sigma$ levantamos um plano perpendicular às bases. Este plano cortará no semicilindro, um paralelogramo que tem um lado igual a $T\Sigma$ e o outro lado igual à altura do cilindro. A interseção deste mesmo plano com a unha cilíndrica será também um paralelogramo com um lado igual a $T\Sigma$ e o outro lado igual à reta NY da Figura 9.48.

Os paralelogramos obtidos pela interseção deste plano passando por $T\Sigma$ com o semicilindro e com a unha cilíndrica, bem como a posição da reta NY , estão mostrados na Figura 9.50.

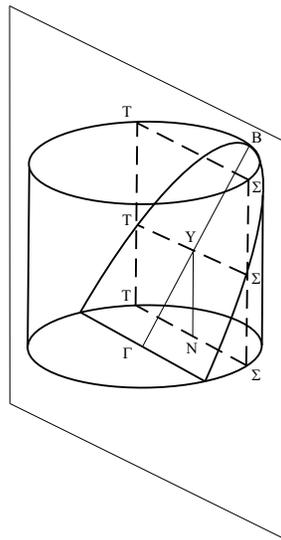


Figura 9.50: Vista em perspectiva dos paralelogramos obtidos pelo corte dos sólidos pelo plano passando por $T\Sigma$.

A partir da geometria das Figuras 9.48 (b) e 9.49 (b), Arquimedes deduz a seguinte proporção:

$$\frac{\Xi\Theta}{\Theta X} = \frac{\text{Paralelogramo no semicilindro}}{\text{Paralelogramo na unha cilíndrica}} \quad (9.134)$$

Atribuindo peso distribuído uniformemente nos paralelogramos, a Equação (9.134) pode ser considerada como representando uma alavanca em equilíbrio em relação ao ponto Θ , tendo de um lado o paralelogramo do semicilindro (paralelogramo maior na Figura 9.50) permanecendo

no seu lugar, e do outro lado o paralelogramo da unha cilíndrica (paralelogramo menor na Figura 9.50) transportado para o ponto Ξ e com o seu centro de gravidade em Ξ . Isto está indicado na Figura 9.51.

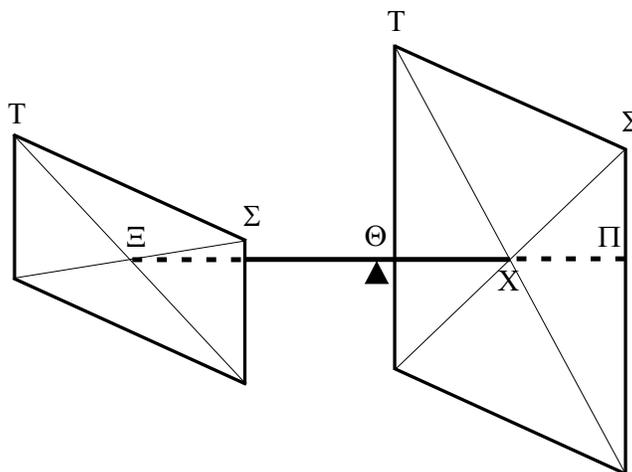


Figura 9.51: Alavanca $\Xi\Pi$ em equilíbrio ao redor do fulcro em Θ . O paralelogramo maior é obtido do semicilindro, enquanto que o menor é obtido da unha cilíndrica. Estes paralelogramos são ortogonais ao eixo da alavanca, com seus centros atuando em X e Ξ , respectivamente.

O Lema 6 de *O Método* afirma que:

O centro de gravidade de todo paralelogramo é o ponto de encontro das diagonais.

Por este Lema vem que o paralelogramo do semicilindro tem como centro de gravidade o ponto X . Portanto, este centro de gravidade corresponde ao ponto médio da reta $T\Sigma$ na Figura 9.49 (b). Então podemos concluir que a alavanca fica em equilíbrio em relação ao ponto Θ com o paralelogramo maior cujo centro de gravidade foi colocado em X , juntamente com o paralelogramo menor cujo centro de gravidade foi colocado em Ξ .

Da mesma maneira, qualquer outra reta paralela a $K\Lambda$ na Figura 9.49 (b) dentro do semicírculo, juntamente com o plano levantado sobre ela, darão origem a outros paralelogramos que também estarão em equilíbrio sobre a alavanca em relação ao ponto Θ .

Então todos os paralelogramos do semicilindro, permanecendo nos seus lugares, estarão em equilíbrio com todos os paralelogramos da unha cilíndrica transportados sobre a alavanca e colocados no ponto Ξ .

Por consequência, o semicilindro, permanecendo no seu lugar, estará em equilíbrio em relação ao ponto Θ com a unha cilíndrica transportada e colocada no travessão da alavanca em Ξ , de modo que o seu centro de gravidade seja o ponto Ξ . Esta condição de equilíbrio está mostrada em perspectiva na Figura 9.52 (a). Na Figura 9.52 (b) mostramos a mesma situação mas com a unha cilíndrica apoiada em Ξ por um fio de peso desprezível, com seu centro de gravidade verticalmente abaixo de Ξ .

Neste ponto Arquimedes interrompe a dedução do volume da unha cilíndrica pois precisa de informações adicionais que serão obtidas no Teorema XIII.

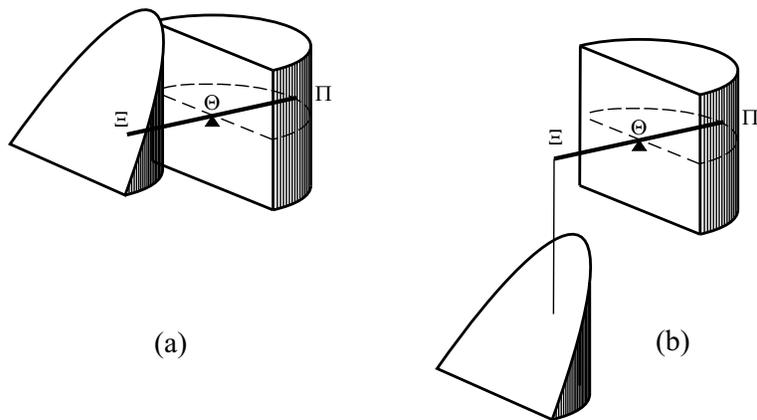


Figura 9.52: (a) Visão em perspectiva da alavanca em equilíbrio ao redor do ponto Θ . O semicilindro está distribuído sobre um dos braços da alavanca, enquanto que a unha cilíndrica está atuando apenas sobre a extremidade Ξ . (b) A mesma situação mas agora com a unha cilíndrica apoiada por um fio de peso desprezível, com seu centro de gravidade verticalmente abaixo de Ξ .

9.11 Demonstração Física do Teorema XIII: Volume da Unha Cilíndrica — Continuação

Este teorema tem como objetivo obter uma outra alavanca em equilíbrio, que Arquimedes vai comparar com a alavanca do Teorema XII (Figura 9.52). O objetivo é chegar na determinação do volume da unha cilíndrica.

O Teorema XII terminou provando que a unha cilíndrica apoiada apenas sobre Ξ fica em equilíbrio, sobre a alavanca $\Pi\Xi$ com fulcro em Θ , com o semicilindro $O\Pi P$ e altura $\Gamma\Delta$ (Figura 9.48) permanecendo no seu lugar distribuído sobre o braço da alavanca. Este equilíbrio está representado na Figura 9.52.

Para a demonstração do Teorema XIII, Arquimedes usa o mesmo artifício do teorema anterior, que consiste em cortar os sólidos com um plano paralelo às bases, pelo ponto médio da altura, Figura 9.53 (a), e trabalhar sobre a imagem plana obtida por este corte, Figura 9.53 (b).

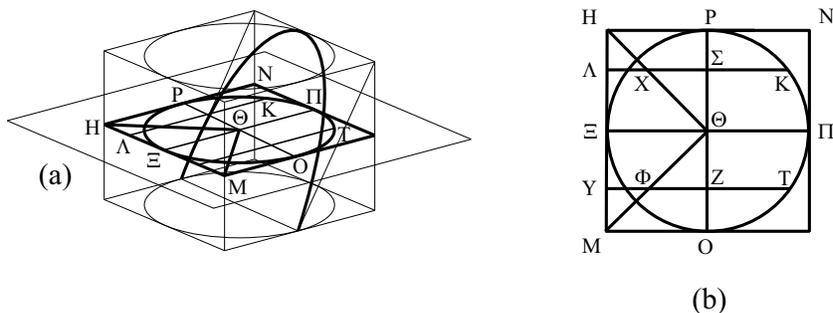


Figura 9.53: (a) Vista dos sólidos com o plano de corte paralelo às bases e passando pelo ponto médio da altura. (b) Vista superior das interseções.

Nesta Figura, o quadrado MN representa a interseção do plano de corte com o prisma total, o círculo $O\Xi\Pi$ representa a interseção do plano de corte com o cilindro inscrito, enquanto o semicírculo $O\Pi\Pi$ é a interseção do plano de corte com o mesmo semicilindro obtido no Teorema XII.

A demonstração do teorema continua traçando as retas $H\Theta$ e $M\Theta$. Sobre elas levantam-se os planos perpendiculares à base. Arquimedes obtém desta maneira um prisma reto de base triangular (igual ao triângulo ΘHM) que é um quarto do prisma total de base quadrada.

Para chegar a esta relação de $1/4$ entre os volumes dos prismas, podemos citar aqui a Proposição 32 do Livro XI de *Os Elementos* de Euclides:⁶¹

Os sólidos paralelepípedos que estão sob a mesma altura estão entre si como as bases.

Arquimedes traça agora no quadrado MN e no semicírculo $OP\Pi$ duas retas paralelas, ΛK e YT , equidistantes de $\Pi\xi$. Estas retas cortam a circunferência do semicírculo nos pontos K e T , e cortam o diâmetro OP nos pontos Σ e Z . Elas cortam também as retas $H\Theta$ e $M\Theta$ nos pontos X e Φ , respectivamente.

Sobre as retas ΛK e YT são levantados dois planos perpendiculares ao diâmetro OP . Um destes planos cortará o semicilindro segundo um paralelogramo que tem um lado igual a $K\Sigma$ e o outro lado igual à altura do cilindro. Cortará também o prisma ΘHM segundo um paralelogramo que tem um lado igual a ΛX e o outro lado também igual à altura do prisma.

Pelo mesmo motivo teremos no semicilindro um outro paralelogramo de lado TZ com a mesma altura do semicilindro, enquanto que no prisma haverá um outro paralelogramo cujo lado será $Y\Phi$ e que terá a mesma altura do prisma.⁶²

Na Figura 9.54 (b) temos uma visão em perspectiva destes quatro paralelogramos.

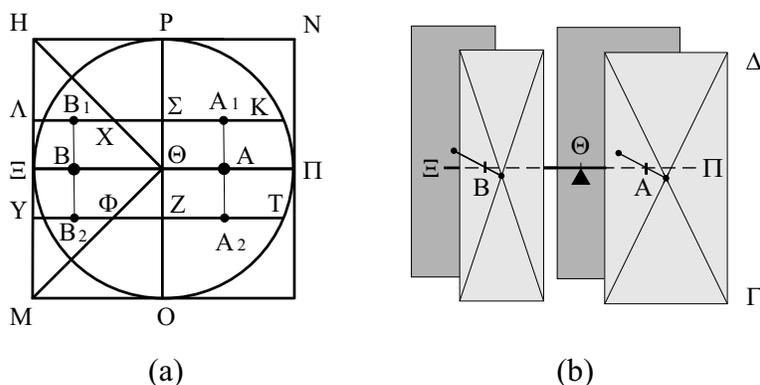


Figura 9.54: Visão em perspectiva dos dois paralelogramos do semicilindro passando por $\Pi\Theta$ e dos dois paralelogramos do prisma passando por $H\Theta M$.

O Lema 3 de *O Método* afirma que:

Se os centros de gravidade de um número tão grande quanto se queira de grandezas estiverem situados sobre a mesma reta, [então] o centro de gravidade da grandeza composta por todas essas grandezas, também estará sobre a mesma reta.

Já a quarta Proposição de *Sobre o Equilíbrio dos Planos* afirma que:⁶³

Se duas grandezas iguais não possuem o mesmo centro de gravidade, o centro de gravidade da grandeza composta por estas [duas] grandezas estará no ponto médio do segmento de reta ligando os centros de gravidade das [duas] grandezas.

⁶¹[24, pág. 513].

⁶²Lembramos que a altura comum do cilindro, do semicilindro e do prisma é a reta $\Delta\Gamma$, mostrada na Figura 9.48.

⁶³Ver [33, pág. 224].

Seja B_1 na Figura 9.54 (a) o ponto médio de ΛX , B_2 o ponto médio de $Y\Phi$, enquanto que B é o ponto médio entre B_1 e B_2 . Da mesma forma, seja A_1 na Figura 9.54 (a) o ponto médio de ΣK , A_2 o ponto médio de ZT , enquanto que A é o ponto médio entre A_1 e A_2 . Pelo Lema 3 de *O Método*, juntamente com a Proposição 4 de *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, sabemos que o centro de gravidade da grandeza composta pelos dois paralelogramos do semicilindro passando por $\Pi\Theta$ está localizado no ponto A da reta $\Xi\Pi$. Da mesma maneira, o centro de gravidade da grandeza composta pelos dois paralelogramos do prisma passando por $H\Theta M$ está no ponto B da mesma reta.

No Apêndice C mostramos que (ver a Figura 9.54):

$$\Sigma K \cdot \Sigma K = \Sigma P \cdot \Sigma O . \quad (9.135)$$

Utilizando esta Equação e analisando a Figura 9.54 podemos obter as seguintes relações:

$$\frac{R(\Sigma K, \Delta\Gamma) + R(ZT, \Delta\Gamma)}{R(\Lambda X, \Delta\Gamma) + R(Y\Phi, \Delta\Gamma)} = \frac{\Sigma K}{\Lambda X} = \frac{\Sigma K}{\Sigma P} = \frac{\Sigma K \cdot \Sigma K}{\Sigma P \cdot \Sigma K} = \frac{\Sigma P \cdot \Sigma O}{\Sigma P \cdot \Sigma K} = \frac{\Sigma O}{\Sigma K} , \quad (9.136)$$

e

$$\frac{\Sigma O}{\Sigma K} = \frac{\Sigma P + 2\Sigma\Theta}{\Sigma K} = \frac{\Lambda X + 2X\Sigma}{\Sigma K} = \frac{\frac{\Lambda X}{2} + X\Sigma}{\frac{\Sigma K}{2}} = \frac{B\Theta}{A\Theta} . \quad (9.137)$$

Destas duas Equações vem então:

$$\frac{R(\Sigma K, \Delta\Gamma) + R(ZT, \Delta\Gamma)}{R(\Lambda X, \Delta\Gamma) + R(Y\Phi, \Delta\Gamma)} = \frac{B\Theta}{A\Theta} . \quad (9.138)$$

Esta é a relação matemática mais importante. Sendo as áreas dos retângulos proporcionais a seus pesos, ela indica que a alavanca $\Xi\Pi$ vai ficar em equilíbrio ao redor do fulcro Θ se os dois retângulos do semicilindro estiverem apoiados sobre A, juntamente com os dois retângulos do prisma apoiados sobre B, Figura 9.54 (b).

Este equilíbrio também vai ocorrer para qualquer conjunto de quatro retângulos obtidos por todo par de retas ΛK e YT indo desde $\Theta\Sigma = \Theta Z = 0$ até $\Theta\Sigma = \Theta Z = \Theta P$. Ao considerar todas elas em conjunto, obtemos um equilíbrio da alavanca ao redor de Θ com o semicilindro distribuído ao longo do braço $\Theta\Pi$, juntamente com o prisma distribuído ao longo do braço $\Xi\Theta$, Figura 9.55.

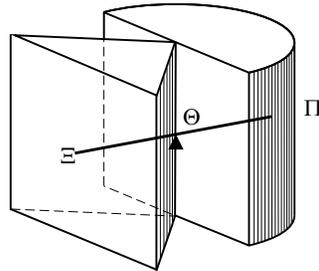


Figura 9.55: O prisma e o semicilindro em equilíbrio apoiados sobre os braços da alavanca.

Comparamos agora na Figura 9.56 o equilíbrio obtido no Teorema XII com aquele do Teorema XIII.

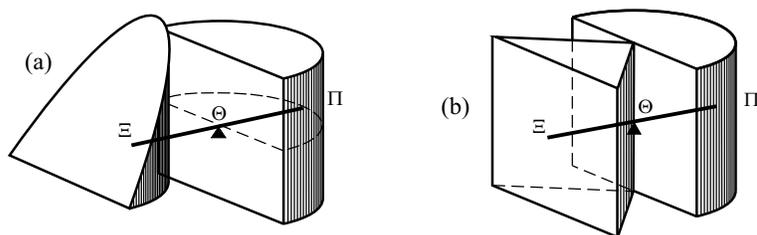


Figura 9.56: (a) Alavanca em equilíbrio do Teorema XII com a unha atuando apenas sobre a extremidade Ξ da alavanca, enquanto que o semicilindro está distribuído sobre seu braço. (b) Alavanca em equilíbrio do Teorema XIII, com o prisma e o semicilindro distribuídos sobre os braços da alavanca.

No primeiro caso temos o semicilindro equilibrando a unha cilíndrica atuando apenas sobre a extremidade Ξ , enquanto que no segundo caso temos o semicilindro equilibrando o prisma distribuído sobre o braço da alavanca. Logo podemos concluir que o prisma triangular, permanecendo no seu lugar, fica em equilíbrio com a unha cilíndrica colocada em uma das extremidades da alavanca, Figura 9.57.

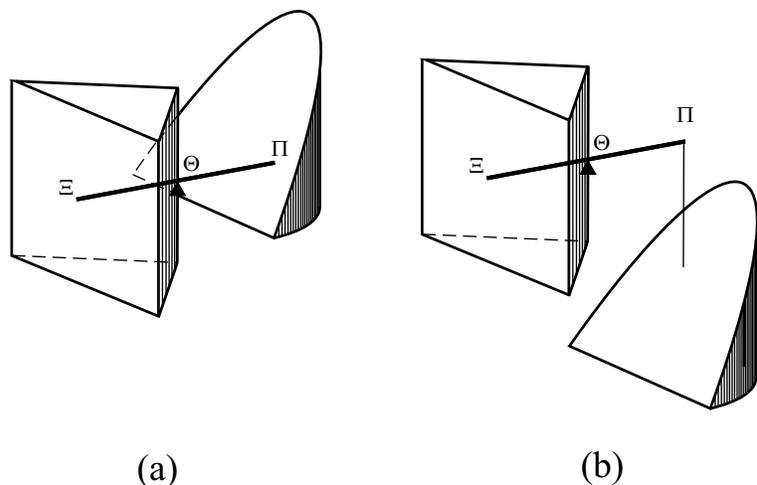


Figura 9.57: (a) Alavanca em equilíbrio ao redor de Θ com a unha cilíndrica atuando apenas na extremidade Π enquanto que o prisma está distribuído sobre o braço. (b) Mesma situação com a unha dependurada por um fio passando por Π , enquanto seu centro de gravidade está verticalmente abaixo de Π .

O Lema 9 de *O Método* afirma que:

O centro de gravidade de todo prisma é o [ponto] que divide o eixo em duas partes iguais.

O “eixo” a que Arquimedes se refere aqui é o segmento de reta unindo os centros de gravidade das duas bases, como fica evidente na aplicação que ele faz desta palavra durante a prova deste teorema.⁶⁴ Neste caso temos um prisma com base triangular. Pelo Lema 5 de *O Método*, citado

⁶⁴[11, pág. 316, Nota 1], [44, pág. 109] e [30, pág. 131].

na Seção 9.2, página 49 desta tese, sabemos que o centro de gravidade do triângulo $H\Theta M$ da Figura 9.54 (a) é o ponto Ψ ao longo da reta $\Xi\Theta$ que satisfaz à seguinte relação:

$$\Psi\Theta = \frac{2}{3}\Xi\Theta . \quad (9.139)$$

Este ponto Ψ indicado na Figura 9.58 é também o centro de gravidade do prisma passando por $H\Theta M$ já que este plano é perpendicular ao eixo do prisma, dividindo-o em duas partes iguais.

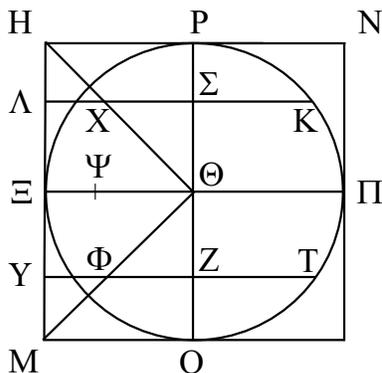


Figura 9.58: O ponto Ψ é o centro de gravidade do prisma.

Pelo sexto Postulado de *Sobre o Equilíbrio dos Planos* citado na Subseção 6.1.3, página 26 desta tese, vem que esta alavanca vai continuar em equilíbrio quando o prisma atuar sobre a alavanca concentrado apenas sobre seu centro de gravidade, ou seja, como se todo o seu peso estivesse concentrado neste ponto. Isto está representado na Figura 9.59.

Pela lei da alavanca temos então que:

$$\frac{\text{Unha cilíndrica}}{\text{Prisma triangular}} = \frac{\frac{2}{3}\Xi\Theta}{\Theta\Pi} . \quad (9.140)$$

Mas:

$$\Xi\Theta = \Theta\Pi . \quad (9.141)$$

Então:

$$\frac{\text{Unha cilíndrica}}{\text{Prisma triangular}} = \frac{2}{3} . \quad (9.142)$$

Sendo o volume do prisma triangular 1/4 do volume do prisma total, concluímos que:

$$\text{Unha cilíndrica} = \frac{1}{6}\text{Prisma} . \quad (9.143)$$

Esta é a representação matemática do Teorema XIII.

9.12 Comentários sobre o Teorema XIV: Uma Outra Determinação do Volume da Unha Cilíndrica

Neste teorema Arquimedes apresenta um caminho diferente e mais simples para alcançar o mesmo objetivo dos dois teoremas anteriores, a saber, a determinação do volume da unha cilíndrica.

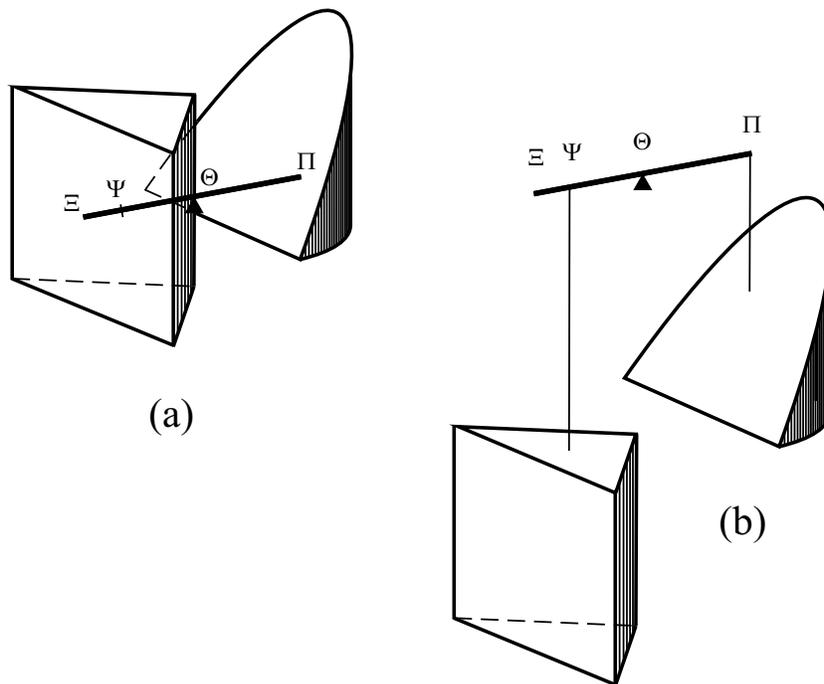


Figura 9.59: (a) Situação final de equilíbrio da alavanca ao redor do ponto Θ com o prisma atuando apenas sobre Ψ , enquanto que a unha atua apenas sobre a extremidade Π . (b) Mesma situação no caso em que os dois sólidos estão dependurados por fios de pesos desprezíveis. O centro de gravidade do prisma está verticalmente abaixo de Ψ , enquanto que o centro de gravidade da unha está verticalmente abaixo de Π .

Seja novamente um prisma reto de bases quadradas, no qual está inscrito um cilindro. Na Figura 9.60 a base do prisma é representada pelo quadrado $AB\Gamma\Delta$, enquanto que a base do cilindro é o círculo $EZH\Theta$.

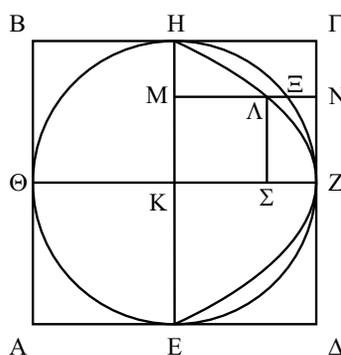


Figura 9.60: Construção geométrica do Teorema XIV.

Traçamos um plano passando pelo segmento HE e pelo lado correspondente a $\Gamma\Delta$ no quadrado oposto à base $AB\Gamma\Delta$. O plano assim traçado determina a unha cilíndrica no cilindro. O mesmo plano determina no prisma um outro prisma cujo volume é $1/4$ do volume do prisma total. Este novo prisma é delimitado por três paralelogramos e por dois triângulos opostos, como pode ser

visto na Figura 9.61.

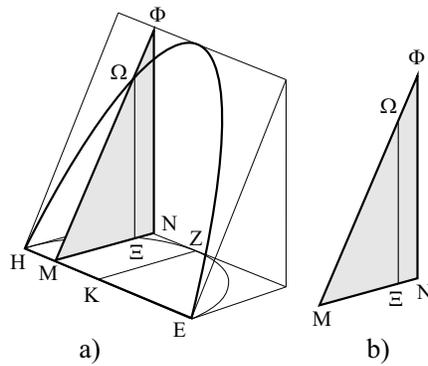


Figura 9.61: (a) Vista lateral do prisma e da unha cilíndrica. (b) Triângulos semelhantes $MN\Phi$ e $M\Xi\Omega$ obtidos pelo plano cortante.

Seja traçada no semicírculo EZH , que é a base da unha cilíndrica, uma parábola passando pelos pontos E , H e Z , Figura 9.61.

Seja traçada no paralelogramo $EHT\Delta$ da Figura 9.60 uma reta qualquer MN paralela ao diâmetro KZ . Esta reta encontrará a parábola no ponto Λ e a circunferência do círculo $EZH\Theta$ no ponto Ξ . Sobre a reta MN seja levantado um plano perpendicular a EH . Este plano cortará do prisma um triângulo retângulo $MN\Phi$, ver a Figura 9.61. Este plano também cortará a unha cilíndrica segundo um outro triângulo retângulo $M\Xi\Omega$.

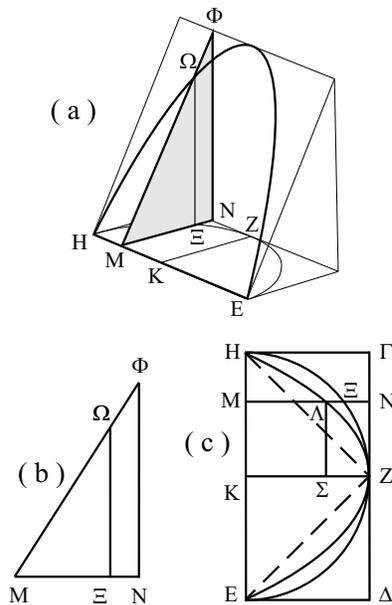


Figura 9.62: (a) Perspectiva do prisma com a unha cilíndrica. (b) Vista lateral dos triângulos obtidos pelo plano cortante. (c) Vista da base.

A partir da Equação da parábola EZH e das características geométricas dos pontos traçados na Figura 9.62 (c), pode-se demonstrar que:

$$\frac{MN}{M\Lambda} = \frac{Q(MN)}{Q(M\Xi)} . \quad (9.144)$$

Nesta Equação indicamos com $Q(MN)$ e $Q(M\Xi)$ os quadrados de MN e $M\Xi$, respectivamente.

Também demonstra-se, pela semelhança dos triângulos $MN\Phi$ e $M\Xi\Omega$, que a área do triângulo $MN\Phi$ está para a área do triângulo $M\Xi\Omega$ assim como o quadrado de MN está para o quadrado de $M\Xi$:

$$\frac{\text{Triângulo } MN\Phi}{\text{Triângulo } M\Xi\Omega} = \frac{Q(MN)}{Q(M\Xi)} . \quad (9.145)$$

Mas o triângulo $MN\Phi$ é o triângulo do prisma e o triângulo $M\Xi\Omega$ é o triângulo da unha cilíndrica. Portanto, destas duas Equações temos que:

$$\frac{\text{Triângulo do prisma}}{\text{Triângulo da unha}} = \frac{Q(MN)}{Q(M\Xi)} = \frac{MN}{M\Lambda} . \quad (9.146)$$

Da mesma maneira, demonstra-se que estas conclusões são válidas para qualquer outra reta paralela a KZ e o plano correspondente perpendicular a EH . Mas o prisma é preenchido por todos os triângulos $MN\Phi$, enquanto que a unha cilíndrica é preenchida por todos os triângulos $M\Xi\Omega$.

Por outro lado, todas as retas MN preenchem o paralelogramo $EH\Gamma\Delta$, enquanto que todas as retas $M\Lambda$ preenchem o segmento de parábola EHZ .

Então concluímos que:

$$\frac{\text{Prisma}}{\text{Unha cilíndrica}} = \frac{\text{Paralelogramo } EH\Gamma\Delta}{\text{Segmento de parábola } EHZ} . \quad (9.147)$$

Mas foi demonstrado anteriormente⁶⁵ que a área do segmento de parábola é igual a $4/3$ da área do triângulo com a mesma base e a mesma altura (triângulo EHZ na Figura 9.62 (c)). Mas a área desse mesmo triângulo é igual a metade da área do paralelogramo (retângulo) $EH\Gamma\Delta$. Portanto, temos que:

$$\text{Paralelogramo } EH\Gamma\Delta = \frac{3}{2}(\text{Segmento de parábola } EHZ) . \quad (9.148)$$

Das Equações (9.147) e (9.148) vem que:

$$\frac{\text{Prisma}}{\text{Unha cilíndrica}} = \frac{3}{2} . \quad (9.149)$$

Ou seja:

$$\text{Unha cilíndrica} = \frac{2}{3}(\text{Prisma}) . \quad (9.150)$$

Mas o volume do prisma considerado na dedução é $1/4$ do volume do prisma total que consta do enunciado dos Teoremas XII, XIII e XIV. Com isto chegamos então na formulação matemática deste teorema, a saber:

$$\text{Unha cilíndrica} = \frac{1}{6}(\text{Prisma total}) . \quad (9.151)$$

⁶⁵Ou seja, no Teorema I de *O Método*.

9.12.1 Importância dos Teoremas XII a XIV

- Em seu trabalho *Sobre Conoides e Esferoides* Arquimedes já havia obtido o volume de elipsoides, paraboloides e hiperboloides de revolução em termos dos volumes de certos cones e cilindros. Mas não se encontrou nenhum paralelepípedo que tivesse seu volume igual ao destes elipsoides, paraboloides e hiperboloides de revolução. Já no caso dos teoremas atuais, Arquimedes encontrou o volume da unha cilíndrica como sendo a sexta parte do prisma circunscrito à unha. Ou seja, obteve o volume de uma figura delimitada por uma superfície curva em termos do volume do paralelepípedo. Este resultado é análogo ao resultado do Teorema I, já que então havia obtido a área de uma figura delimitada por uma linha curva, a parábola, em termos da área de uma figura delimitada apenas por retas, o triângulo inscrito na parábola.

A relevância principal destes Teoremas XII a XIV foi apontada pelo próprio Arquimedes na carta introdutória de *O Método* endereçada a Eratóstenes. Após enunciar o teorema sobre o volume da unha cilíndrica afirmou o seguinte:⁶⁶

Mas acontece que estes teoremas [volume da unha cilíndrica e volume obtido pela intersecção de dois cilindros] são diferentes daqueles encontrados anteriormente. Com efeito, [anteriormente] comparamos aquelas figuras [sólidas, isto é], os conoides, os esferoides⁶⁷ e seus segmentos, ao volume de cones e cilindros, e nenhuma delas foi encontrada equivalente a uma figura sólida delimitada por planos, enquanto que cada uma destas figuras sólidas [ou seja, o volume da unha cilíndrica e o volume obtido pela intersecção de dois cilindros], delimitadas por dois planos e superfícies cilíndricas, é encontrada equivalente a uma figura sólida delimitada por planos.

- Os últimos teoremas de *O Método* referem-se a cilindros cortados por planos, ou inscritos em prismas. É interessante observar aqui o interesse prático que despertaram alguns desses teoremas ao longo dos séculos.

No primeiro século d.C. Heron de Alexandria, como já foi visto no Capítulo 5 desta tese, estudou o volume definido pelo entrelaçamento de dois cilindros, usando este tratado de Arquimedes.

No V século d.C. os arquitetos Antêmio de Trales e Isidoro de Mileto, ao construir a igreja de Santa Sofia em Constantinopla, se inspiraram no último teorema de *O Método*, cuja demonstração hoje está perdida definitivamente, mas cujo enunciado encontra-se na introdução da carta que Arquimedes enviou para Eratóstenes.⁶⁸

Se em um cubo for inscrito um cilindro tendo suas bases sobre quadrados opostos e sua superfície [lateral] tangente aos quatro planos restantes, e seja inscrito no mesmo cubo um outro cilindro tendo suas bases em outros [dois] paralelogramos e a superfície tangente aos quatro planos restantes, a figura delimitada pelas superfícies dos cilindros e situada no [interior dos] dois cilindros é dois terços de todo o cubo.

⁶⁶Ver a página 105 desta tese.

⁶⁷Arquimedes refere-se aqui ao tratado *Sobre Conoides e Esferoides* enviado por carta a Dositheu. Este tratado estuda os sólidos que hoje chamamos de *paraboloides*, *elipsoides* e *hiperboloides* de revolução.

⁶⁸Ver a página 105 desta tese.

A aplicação prática do cálculo do volume deste sólido resultou na cúpula da igreja de Santa Sofia, que é considerada como o mais belo exemplo da arte bizantina e que pode ser admirada ainda hoje, 1500 anos depois da sua construção.

- O Teorema XIII pode ser usado para encontrar o centro de gravidade de um semicírculo, como mostrado no Apêndice E.

Capítulo 10

A Tradução Comentada de *O Método*

A obra *O Método* de Arquimedes é conhecida atualmente no original em grego.¹ Ela já foi traduzida para o alemão,² para o italiano,³ para o espanhol,⁴ para o francês,⁵ para o português,⁶ e para o inglês.⁷

Apresentamos a seguir a nossa tradução deste livro, a partir do texto grego original. Os trechos entre colchetes não estão no texto grego original, mas foram acrescentados visando facilitar a compreensão de algumas frases e expressões.

Tradução

[Pág. 82]⁸

10.1 MÉTODO SOBRE OS TEOREMAS MECÂNICOS — DE ARQUIMEDES PARA ERATÓSTENES

10.2 [Introdução]

Arquimedes para Eratóstenes, saudações.

Eu te enviei anteriormente alguns teoremas que encontrei, tendo indicado seus enunciados, convidando-te a encontrar as demonstrações que não mostrei até o momento. Estes eram os enunciados dos teoremas enviados:

¹[8].

²[37].

³[5].

⁴[6] e [7].

⁵[8].

⁶[13].

⁷[9], [10], [11] e [12].

⁸Indicamos aqui as páginas do original em grego, que coincidem com a paginação da tradução em francês, como aparece em [8].

Do primeiro: “Se em um prisma reto tendo por base um paralelogramo,⁹ for inscrito um cilindro tendo suas bases [situadas] nos paralelogramos opostos e seus lados¹⁰ nos planos restantes do prisma, e se pelo centro do círculo de base do cilindro e por um lado do quadrado situado na face oposta for traçado um plano, o plano traçado cortará do cilindro um segmento limitado por dois planos e pela superfície do cilindro, um dos planos [sendo] o plano traçado, enquanto que o outro [é] aquele que contém a base do cilindro e a superfície [cilíndrica] limitada pelos planos indicados; o segmento cortado do cilindro é a sexta parte de todo o prisma.”

Este o enunciado do segundo teorema:¹¹ “Se em um cubo for inscrito um cilindro tendo suas bases sobre paralelogramos¹² opostos e sua superfície [lateral]

[Pág. 83]

tangente aos quatro planos restantes, e se for inscrito no mesmo cubo um outro cilindro tendo suas bases em outros [dois] paralelogramos e a superfície tangente aos quatro planos restantes, a figura delimitada pelas superfícies dos cilindros e situada no [interior dos] dois cilindros é dois terços de todo o cubo.”

Mas acontece que estes teoremas são diferentes daqueles encontrados anteriormente. Com efeito, comparamos aquelas figuras [sólidas, isto é], os conoides, os esferoides¹³ e seus segmentos, ao volume de cones e cilindros, e nenhuma delas foi encontrada equivalente a uma figura sólida delimitada por planos, enquanto que cada uma destas figuras sólidas, delimitadas por dois planos e superfícies cilíndricas, é encontrada equivalente a uma figura sólida delimitada por planos.

Te envio as demonstrações destes teoremas, redigidas neste livro.

Mas percebendo, como afirmo, que você é estudioso, que domina de modo excelente a filosofia e que sabe apreciar a pesquisa matemática sobre as coisas que se apresentem, considerarei [interessante] descrever e definir neste mesmo livro as características de um método pelo qual será possível adquirir os recursos para poder abordar assuntos de matemática por meio de considerações mecânicas. Por outro lado, estou persuadido de que este método não é menos útil também para a demonstração destes mesmos teoremas. Com efeito, certas propriedades que inicialmente me pareceram evidentes por via mecânica, foram demonstradas posteriormente por via geométrica, pois uma demonstração feita por meio desse método [mecânico] não corresponde a uma verdadeira demonstração.

[Pág. 84]

Porém, é mais fácil conseguir a demonstração depois de ter adquirido algum conhecimento dos objetos da pesquisa por meio desse método, do que procurar sem nenhum conhecimento. [Por esse motivo,] daqueles teoremas sobre o cone e a pirâmide, dos quais Eudoxo foi o primeiro a encontrar a demonstração, [ou seja] que o cone é a terceira parte do cilindro e a pirâmide a terceira parte do prisma, tendo mesma base e mesma altura, deve-se atribuir uma parte não pequena a Demócrito,¹⁴ que foi o primeiro a revelar o enunciado dessa propriedade das figuras

⁹Arquimedes, quase sempre, usa o termo *paralelogramo* com o sentido de retângulo ou quadrado. Neste caso específico trata-se de um quadrado.

¹⁰Por *lados* do cilindro, Arquimedes entende as suas geratrizes.

¹¹Não se encontrou a demonstração deste Teorema nas páginas que ainda existem de *O Método*.

¹²Aqui também fica claro que o paralelogramo é um quadrado.

¹³Arquimedes refere-se aqui ao tratado *Sobre Conoides e Esferoides* enviado por carta a Dositheu. Este tratado estuda os sólidos que hoje chamamos de *paraboloides*, *elipsoides* e *hiperboloides* de revolução.

¹⁴Demócrito (aproximadamente 460-370 a.C.) foi um filósofo grego, discípulo de Leucipo (nasceu ao redor de

indicadas, sem demonstração.

Mas acontece que a descoberta dos teoremas agora demonstrados me ocorreu da mesma maneira que para os teoremas precedentes. Assim decidi redigir e publicar esse método por ter falado dele anteriormente¹⁵ e para não parecer a alguns que tenha dito palavras vazias, [e também] porque estou persuadido de que [este método] trará uma contribuição não pequena para a matemática. Pois sou da opinião de que alguns dos contemporâneos ou sucessores encontrarão, por meio do método demonstrado, outros teoremas que ainda não me ocorreram.

Portanto, descrevo inicialmente o primeiro [teorema] que me foi revelado pela mecânica. Isto é, que todo segmento de parábola¹⁶ é [equivalente a] quatro terços do triângulo que tem mesma base e mesma altura. Em seguida [descrevo] cada um [dos outros teoremas] examinados pelo mesmo método. No fim do livro apresento as demonstrações geométricas dos teoremas cujos enunciados já enviei a você.

10.3 Lemas

1. Se¹⁷ de uma grandeza for retirada uma outra grandeza, e se o mesmo ponto é o centro de gravidade

[Pág. 85]

da grandeza inteira e da grandeza retirada, este mesmo ponto é o centro de gravidade da [grandeza] restante.

2. Se de uma grandeza for retirada uma outra grandeza, e se o mesmo ponto não [é] o centro de gravidade da grandeza inteira e da grandeza retirada, [então] o centro de gravidade da grandeza restante está sobre o prolongamento da reta que une os centros de gravidade da grandeza inteira e da [parte] retirada, separando da mesma [um segmento] que tenha a mesma razão com a reta entre os centros indicados que tem o peso da grandeza retirada com o peso da grandeza restante.^{18, 19}

500 a.C., florescendo ao redor de 430 a.C.), que formulou uma teoria atômica do universo.

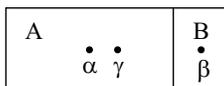
¹⁵Ver a carta para Dositeu que aparece em seu trabalho *Quadratura da Parábola*, [15, págs. 233-234].

¹⁶O termo “parábola” foi introduzido posteriormente por Apolônio de Pérga (262-190 a.C.). Arquimedes chama a parábola de “seção de cone reto.”

¹⁷Mugler, Rufini e Dijksterhuis utilizam aqui a palavra “Lemas,” enquanto que Heath usa o termo “Proposições,” [8, pág. 84], [5, pág. 104], [11, pág. 315] e [12, pág. 14]. De acordo com Mugler a palavra do texto grego que corresponde a essas traduções, *IIPOΛAMBANOMENA*, parece ter sido acrescentada por Heiberg.

¹⁸Ver *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 8, [33, pág. 230].

¹⁹Sejam três grandezas A , B e C tal que $C = A + B$. Vamos representar seus centros de gravidade por α , β e γ . Seus pesos serão dados por P_A , P_B e P_C . A distância entre α e γ será representada por d_A , enquanto que a distância entre β e γ será representada por d_B . Na Figura abaixo estas três grandezas estão representadas por retângulos. Podemos considerar A como a grandeza restante, B como a grandeza retirada, e $C = A + B$ como a grandeza inteira.



Este Lema afirma que α está ao longo do prolongamento da reta unindo β com γ , de tal maneira que:

$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{P_B}{P_A}. \tag{10.1}$$

3. Se os centros de gravidade de um número tão grande quanto se queira de grandezas estiverem situados sobre a mesma reta, [então] o centro de gravidade da grandeza composta por todas essas grandezas, também estará sobre a mesma reta.²⁰
4. O centro de gravidade de todo [segmento] de reta é o ponto que divide o segmento em duas partes iguais.²¹
5. O centro de gravidade de todo triângulo é o ponto de interseção das retas traçadas dos ângulos do triângulo aos pontos médios dos lados [opostos].²²
6. O centro de gravidade de todo paralelogramo é o ponto de encontro das diagonais.²³
7. O centro de gravidade de um círculo é também o centro do círculo.
8. O centro de gravidade de todo cilindro é o [ponto] que divide o eixo em duas partes iguais.
9. O centro de gravidade de todo prisma é o [ponto] que divide o eixo em duas partes iguais.²⁴
10. O centro de gravidade de todo cone está situado sobre o eixo, dividindo-o de modo que o segmento próximo do vértice seja o triplo do restante.²⁵

[Pág. 86]

Nos serviremos também deste teorema,²⁶ já escrito no [livro] *Sobre Conoides*:²⁷

Se grandezas em qualquer número possuem a mesma razão com outras grandezas de mesmo número, tomadas duas a duas na mesma posição, e se, além disso, as primeiras grandezas, seja em sua totalidade seja em parte, possuem uma razão qualquer com outras grandezas, e se as segundas grandezas possuem na mesma ordem, a mesma razão com outras grandezas, [então] a razão entre a soma das primeiras grandezas e a soma das grandezas que foram ditas proporcionais a elas, é igual à razão entre a soma das segundas grandezas e a soma das grandezas ditas [proporcionais a elas].²⁸

²⁰Ver *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposições 4 e 5, [33, págs. 224 e 225], e Livro II, Proposição 2, [32].

²¹Ver *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 4, [33, pág. 224].

²²Ver *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 14, [33, pág. 238].

²³Ver *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 10, [33, pág. 232].

²⁴O “eixo” a que se refere aqui é o segmento de reta unindo os centros de gravidade das duas bases, como fica evidente na aplicação que Arquimedes faz desta palavra na Proposição 13 de *O Método*, [11, pág. 316, Nota 1], [44, pág. 109] e [30, pág. 131].

²⁵Não se encontra a prova deste Lema nas obras de Arquimedes que chegaram até nós. Para uma reconstrução desta demonstração seguindo a linha de raciocínio de Arquimedes, ver [43].

²⁶O Teorema ou Proposição a seguir é algumas vezes citado como sendo o Lema 11 de *O Método*.

²⁷Ver *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposição 1, [15, págs. 105-106].

²⁸[21, pág. 106] e [15, págs. 105-106]: Em notação moderna, sejam as grandezas: A_1, A_2, \dots, A_n e B_1, B_2, \dots, B_n , tais que: $A_1/A_2 = B_1/B_2$; $A_2/A_3 = B_2/B_3$; etc. Sejam também as seguintes sequências de grandezas: C_1, C_2, \dots, C_n e D_1, D_2, \dots, D_n , tais que: $A_1/C_1 = B_1/D_1$; $A_2/C_2 = B_2/D_2$; etc. Então teremos:

$$\frac{\Sigma A_i}{\Sigma C_i} = \frac{\Sigma B_i}{\Sigma D_i}. \quad (10.2)$$

10.4 [Teorema] I. [Área de um Segmento Parabólico.]

Seja o segmento [de parábola] $AB\Gamma$ compreendido entre a reta $A\Gamma$ e a parábola $AB\Gamma$.²⁹ Divida-se $A\Gamma$ em duas partes iguais pelo ponto Δ , seja traçada ΔBE paralela ao diâmetro,³⁰ e sejam unidas as [retas] AB e $B\Gamma$.

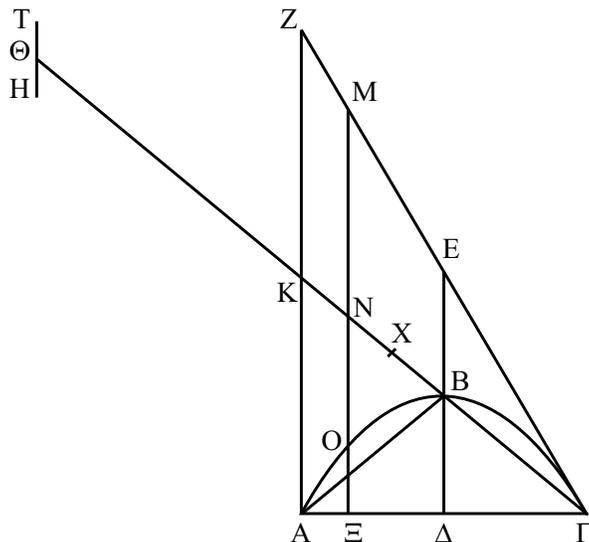


Figura 10.1: Figura do Teorema I.

Digo que o segmento $AB\Gamma$ é [equivalente a] quatro terços do triângulo $AB\Gamma$.

[Pág. 87]

Sejam traçadas a partir dos pontos A e Γ a [reta] AZ paralela a ΔBE e a [reta] ΓZ tangente à parábola, e prolongue-se ΓB até o ponto K . Seja ΓK igual a $K\Theta$. Imagine-se que $\Gamma\Theta$ seja uma alavanca e K o seu meio,³¹ e seja $M\Xi$ uma paralela qualquer a $E\Delta$.

Portanto, como ΓBA é uma parábola, como ΓZ é uma tangente e como $\Gamma\Delta$ é [traçada] ordenadamente,³² EB é igual a $B\Delta$, como está demonstrado nos *Elementos*.³³ Por este motivo e

²⁹Ver a Figura 10.1.

³⁰O texto de Arquimedes neste ponto diz claramente *paralela ao diâmetro*. Portanto, isto indica que se trata de um caso geral. A figura que é apresentada aqui está de acordo com Mugler, [19, pág. 86], já que estamos seguindo seu texto em nossa tradução. Esta figura de Mugler dá a impressão que a prova se refere apenas ao caso particular no qual a base do segmento é ortogonal ao diâmetro, representado em nossa Figura 9.2 (a). Mas a prova de Arquimedes se aplica também ao caso geral no qual a base do segmento pode estar inclinada em relação ao diâmetro, Figura 9.2 (b). O caso geral foi discutido na Seção 9.2.

³¹O ponto K será considerado o fulcro da alavanca.

³²Com esse termo “ordenadamente,” Arquimedes entende que o segmento de reta $\Gamma\Delta$ é paralelo à tangente da parábola em B . Em época posterior este segmento de reta será chamado de *ordenada*. Ver a Seção 8.2.

³³No Apêndice B, Seção B.3, apresentamos uma demonstração desta afirmação. O livro *Elementos* a que

por serem ZA e $MΞ$ paralelas a $EΔ$, MN é igual³⁴ a $NΞ$ e ZK [é igual] a KA . E como $ΓA$ está para $AΞ$ assim como $MΞ$ está para $ΞO$, pois está demonstrado em um Lema,³⁵ e como $ΓA$ está para $AΞ$ assim como $ΓK$ está para KN e como, [finalmente,] $ΓK$ é igual a $KΘ$, a razão entre $ΘK$ e KN é igual à razão entre $MΞ$ e $ΞO$.

E como o ponto N é o centro de gravidade³⁶ da reta $MΞ$, pois MN é igual a $NΞ$, se colocarmos [o segmento de reta] TH , igual a $ΞO$, de modo que o seu centro de gravidade seja o [ponto] $Θ$ e que $TΘ$ seja igual a $ΘH$, o [segmento de reta] $TΘH$, equilibrará o [segmento de reta] $MΞ$, permanecendo em seu lugar, pois $ΘN$ está cortado na razão inversa dos pesos TH e $MΞ$, e [devido a que] $ΘK$ está para KN assim como³⁷ $MΞ$ está para HT . Portanto, o centro de gravidade [da grandeza composta por] estes dois pesos³⁸ é [o ponto] K .

Da mesma maneira, quantas paralelas a $EΔ$ forem traçadas no triângulo $ZAΓ$ equilibrarão, permanecendo nos seus lugares, os segmentos cortados delas pela parábola e transportados ao ponto $Θ$, de modo que o centro de gravidade da grandeza composta por uns e por outros seja o ponto K . E desde que o triângulo $ΓZA$ é constituído pelos [segmentos de reta] traçados no triângulo $ΓZA$, e o segmento [de parábola] $ABΓ$ é constituído pelos [segmentos de reta] tomados no segmento [de parábola] da mesma maneira que $ΞO$, então o triângulo $ZAΓ$ equilibrará, permanecendo no seu lugar, o segmento de parábola colocado ao redor do centro de

[Pág. 88]

gravidade $Θ$, [o equilíbrio ocorrendo] em relação ao ponto K , de modo que o centro de gravidade da soma das duas grandezas seja K .

Seja então dividido $ΓK$ pelo [ponto] X de modo que $ΓK$ seja o triplo de KX . Portanto, o ponto X será o centro de gravidade do triângulo $AZΓ$, como foi demonstrado no livro *Sobre os Equilíbrios*.³⁹ E posto que o triângulo $ZAΓ$, permanecendo no seu lugar, equilibra-se em relação ao ponto K com o segmento $BAΓ$ colocado ao redor do centro de gravidade $Θ$, e [posto] que o centro de gravidade do triângulo $ZAΓ$ é o ponto X , [então] a razão entre o triângulo $AZΓ$ e o segmento $ABΓ$ colocado ao redor do centro [de gravidade] $Θ$ é igual à razão entre $ΘK$ e XK . Agora, $ΘK$ é o triplo de KX . Portanto, o triângulo $AZΓ$ é também o triplo do segmento $ABΓ$. Mas o triângulo $ZAΓ$ é também o quádruplo do triângulo $ABΓ$, pois ZK é igual a KA , e $AΔ$ é igual⁴⁰ a $ΔΓ$. Consequentemente, o segmento [de parábola] $ABΓ$ é [equivalente a] quatro terços do triângulo $ABΓ$.

Isto certamente não foi demonstrado pelo que foi dito,⁴¹ mas leva a crer que a conclusão seja

Arquimedes se refere aqui não é a famosa obra de geometria de Euclides, já que esta não trata das cônicas. Provavelmente estes *Elementos* se referem aqui a uma obra anterior de Aristeu ou de Euclides, atualmente perdidas, que tratavam das propriedades básicas ou elementares das seções cônicas, [6, págs. 38 e 91, Nota 5] e [5, págs. 108-109].

³⁴Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 9, [24, pág. 216]: “As [magnitudes] que têm a mesma razão para a mesma [magnitude] são iguais entre si; e aquelas, para as quais a mesma [magnitude] tem a mesma razão, são iguais.”

³⁵ Apresentamos uma demonstração deste Lema no Apêndice A, Seção A.1.

³⁶Ver o Lema 4.

³⁷*Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposições 6 e 7, [33, págs. 227 e 229].

³⁸Ver o Lema 3.

³⁹Ver o Lema 5 e *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 15, [33, pág. 239].

⁴⁰De fato, a partir da proporção $ΔΓ/AΓ = ΔB/AK$, deduzimos que $ΔB = (1/2)AK = (1/4)AZ$. Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 8.3.1, página 41 desta tese, ver ainda [23, Volume 2, pág. 200] e [24, pág. 235].

⁴¹Este parágrafo consta originalmente no início do Teorema II relacionado ao volume da esfera. Mas como ele

verdadeira. Portanto, vendo que [a propriedade] não está demonstrada, mas pressentindo que a conclusão é verdadeira, daremos a demonstração geométrica, que nós mesmos encontramos e publicamos anteriormente.⁴²

10.5 [Teorema] II. [*Volume da Esfera.*]

Toda esfera é o quádruplo do cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e uma altura igual ao raio da esfera; e o cilindro que tem uma base igual ao círculo máximo de uma esfera e uma altura igual ao diâmetro da esfera é [equivalente a] três meios da esfera.

Assim analisa-se por este método:

[Pág. 89]

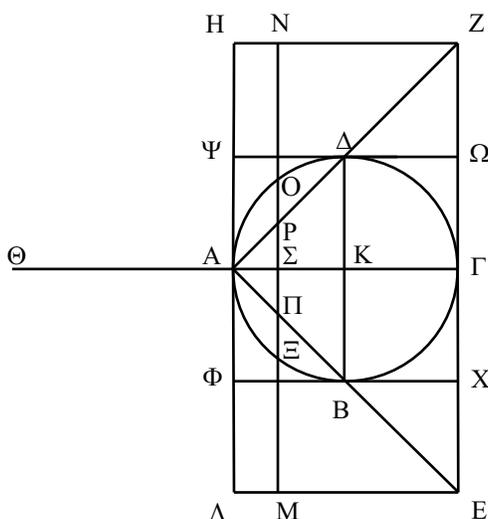


Figura 10.2: Figura do Teorema II.

Seja uma esfera, na qual $AB\Gamma\Delta$ é o círculo máximo, assim como $A\Gamma$ e $B\Delta$ diâmetros perpendiculares entre si. Seja, na esfera, um círculo de diâmetro $B\Delta$, perpendicular ao círculo $AB\Gamma\Delta$. Sobre este círculo perpendicular seja construído um cone com vértice no ponto A . Prolongue-se a superfície [lateral] do cone e corte-se o cone com um plano [passando] por Γ e paralelo à base do cone. Portanto, [a interseção] será um círculo perpendicular a $A\Gamma$, com diâmetro EZ .

Sobre este círculo seja construído um cilindro tendo o eixo igual a $A\Gamma$. Sejam $E\Lambda$ e ZH os lados do cilindro.⁴³ Prolongue-se ΓA e coloque-se sobre o prolongamento $A\Theta$ igual a $A\Gamma$. Imagine-se que $\Gamma\Theta$ seja uma alavanca cujo meio seja A .⁴⁴

ainda trata da área da parábola, nos pareceu mais apropriado deslocá-lo para o fim do Teorema I.

⁴²Ver a *Quadratura da Parábola*, Proposições 14 a 17, [18, pág. 178 a 186]. Mas a demonstração geométrica prometida aqui para o tratado *O Método* não foi encontrada.

⁴³As geratrizes do cilindro situadas no plano da figura.

⁴⁴O ponto A será considerado o fulcro da alavanca.

Seja traçada MN, uma paralela qualquer a BΔ, a qual corte o círculo ABΓΔ em Ξ e O, o diâmetro AΓ em Σ, a reta AE em Π, e a reta AZ em P. Sobre a reta MN construa-se um plano perpendicular a AΓ. Este [plano] cortará o cilindro

[Pág. 90]

segundo um círculo de diâmetro MN, a esfera ABΓΔ segundo um círculo de diâmetro ΞO, e o cone AEZ segundo um círculo de diâmetro ΠP.

O [retângulo de lados] ΓA e AΣ é igual ao [retângulo de lados] MΣ e ΣΠ, por serem iguais⁴⁵ AΓ e ΣM de um lado, e AΣ e ΠΣ de outro lado. Além disso, o [retângulo de lados] ΓA e AΣ é equivalente ao [quadrado de lado] AΞ,⁴⁶ isto é, à soma⁴⁷ dos quadrados de lados ΞΣ e ΣΠ. Portanto, o [retângulo de lados] MΣ e ΣΠ é equivalente à soma dos [quadrados de lados] ΞΣ e ΣΠ.

Por outro lado, ΓA está para AΣ assim como MΣ está para ΣΠ, e ΓA é igual a AΘ. Portanto, a razão entre ΘA e AΣ é igual à razão entre MΣ e ΣΠ e, conseqüentemente, [é igual] à razão entre o [quadrado] sobre MΣ e o [retângulo de lados] MΣ e ΣΠ.

Mas foi demonstrado que o [retângulo de lados] MΣ e ΣΠ é equivalente à soma dos [quadrados de lados] ΞΣ e ΣΠ. Por conseguinte, a razão entre AΘ e AΣ é igual à razão do [quadrado] sobre MΣ para a soma dos [quadrados] sobre ΞΣ e ΣΠ.

Então o [quadrado] sobre MΣ está para a soma dos [quadrados] sobre ΞΣ e ΣΠ assim como⁴⁸ o [quadrado] sobre MN está para a soma dos [quadrados] sobre ΞO e ΠP. E esta [última razão] é igual à razão do círculo de diâmetro MN, situado no cilindro, para a soma dos dois círculos, dos quais um, [situado] no cone, tem diâmetro ΠP, e o outro, [situado] na esfera, tem diâmetro ΞO. Portanto, ΘA está para AΣ assim como o círculo no cilindro está para a soma do círculo na esfera e do círculo no cone.

Nestas condições, sendo que ΘA está para AΣ assim como o círculo no cilindro, permanecendo no seu lugar, está para a soma dos dois círculos de diâmetros ΞO e ΠP, deslocados para Θ de modo que Θ seja o centro de gravidade de cada um deles, então estes dois círculos estarão em equilíbrio em relação ao ponto A.

Será demonstrado da mesma maneira que, se for traçada uma outra paralela a EZ no paralelogramo ΛZ⁴⁹ e se for construído sobre a reta [assim] traçada um plano perpendicular a AΓ, o círculo determinado no cilindro, permanecendo no seu lugar, equilibrará

[Pág. 91]

em relação ao ponto A, a soma dos dois círculos determinados na esfera e no cone, transportados e colocados sobre a alavanca no ponto Θ, de modo que Θ seja o centro de gravidade de cada um dos dois.

Desta maneira, sendo o cilindro, a esfera e o cone assim preenchidos por tais círculos, o

⁴⁵Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 8.3.1, página 41 desta tese, ver ainda [23, Volume 2, pág. 200] e [24, pág. 235].

⁴⁶ Uma demonstração deste fato encontra-se no Apêndice C.

⁴⁷Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro I, Proposição 47, [24, pág. 132]. Nesta Proposição Euclides demonstra o teorema de Pitágoras, a saber: “Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.”

⁴⁸Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 15, [24, pág. 220]: “As partes têm a mesma razão que os seus igualmente múltiplos, tendo sido tomadas correspondentes.”

⁴⁹Arquimedes costuma indicar desta maneira o retângulo ΛZEH.

cilindro, permanecendo no seu lugar, equilibrará em torno do ponto A, a soma da esfera e do cone, deslocados sobre a alavanca para o ponto Θ , de modo que Θ seja o centro de gravidade de cada um dos dois. Por consequência, como os ditos sólidos estão em equilíbrio em torno do ponto A, o cilindro permanecendo com o centro de gravidade⁵⁰ em K, sendo a esfera e o cone deslocados, como foi dito, para o centro de gravidade Θ , o cilindro estará para a soma da esfera e do cone assim como ΘA [está] para AK .

Mas ΘA é o dobro de AK . Portanto, o cilindro é o dobro da soma da esfera e do cone. Mas [o cilindro] é o triplo⁵¹ do próprio cone. Então [a soma] de três cones é equivalente à [soma] de dois destes mesmos cones e de duas esferas. Sejam tirados os dois cones em comum. Por conseguinte, o cone que possui AEZ como triângulo passando pelo eixo, é equivalente à [soma das] duas esferas mencionadas. Mas o cone que possui AEZ como triângulo passando pelo eixo é equivalente a oito cones⁵² que possuem como triângulo passando pelo eixo o triângulo $AB\Delta$, por ser EZ o dobro de $B\Delta$.

Assim, os oito cones mencionados são equivalentes a duas esferas. Portanto, a esfera de círculo máximo $AB\Gamma\Delta$ é equivalente⁵³ ao quádruplo do cone que tem como vértice o ponto A e como base o círculo de diâmetro $B\Delta$ perpendicular a $A\Gamma$.

Agora, no paralelogramo⁵⁴ ΛZ , sejam traçadas pelos [pontos] B e Δ

[Pág. 92]

as [retas] ΦBX e $\Psi\Delta\Omega$ paralelas a $A\Gamma$, e imagine-se um cilindro tendo por bases os círculos de diâmetro $\Phi\Psi$ e $X\Omega$, e como eixo o [segmento] $A\Gamma$.

Nestas condições, o cilindro cujo paralelogramo passando pelo eixo é $\Phi\Omega$,⁵⁵ é o dobro⁵⁶ do cilindro cujo paralelogramo passando pelo eixo é $\Phi\Delta$,⁵⁷ e este [último cilindro] é o triplo do cone cujo triângulo passando pelo eixo é $AB\Delta$, como [foi demonstrado] nos *Elementos*.⁵⁸ Portanto, o cilindro cujo paralelogramo⁵⁹ passando pelo eixo é $\Phi\Omega$, é o sêxtuplo do cone cujo triângulo passando pelo eixo é $AB\Delta$. Mas foi demonstrado que a esfera cujo círculo máximo é $AB\Gamma\Delta$, é o quádruplo desse mesmo cone. Então o cilindro é [equivalente a] uma vez e meia a esfera, o que precisava ser demonstrado.⁶⁰

Demonstrado isto, [a saber,] que toda esfera é o quádruplo do cone que tem como base o círculo máximo e como altura o raio da esfera, surgiu a ideia de que a superfície de toda esfera⁶¹ fosse o quádruplo de seu círculo máximo. Com efeito, supus que, posto que todo círculo é equivalente

⁵⁰Ver o Lema 8.

⁵¹Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 10, citada na Seção 9.4, página 62 desta tese, ver ainda [23, Volume 3, pág. 400] e [24, pág. 543].

⁵²Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 12, citada na Seção 9.4, ver ainda [23, Volume 3, pág. 410] e [24, pág. 549].

⁵³Ver *Sobre a Esfera e o Cilindro*, Livro I, Proposição 34, [17, pág. 78].

⁵⁴Arquimedes chama paralelogramo ΛZ ao retângulo ΛHZE .

⁵⁵Arquimedes chama paralelogramo $\Phi\Omega$ ao quadrado $\Phi\Psi\Omega X$.

⁵⁶Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 14, citada na Seção 9.4, ver ainda [23, Volume 3, pág. 419] e [24, pág. 554].

⁵⁷Arquimedes chama $\Phi\Delta$ ao retângulo $\Phi\Psi\Delta B$.

⁵⁸A obra *Elementos* a que se refere aqui pode ser o conhecido livro de Euclides, [6, págs. 44 e 92, Nota 7]. Em particular, ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 10, citada na Seção 9.4, página 62 desta tese, ver ainda [23, Volume 3, pág. 400] e [24, pág. 543].

⁵⁹Arquimedes chama $\Phi\Omega$ ao quadrado $\Phi\Psi\Omega X$.

⁶⁰Ver *Sobre a Esfera e o Cilindro*, Livro I, Proposição 34, [17, pág. 78].

⁶¹Ver *Sobre a Esfera e o Cilindro*, Livro I, Proposição 33, [17, pág. 76].

uma alavanca da qual A é o ponto médio.⁶⁶

[Pág. 94]

Seja traçada no paralelogramo ΛZ a [reta] MN paralela a EZ e seja levantado sobre MN um plano perpendicular a $A\Gamma$. Este [plano] fará interseção com o cilindro segundo um círculo de diâmetro MN , com o elipsoide segundo⁶⁷ um círculo de diâmetro ΞO e com o cone segundo um círculo de diâmetro ΠP .

Posto que ΓA está para $A\Sigma$ como⁶⁸ EA está para $A\Pi$, isto é, assim como $M\Sigma$ está para⁶⁹ $\Sigma\Pi$, e posto que ΓA é igual $A\Theta$, então ΘA [estará] para $A\Sigma$ assim como $M\Sigma$ está para $\Sigma\Pi$.

Por conseguinte, $M\Sigma$ [está] para $\Sigma\Pi$ assim como [o quadrado] sobre $M\Sigma$ [está] para [o retângulo] $M\Sigma$, $\Sigma\Pi$. Mas o [retângulo] $M\Sigma$, $\Sigma\Pi$ é equivalente [à soma dos quadrados de lados] $\Pi\Sigma$ e $\Sigma\Xi$.

Portanto, como a razão entre o [retângulo] $A\Sigma$, $\Sigma\Gamma$ e o quadrado sobre $\Sigma\Xi$ é igual à razão entre o [retângulo] AK , $K\Gamma$, isto é, o quadrado sobre AK , e o quadrado sobre KB ⁷⁰ — pois estas duas razões [são iguais à razão] entre o lado transversal e o lado reto⁷¹ — e como a razão do [quadrado] sobre AK para o [quadrado] sobre KB é igual⁷² à razão [do quadrado] sobre $A\Sigma$ para o [quadrado] sobre $\Sigma\Pi$, então, permutando,⁷³ o [quadrado] sobre $A\Sigma$ estará para o [retângulo] $A\Sigma\Gamma$,⁷⁴ assim como o [quadrado] sobre $\Pi\Sigma$ está para o [quadrado] sobre $\Sigma\Xi$.

Mas o [quadrado] sobre $A\Sigma$ está para o [retângulo] $A\Sigma\Gamma$, assim como⁷⁵ o [quadrado] sobre $\Sigma\Pi$ está para o [retângulo] $\Sigma\Pi$, ΠM . Portanto, o [retângulo] $M\Pi$, $\Pi\Sigma$ é equivalente⁷⁶ ao [quadrado] sobre $\Xi\Sigma$. Seja adicionado o [quadrado] comum sobre $\Pi\Sigma$.

Portanto, o [retângulo] $M\Sigma$, $\Sigma\Pi$ é equivalente [à soma] dos [quadrados] sobre $\Pi\Sigma$ e $\Sigma\Xi$.

De onde ΘA está para $A\Sigma$ assim como o [quadrado] sobre $M\Sigma$ está para [a soma] dos [quadrados] sobre $\Pi\Sigma$ e $\Sigma\Xi$.

Então a razão do [quadrado] sobre $M\Sigma$ para [a soma] dos quadrados sobre $\Sigma\Xi$ e $\Sigma\Pi$ é igual⁷⁷ [à razão] do círculo de diâmetro MN no cilindro, para a soma dos dois círculos de diâmetros ΞO e ΠP . Assim o círculo de diâmetro MN , permanecendo no seu lugar, equilibrará em torno do

⁶⁶O ponto A será considerado o fulcro da alavanca.

⁶⁷Ver *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposição 11, [17, pág. 182].

⁶⁸Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 8.3.1, página 41 desta tese, ver ainda [23, Volume 2, pág. 200] e [24, pág. 235]. Nesta Proposição Euclides determina a proporcionalidade entre os lados de triângulos semelhantes.

⁶⁹Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 8.3.1, página 41 desta tese, ver ainda [23, pág. 200] e [24, pág. 235].

⁷⁰Neste parágrafo Arquimedes estabelece a equação de uma elipse com semi-eixos $AK = a$, $KB = b$ em um sistema de eixos cartesianos centrados no ponto A. Ver a dedução desta Equação na Subseção 8.3.2, Equação (8.23).

⁷¹Esta denominação é de época posterior a Arquimedes e, portanto, acrescentada nas cópias da idade média, mas é útil para reconhecer os semi-eixos da elipse.

⁷²Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 8.3.1, página 41 desta tese, ver ainda [23, pág. 200] e [24, pág. 235], por semelhança entre os triângulos AKB e $A\Sigma\Pi$.

⁷³Ver a dedução detalhada na Seção A.3 do Apêndice.

⁷⁴A saber, o retângulo de lados $A\Sigma$ e $\Sigma\Gamma$.

⁷⁵Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 15, citada na Nota de Rodapé 48, página 111 desta tese, e *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 8.3.1, página 41 desta tese.

⁷⁶Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 9, citada na Nota de Rodapé 34, página 109 desta tese, ver ainda [23, pág. 153] e [24, pág. 216]. Ver a dedução completa na Seção A.3 do Apêndice.

⁷⁷Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 2, citada na Seção 9.8, ver ainda [23, pág. 371] e [24, pág. 528].

ponto A, a soma dos dois círculos de diâmetros ΞO e ΠP , deslocados e colocados no ponto Θ da alavanca, de modo que Θ seja o centro de gravidade de cada um deles.

[Pág. 95]

A soma dos dois círculos cujos diâmetros são ΞO e ΠP , assim deslocados, [terá como] centro de gravidade [o ponto] Θ . Então desta maneira a razão de ΘA para $A\Sigma$ é a mesma que a razão do círculo de diâmetro MN para a soma dos dois círculos de diâmetros ΞO e ΠP .

Da mesma maneira será demonstrado que, se for traçada no paralelogramo ΛZ uma outra paralela qualquer a EZ e a partir desta for levantado um plano perpendicular a $A\Gamma$, o círculo determinado no cilindro, permanecendo no seu lugar, equilibrará em torno do [ponto] A, a soma de dois círculos, um determinado no elipsoide e o outro no cone, deslocados para o ponto Θ da alavanca de modo que Θ seja o centro de gravidade de cada um deles.

O cilindro, o elipsoide e o cone sendo preenchidos pelos círculos assim considerados, o cilindro, permanecendo no seu lugar, estará em equilíbrio em torno do ponto A, com o elipsoide e o cone deslocados e colocados na alavanca em Θ , de modo que Θ seja o centro de gravidade de cada um deles.

O centro de gravidade do cilindro⁷⁸ é [o ponto] K. O centro de gravidade do elipsoide e o cone juntos, como foi dito [é o ponto] Θ . Então ΘA está para AK como o cilindro [está] para a soma do elipsoide e do cone.

Mas $A\Theta$ [é] o dobro de AK . Portanto, também o cilindro é o dobro da soma do elipsoide e do cone. E também o cilindro é equivalente a dois cones e dois elipsoides. Ora, um cilindro é equivalente a três desses cones.⁷⁹ Portanto, três cones são equivalentes a dois cones e dois elipsoides. Sejam subtraídos os dois cones comuns. Então o cone restante, aquele que tem como triângulo [passando] pelo eixo o triângulo AEZ , é equivalente a dois elipsoides.

Mas um destes cones é [equivalente] a oito cones que têm como

[Pág. 96]

triângulo passando pelo eixo, [o triângulo] $AB\Delta$. Portanto, oito dos ditos cones são equivalentes a dois elipsoides. Então quatro cones são equivalentes a um elipsoide. Por conseguinte, o elipsoide é o quádruplo do cone que tem como vértice o ponto A e como base o círculo de diâmetro $B\Delta$, perpendicular a $A\Gamma$, e a metade do elipsoide é o dobro do dito cone.

Sejam traçadas pelos pontos B e Δ , no paralelogramo ΛZ , as [retas] ΦX e $\Psi\Omega$ paralelas a $A\Gamma$ e imagine-se um cilindro [tendo como] bases os círculos de diâmetro $\Phi\Psi$ e $X\Omega$ e como eixo a reta $A\Gamma$.

Portanto, posto que o cilindro que tem como paralelogramo passando pelo eixo [o paralelogramo] $\Phi\Omega$ é o dobro⁸⁰ do cilindro que tem como paralelogramo passando pelo eixo [o paralelogramo] $\Phi\Delta$, pois suas bases são iguais e o eixo de um é o dobro do eixo do outro, [e posto que] o cilindro que tem como paralelogramo passando pelo eixo [o paralelogramo] $\Phi\Delta$ é o triplo⁸¹ do cone que tem como vértice o ponto A e como base o círculo de diâmetro $B\Delta$ perpendicular a

⁷⁸Ver o Lema 8.

⁷⁹Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 10, citada na Seção 9.4, página 62 desta tese, ver ainda [23, pág. 400] e [24, pág. 543].

⁸⁰Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 13, citada na Seção 9.4, ver ainda [23, pág. 417] e [24, pág. 553].

⁸¹Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 10, citada na Seção 9.4, página 62 desta tese, ver ainda [23, pág. 400] e [24, pág. 543].

$A\Gamma$, então o cilindro que tem como paralelogramo passando pelo eixo [o paralelogramo] $\Phi\Omega$ é seis vezes o dito cone.

Mas foi demonstrado que o elipsoide é o quádruplo deste mesmo cone. Conseqüentemente, o cilindro é uma vez e meia o elipsoide.

10.7 [Teorema] IV. [*Volume de um Segmento de Parabolóide de Revolução.*]

Todo segmento de parabolóide⁸² cortado por um plano perpendicular ao eixo é [equivalente] a uma vez e meia o cone que tem a mesma base e o mesmo eixo que o segmento.⁸³

Assim analisa-se isto por este método:

[Pág. 97]

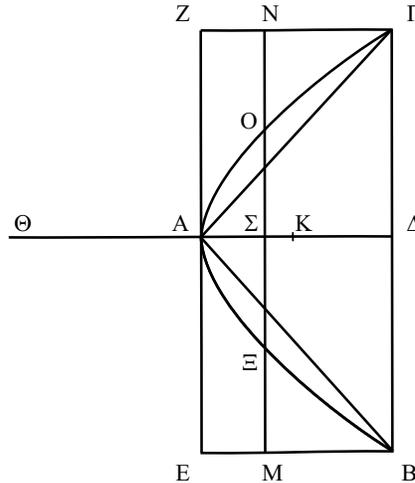


Figura 10.4: Figura do Teorema IV.

Seja, com efeito, um parabolóide. Corte-se [o parabolóide] com um plano passando pelo eixo. Seja a parábola $AB\Gamma$ a interseção [deste plano] com a superfície [do parabolóide]. Seja também cortado [o parabolóide] por um segundo plano perpendicular ao eixo e seja [a reta] $B\Gamma$ a interseção comum aos dois [planos].

Seja ΔA o eixo do segmento [de parabolóide]. Prolongue-se ΔA até [o ponto] Θ e seja $A\Theta$ igual à mesma [ΔA]. Imagine-se $\Delta\Theta$ como uma alavanca cujo ponto A seja o meio.⁸⁴

Seja a base do segmento [do parabolóide] o círculo de diâmetro $B\Gamma$ perpendicular a $A\Delta$. Imagine-se o cone tendo por base o círculo de diâmetro $B\Gamma$ e como vértice o ponto A . Seja também um cilindro tendo como base o círculo de diâmetro $B\Gamma$ e como eixo [a reta] $A\Delta$.

⁸²O termo usado por Arquimedes para designar um parabolóide de revolução é *conoide reto*.

⁸³Ver a demonstração geométrica deste teorema em *Sobre Conoídes e Esferóides*, Proposição 21, [17, pág. 202].

⁸⁴Novamente este ponto A será considerado o fulcro da alavanca.

Seja traçada no paralelogramo $[EB\Gamma Z]$ uma [reta] qualquer MN sendo paralela a $B\Gamma$ e levante-se sobre MN um plano perpendicular a $A\Delta$. A interseção deste [plano] no cilindro será um círculo de diâmetro MN , e no segmento de parabolóide será um círculo de diâmetro ΞO .

E como $BA\Gamma$ é uma parábola de diâmetro $A\Delta$ e [as retas] $\Xi\Sigma$ e $B\Delta$ são traçadas ordenadamente⁸⁵

[Pág. 98]

ΔA está para $A\Sigma$ assim como⁸⁶ [o quadrado] sobre $B\Delta$ está para [o quadrado] sobre $\Xi\Sigma$. Mas ΔA é igual a $A\Theta$. Portanto, ΘA está para $A\Sigma$ assim como [o quadrado] sobre $M\Sigma$ está para [o quadrado] sobre $\Sigma\Xi$.

Ora, o [quadrado] sobre $M\Sigma$ está para o [quadrado] sobre $\Sigma\Xi$ assim como⁸⁷ o círculo de diâmetro MN no cilindro está para o círculo de diâmetro ΞO no segmento do parabolóide. Então ΘA está para $A\Sigma$ assim como o círculo de diâmetro MN está para o círculo de diâmetro ΞO . Portanto, o círculo de diâmetro MN no cilindro, permanecendo no seu lugar, equilibra em torno do ponto A , o círculo de diâmetro ΞO transportado e colocado na alavanca em Θ de modo que o seu centro de gravidade seja [o ponto] Θ .

O centro de gravidade do círculo de diâmetro MN , é⁸⁸ [o ponto] Σ , enquanto que o centro de gravidade do círculo de diâmetro ΞO [que foi] deslocado, é [o ponto] Θ . [E os segmentos] ΘA e $A\Sigma$ possuem a razão inversa [daquela razão] entre o círculo de diâmetro MN e o círculo de diâmetro ΞO .

Será demonstrado da mesma maneira que se no paralelogramo⁸⁹ EF for traçada uma outra paralela qualquer a $B\Gamma$ e se for levantado sobre ela um plano perpendicular a $A\Theta$, o círculo definido no cilindro, permanecendo no seu lugar, equilibrará o círculo definido no segmento do parabolóide, deslocado sobre a alavanca para o [ponto] Θ de modo que o seu centro de gravidade seja Θ .

Então, assim preenchidos o cilindro e o segmento de parabolóide [pelos ditos círculos], o cilindro, permanecendo em seu lugar equilibrará em torno do ponto A , o segmento de parabolóide transportado e colocado na alavanca em Θ de modo que o seu centro de gravidade seja Θ .

Mas como as ditas grandezas se equilibram em torno do ponto A e o centro de gravidade do cilindro é o ponto K ,

[Pág. 99]

sendo o [segmento de reta] $A\Delta$ dividido ao meio pelo ponto K ,⁹⁰ e [como, finalmente,] o centro de gravidade do segmento transportado é Θ , a razão de ΘA para AK será inversa à razão do cilindro para o segmento [de parabolóide]. Mas ΘA é o dobro de AK . Então também o cilindro é o dobro do segmento [de parabolóide].

Porém o próprio cilindro é o triplo do cone que tem como base o círculo de diâmetro $B\Gamma$ e como vértice o ponto A . Portanto, é claro que o segmento [de parabolóide] é uma vez e meia este mesmo cone.

⁸⁵As retas são traçadas *ordenadamente* ou *de maneira ordenada*. Ver a definição de *ordenada* na Seção 8.2.

⁸⁶Ver a *Quadratura da Parábola*, Proposição 3, [18, pág. 167], ver também a Equação (8.10).

⁸⁷Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 2, citada na Seção 9.8, ver ainda [23, pág. 371] e [24, pág. 528].

⁸⁸Ver o Lema 7.

⁸⁹Neste caso trata-se do retângulo $EZ\Gamma B$.

⁹⁰Ver o Lema 8.

10.8 [Teorema] V. [*Centro de Gravidade de um Segmento de Parabolóide de Revolução.*]

O centro de gravidade do segmento de parabolóide cortado por um plano perpendicular ao eixo está sobre a reta que é o eixo do segmento, sendo dividida [esta] reta de modo que a parte da mesma do lado do vértice é o dobro da parte restante.

Assim analisa-se pelo método:

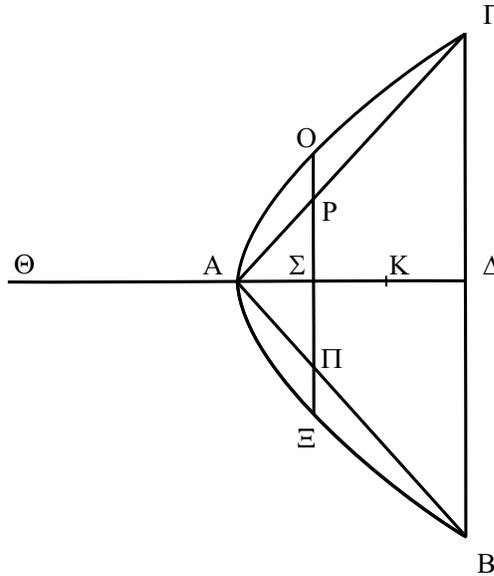


Figura 10.5: Figura do Teorema V.

[Pág. 100]

Seja um segmento de parabolóide cortado por um plano perpendicular ao eixo. Corte-se [o parabolóide] com um segundo plano passando pelo eixo e que faça interseção na superfície [do parabolóide] segundo a parábola ABΓ.

Seja BΓ a interseção comum do plano que cortou o segmento [do parabolóide] e do plano secante. Seja a reta AΔ o eixo do segmento [do parabolóide] e também o diâmetro da parábola ABΓ. Seja traçada AΘ no prolongamento da [reta] ΔA e igual a ela. Imagine-se ΔΘ como uma alavanca da qual A é o meio.⁹¹

Seja também inscrito no segmento [de parabolóide] um cone de lados⁹² BA e AΓ. Seja traçada na parábola uma [reta] qualquer ΞO paralela a BΓ, a qual corte a parábola [nos pontos] Ξ e O e os lados do cone nos pontos Π e P.

Mas como [as retas] ΞΣ e BΔ são traçadas em uma parábola perpendiculares ao diâmetro, a razão ΔA para AΣ é igual⁹³ à razão entre o [quadrado] sobre BΔ e o [quadrado] sobre ΞΣ.

⁹¹Novamente este ponto A será considerado como fulcro da alavanca.

⁹²Como já foi observado, os *lados* são as *geratrizes* do cone.

⁹³Ver a *Quadratura da Parábola*, Proposição 3, [18, pág. 137]. Ver também a Equação (8.10).

Ora, ΔA está para $A\Sigma$ assim como⁹⁴ $B\Delta$ está para $\Pi\Sigma$, e $B\Delta$ está para $\Pi\Sigma$ assim como o [quadrado] sobre $B\Delta$ está para o [retângulo de lados] $B\Delta$ e $\Pi\Sigma$. Portanto, também o [quadrado] sobre $B\Delta$ estará para o [quadrado] sobre $\Xi\Sigma$ assim como o [quadrado] sobre $B\Delta$ está para o [retângulo de lados] $B\Delta$ e $\Pi\Sigma$. Então o [quadrado] sobre $\Xi\Sigma$ é equivalente⁹⁵ ao [retângulo de lados] $B\Delta$ e $\Pi\Sigma$.

Portanto, [os segmentos de reta] $B\Delta$, $\Sigma\Xi$ e $\Sigma\Pi$ são proporcionais⁹⁶ e, por isso, a razão entre $B\Delta$ e $\Pi\Sigma$ é igual à razão entre o [quadrado] sobre $\Xi\Sigma$ e o [quadrado] sobre $\Sigma\Pi$. Mas $B\Delta$ está para $\Pi\Sigma$ assim como ΔA está para $A\Sigma$, isto é, assim como ΘA está para $A\Sigma$. Então ΘA está para $A\Sigma$ assim como o [quadrado] sobre $\Xi\Sigma$ está para o [quadrado] sobre $\Sigma\Pi$.

Seja levantado agora sobre ΞO um plano perpendicular a $A\Delta$. Este [plano] determinará no segmento de parabolóide, um círculo de diâmetro ΞO , e no cone um círculo de diâmetro ΠP . E posto que

[Pág. 101]

ΘA está para $A\Sigma$ assim como o [quadrado] sobre $\Xi\Sigma$ está para o [quadrado] sobre $\Sigma\Pi$ e [posto que o quadrado] sobre $\Xi\Sigma$ está para o [quadrado] sobre $\Sigma\Pi$ assim como⁹⁷ o círculo de diâmetro ΞO está para o círculo de diâmetro ΠP , assim ΘA está para $A\Sigma$ assim como o círculo de diâmetro ΞO está para o círculo de diâmetro ΠP .

Portanto, o círculo de diâmetro ΞO , permanecendo no seu lugar, equilibrará em torno do ponto A , o círculo de diâmetro ΠP , transportado sobre a alavanca para o ponto Θ de modo que Θ seja o seu centro de gravidade.

Posto que o [ponto] Σ é o centro de gravidade⁹⁸ do círculo de diâmetro ΞO , permanecendo no seu lugar, e o [ponto] Θ é o centro de gravidade do círculo de diâmetro ΠP deslocado como foi dito, e [como] a razão entre ΘA e $A\Sigma$ é o inverso da razão entre o círculo de diâmetro ΞO e o círculo de diâmetro ΠP , [estes círculos] se equilibrarão em relação ao ponto A .

Demonstrar-se-á da mesma maneira que, se for traçada na parábola uma outra [reta] qualquer paralela a $B\Gamma$ e sobre ela for levantado um plano perpendicular a $A\Delta$, o círculo determinado no segmento de parabolóide, permanecendo no seu lugar, equilibrará em torno do ponto A , o círculo determinado no cone, transportado e colocado no ponto Θ da alavanca, de modo que o seu centro de gravidade seja Θ .

Sendo então preenchidos com os círculos tanto o segmento [de parabolóide] quanto o cone, todos os círculos colocados no segmento, permanecendo nos seus lugares, equilibrarão todos os círculos no cone transportados e colocados no ponto Θ da alavanca, de modo que o seu centro de gravidade seja Θ .

Por conseguinte, o segmento [de parabolóide] permanecendo no seu lugar, equilibrará em relação ao ponto A o cone transportado e colocado no ponto Θ da alavanca,

[Pág. 102]

⁹⁴Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 8.3.1, página 41 desta tese, ver ainda [23, pág. 200] e [24, pág. 235].

⁹⁵Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 9, citada na Nota de Rodapé 34, página 109 desta tese, ver ainda [23, pág. 153] e [24, pág. 216].

⁹⁶Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 17, citada na Seção 9.6, ver ainda [23, pág. 228] e [24, pág. 248].

⁹⁷Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 2, citada na Seção 9.8, ver ainda [23, pág. 371] e [24, pág. 528].

⁹⁸Ver o Lema 7.

de modo que o seu centro de gravidade seja Θ .

Então, como o centro de gravidade das duas grandezas, consideradas como uma [só], é o ponto A , e como Θ é o centro de gravidade do próprio cone deslocado, então o centro de gravidade da grandeza restante [está] sobre a reta $A\Theta$ prolongada do lado de A , destacando da mesma [o segmento] AK de tal tamanho que a razão entre $A\Theta$ e o próprio $[AK]$ seja igual⁹⁹ à razão entre o segmento [de parabolóide] e o cone.

Mas o segmento [de parabolóide] é uma vez e meia o cone.¹⁰⁰ Então também ΘA é uma vez e meia AK e o centro de gravidade K [do segmento] de parabolóide está [situado em um ponto] que divide $A\Delta$ de tal maneira que a parte da mesma [reta situada] ao lado do vértice é o dobro da parte restante.

10.9 [Teorema] VI. [Centro de Gravidade de um Hemisfério.]

O centro de gravidade de todo hemisfério está sobre a reta que é o seu eixo, dividindo-a de tal maneira que a razão entre o segmento da mesma [reta] do lado da superfície e o segmento restante é de cinco para três.

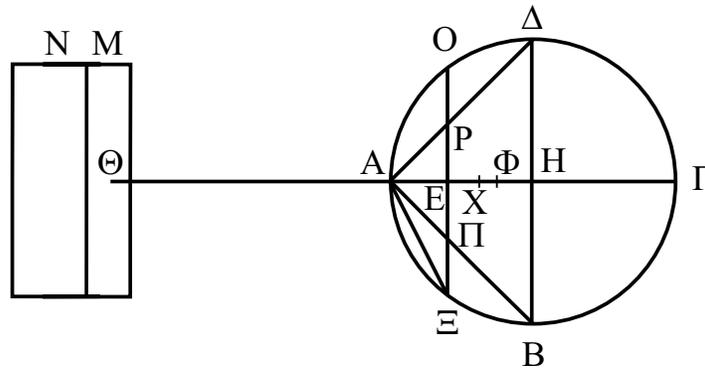


Figura 10.6: Figura do Teorema VI.

[Pág. 103]

Seja uma esfera e seja ela cortada por um plano [passando] pelo centro. Seja o círculo $AB\Gamma\Delta$ a interseção [do plano] com a superfície e sejam $A\Gamma$ e $B\Delta$ dois diâmetros respectivamente perpendiculares. Seja elevado sobre $B\Delta$ um plano perpendicular a $A\Gamma$. Seja um cone tendo por base o círculo de diâmetro $B\Delta$ e por vértice o ponto A . Sejam BA e $A\Delta$ os [seus] lados.¹⁰¹

Seja prolongada ΓA e seja feito [o segmento de reta] $A\Theta$ igual a ΓA . Imagine-se que $\Theta\Gamma$ seja uma alavanca cujo meio seja [o ponto] A .¹⁰² Seja traçada no semicírculo $BA\Delta$ uma [reta]

⁹⁹Ver o Lema 2.

¹⁰⁰Ver o Teorema IV.

¹⁰¹Isto é, as geratrizes.

¹⁰²Este ponto A será considerado o fulcro da alavanca.

qualquer ΞO paralela a $B\Delta$, e ela corte a circunferência do semicírculo nos [pontos] Ξ e O , os lados do cone nos pontos Π e P , e a [reta] $A\Gamma$ em E .

Levante-se também sobre ΞO um plano perpendicular a AE . Este [plano] fará interseção no hemisfério segundo um círculo de diâmetro ΞO e no cone segundo um círculo de diâmetro ΠP .

E como [a razão] entre $A\Gamma$ e AE [é igual à razão] entre¹⁰³ o [quadrado] sobre ΞA e o [quadrado] sobre AE , e como o [quadrado] sobre ΞA é equivalente à soma dos [quadrados]¹⁰⁴ sobre AE e $E\Xi$, e [sendo] $E\Pi$ igual¹⁰⁵ a AE , assim [a razão] entre $A\Gamma$ e AE é igual [à razão] da soma dos [quadrados] sobre ΞE e $E\Pi$ para o [quadrado] sobre $E\Pi$.

Mas a soma dos [quadrados] sobre ΞE e $E\Pi$ está para o [quadrado] sobre $E\Pi$ assim como [a soma] do círculo de diâmetro ΞO e do círculo de diâmetro ΠP [está] para o círculo de diâmetro ΠP . Também ΓA é igual a $A\Theta$. Portanto, ΘA [está] para AE assim como [a soma] do círculo de diâmetro ΞO e do círculo de diâmetro ΠP [está] para o círculo de diâmetro ΠP .

Então a soma dos dois círculos de diâmetros ΞO e ΠP , permanecendo nos seus lugares, equilibrará em torno do ponto A , o círculo de diâmetro ΠP deslocado e colocado [no ponto] Θ

[Pág. 104]

de modo que Θ seja o seu centro de gravidade.

Posto que [o ponto] E é o centro de gravidade¹⁰⁶ da soma dos dois círculos de diâmetros ΞO e ΠP , permanecendo nos seus lugares, enquanto que Θ é [o centro de gravidade] do círculo de diâmetro ΠP deslocado, EA está para $A\Theta$ assim como o círculo de diâmetro ΠP está para a soma dos círculos de diâmetros ΞO e ΠP .

Da mesma maneira, se for traçada no semicírculo¹⁰⁷ uma outra paralela qualquer a $B\Delta$ e a partir dela for levantado um plano perpendicular a $A\Gamma$, a soma dos dois círculos, aquele determinado no hemisfério e aquele no cone, permanecendo nos seus lugares, equilibrará em torno do ponto A , o círculo determinado no cone deslocado e colocado na alavanca [no ponto] Θ .

Então o hemisfério e o cone, [sendo] preenchidos pelos círculos, todos os círculos no hemisfério e no cone, permanecendo nos seus lugares, equilibrarão em torno do ponto A todos os círculos no cone transportados e colocados no ponto Θ da alavanca, de modo que o seu centro de gravidade seja Θ . Por conseguinte, o hemisfério e o cone, permanecendo nos seus lugares, equilibrarão em torno do ponto A o cone transportado e colocado no ponto Θ da alavanca, de modo que o seu centro de gravidade seja Θ .

[Seja agora]¹⁰⁸ um cilindro MN suspenso no ponto Θ , equivalente ao cone $AB\Delta$. Corte-se esse cilindro com um plano perpendicular ao eixo de modo que o cilindro M ¹⁰⁹ se equilibre com o cone em torno do ponto A . Então a parte restante, isto é, o cilindro N , equilibrará o hemisfério.

Tome-se então sobre AH um ponto Φ tal que $A\Phi$ seja o triplo de ΦH . O ponto Φ será,

¹⁰³Ver a Seção A.6 do Apêndice A e o Apêndice C.

¹⁰⁴Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro I, Proposição 47, citada na Nota de Rodapé 47, página 111 desta tese, ver ainda [23, Volume 1, pág. 359] e [24, pág. 132]. Esta Proposição de Euclides corresponde à demonstração do teorema de Pitágoras.

¹⁰⁵Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 8.3.1, página 41 desta tese, ver ainda [23, pág. 200] e [24, pág. 235].

¹⁰⁶Ver o Lema 7.

¹⁰⁷O texto grego aqui diz “parábola” e assim aparece em algumas traduções em outras línguas. Trata-se evidentemente de um erro de cópia pois neste teorema não existem parábolas.

¹⁰⁸O texto grego a partir deste ponto apresenta uma lacuna quase completa. A reconstituição foi feita por Heiberg a partir da Figura 9.7 e do Teorema IX.

¹⁰⁹Os cilindros M e N compõem o cilindro total MN .

portanto, o centro de gravidade do cone.¹¹⁰ Tome-se também um ponto X tal que a razão entre AH e AX seja de oito para cinco. Posto que o cilindro M equilibra o cone $AB\Delta$ em torno do ponto A, a razão entre o cilindro M e o cone $AB\Delta$ será igual à razão entre ΦA e ΘA , isto é, de três para oito.¹¹¹

Mas o cone $AB\Delta$ é equivalente ao cilindro MN. Portanto, o cilindro MN está para o cilindro M assim como oito está para três.

[Pág. 105]

Por conseguinte, o cilindro N está para o cilindro MN assim como cinco está para oito¹¹² e o cone $AB\Delta$ está para o cilindro N assim como oito está para cinco, isto é, como AH está para AX. E como a esfera é equivalente ao quádruplo¹¹³ do cone cuja base é o círculo de diâmetro $B\Delta$ e cujo eixo é AH, então a razão do hemisfério para o cone $AB\Delta$ será igual a dois para um, isto é, a $A\Theta$ para AH. Portanto, a razão entre o hemisfério e o cilindro N é igual à razão entre $A\Theta$ e AX.

Então o cilindro N cujo centro de gravidade é Θ , equilibra o hemisfério em relação ao ponto A. Por conseguinte, o centro de gravidade do hemisfério é o ponto X que divide o eixo de modo que a parte situada do lado da superfície do hemisfério tenha uma razão de cinco para três com a parte restante.]

10.10 [Teorema] VII. [*Volume de um Segmento Esférico.*]

Com este método demonstra-se também que

*a razão entre todo segmento esférico e o cone que tem por base a mesma [base] do segmento e como eixo o mesmo [eixo do segmento] é igual à razão entre a soma do raio da esfera e a altura do segmento restante, para a altura do segmento [esférico] restante.*¹¹⁴

[Pág. 106]

[Seja¹¹⁵ com efeito uma esfera e $AB\Gamma\Delta$ seu círculo máximo. Sejam $A\Gamma$ e TY dois diâmetros perpendiculares. Corte-se a esfera por um plano perpendicular a $A\Gamma$ destacando um segmento tendo por base o círculo $B\Delta$. Seja H o ponto de interseção entre $B\Delta$ e $A\Gamma$. Construa-se sobre o círculo de diâmetro $B\Delta$ um cone de vértice A.

Construa-se também sobre o círculo de diâmetro TY um outro cone tendo o mesmo vértice e seja prolongada a sua superfície. Seja o círculo de diâmetro EZ a interseção deste cone com o plano traçado por $B\Delta$ paralelo à base. Seja construído neste mesmo plano um círculo de diâmetro $K\Lambda$ tendo como centro o ponto H e o raio igual a $A\Gamma$. Seja construído sobre este círculo, um

¹¹⁰Ver o Lema 10.

¹¹¹Ver a dedução detalhada destas relações na Seção 9.7.

¹¹²Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 17, [24, pág. 222]: “Caso magnitudes, tendo sido compostas, estejam em proporção, também, tendo sido separadas, estarão em proporção.”

¹¹³Ver o Teorema II.

¹¹⁴A demonstração geométrica deste teorema pode ser encontrada em *Sobre a Esfera e o Cilindro*, Livro II, Proposição 2, [17, pág. 104].

¹¹⁵O texto grego do *Códice C* apresenta uma lacuna que devia conter a descrição da figura. A reconstituição foi feita por Heiberg a partir da própria Figura 10.7 e do Teorema II.

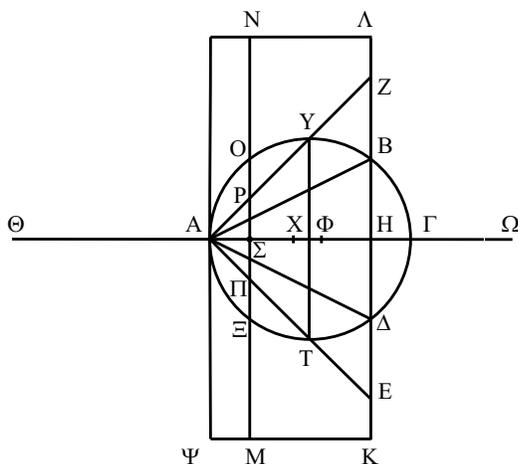


Figura 10.7: Figura do Teorema VII.

cilindro com eixo AH tendo como paralelogramo passando pelo eixo $\Psi\Lambda$.¹¹⁶

Seja prolongada $A\Gamma$ dos dois lados: de um lado seja construído o prolongamento $\Gamma\Omega$ ¹¹⁷ igual ao raio da esfera e do outro lado $A\Theta$ igual a $A\Gamma$. Imagine-se $\Gamma\Theta$ como uma alavanca da qual A seja o ponto médio.¹¹⁸

Seja então traçada no paralelogramo $\Psi\Lambda K$ a reta MN paralela a $B\Delta$] e eleve-se sobre MN um plano perpendicular a $A\Gamma$. Este plano cortará o cilindro segundo um círculo de diâmetro MN , o segmento esférico segundo um círculo de diâmetro de diâmetro ΞO e o cone que tem como base o círculo de diâmetro EZ e como vértice o ponto A, segundo um círculo de diâmetro ΠP .

Da mesma maneira será demonstrado como anteriormente que o círculo de diâmetro MN , permanecendo no seu lugar, equilibrará em torno do ponto A, a soma dos dois círculos de diâmetros ΞO e ΠP , deslocados na alavanca para [o ponto] Θ , de modo que Θ seja o centro de gravidade de cada um deles. E assim igualmente para todos [os outros círculos].

Então [sendo] preenchidos com os círculos o cilindro, o cone e o segmento esférico, o cilindro permanecendo no seu lugar equilibrará

[Pág. 107]

a soma do cone e do segmento esférico, deslocados e colocados [no ponto] Θ da alavanca.

Divida-se AH pelos pontos Φ e X de tal maneira que, por um lado, AX seja igual a XH e, por outro lado, $H\Phi$ seja um terço de AH . Então X será o centro de gravidade do cilindro¹¹⁹ por ser o ponto médio do eixo AH . Portanto, como as ditas grandezas se equilibram em torno do ponto

¹¹⁶Há evidentemente um erro de transcrição das letras usadas na Figura deste teorema pois a letra Φ foi usada para indicar dois pontos distintos. Para evitar problemas de compreensão, indicaremos com a letra Φ o ponto sobre o eixo comum, como está claramente no texto grego, enquanto que indicaremos com a letra Ψ um dos vértices do paralelogramo que acabou de ser definido.

¹¹⁷A posição do ponto Ω não está indicada no lugar correspondente da Figura do texto grego. Optamos por representá-la no seu lugar correto, como da interpretação feita por Heiberg, que completou o desenvolvimento, pois está faltando no manuscrito grande parte desta demonstração.

¹¹⁸Novamente este ponto A será considerado o fulcro da alavanca.

¹¹⁹Ver o Lema 8.

A, assim a [razão] entre o cilindro e a soma do cone com diâmetro de base EZ e do segmento esférico $BA\Delta$, será igual [à razão] entre ΘA e AX .

E como HA é o triplo de $H\Phi$, o [retângulo de lados] ΓH e $H\Phi$ é equivalente a um terço do [retângulo de lados] AH e $H\Gamma$. Ora, o [retângulo de lados] AH e $H\Gamma$ é equivalente¹²⁰ ao [quadrado] sobre HB . Então, também o [retângulo de lados] ΓH e $H\Phi$ será um terço do [quadrado sobre] BH .¹²¹

Por outro lado, o quadrado sobre AH é equivalente ao triplo¹²² do retângulo de lados AH e $H\Phi$, isto é, ao triplo do retângulo de lados AX e $A\Phi$, pois AH é o dobro de AX e $A\Phi$ é o dobro de ΦH . Além disso, como ΘA é igual a KH e como AH é igual a HE , a razão do quadrado sobre ΘA para um terço do quadrado sobre AH , será igual à razão do cilindro cuja base é o círculo de diâmetro $K\Lambda$ para o cone AEZ .

Mas a razão do quadrado sobre ΘA para um terço do quadrado sobre AH é igual à razão do quadrado sobre ΘA para o retângulo de lados AX e $A\Phi$. Por conseguinte, a razão do quadrado sobre ΘA para o retângulo de lados AX e $A\Phi$ é igual à razão entre o cilindro e o cone.

Mas foi também demonstrado que a razão entre o cilindro cuja base é o círculo de diâmetro $K\Lambda$ e a soma do segmento esférico $AB\Delta$ e do cone, é igual à razão entre ΘA e AX . Mas ΘA é [igual a $A\Gamma$, ou seja, é igual à soma de $A\Phi$ e $\Phi\Gamma$. Portanto, a razão entre o quadrado sobre ΘA e a soma dos retângulos de lados

[Pág. 108]

$A\Phi$, AX e $\Phi\Gamma$, AX é igual à razão entre o cilindro e a soma do segmento esférico $AB\Delta$ e do cone AEZ . A razão entre o cilindro e o segmento esférico será, portanto, igual à razão entre o quadrado sobre ΘA e o retângulo de lados $\Phi\Gamma$ e AX . Mas a razão entre o cilindro e o cone $AB\Delta$ é igual à razão entre o quadrado sobre ΘA e um terço do quadrado sobre BH e esta última razão é igual à razão entre o quadrado sobre ΘA e o retângulo de lados ΓH e $H\Phi$.

Portanto, a razão entre o segmento esférico $AB\Delta$ e o cone $AB\Delta$ é igual à razão entre o retângulo de lados $\Phi\Gamma$ e AX , e o retângulo de lados ΓH e $H\Phi$. E como AH é igual ao dobro de AX , à soma de $A\Phi$ com ΦH e ao triplo de ΦH , e como $\Phi\Gamma$ é igual à soma de ΦH com $H\Gamma$ e à soma de um terço de AH com $H\Gamma$, o retângulo de lados $\Phi\Gamma$ e AX será equivalente à soma do retângulo que tem por lados um terço de AH e três meios de ΦH , com o retângulo cujos lados são $H\Gamma$ e três meios de ΦH .

Sendo então esta última soma equivalente ao retângulo cujos lados são ΦH e a soma de $H\Gamma$ com a metade de $A\Gamma$ e, por conseguinte, sendo equivalente ao retângulo cujos lados são ΦH e $H\Omega$, a razão entre o segmento esférico $AB\Delta$ e o cone $AB\Delta$ é igual à razão entre $H\Omega$ e $H\Gamma$.]

¹²⁰Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 8, Corolário, citado na Subseção 8.3.1, página 41, ver ainda [23, Volume 2, pág. 211] e [24, pág. 241].

¹²¹A partir deste ponto existem várias lacunas no texto grego que foram reconstituídas por Heiberg.

¹²²Sendo

$$HA = 3(H\Phi) , \quad (10.3)$$

temos:

$$(HA)(HA) = 3(H\Phi)(HA) . \quad (10.4)$$

Ou seja, o quadrado de HA é o triplo do retângulo $(H\Phi)(HA)$.

10.11 [Teorema] VIII. [*Volume de um Segmento de Elipsoide de Revolução.*]

De modo semelhante analisa-se pelo mesmo método também que

*todo segmento de elipsoide cortado por um plano perpendicular [ao eixo] tem a mesma razão em relação ao cone que tem a mesma base e o mesmo eixo que o segmento, como a soma da metade do eixo do elipsoide e do eixo do segmento oposto, [tem] para o eixo do segmento oposto.*¹²³

10.12 [Teorema] IX. [*Centro de Gravidade de um Segmento Esférico.*]

O centro de gravidade de todo segmento esférico está sobre o eixo do segmento, dividindo-o

[Pág. 109]

de tal maneira que a razão entre a parte do mesmo do lado do vértice do segmento, e a parte restante, é a mesma [razão] que a soma do eixo do segmento e o quádruplo do eixo do segmento oposto, com a soma do eixo do segmento e o dobro do eixo do segmento oposto.

[Seja¹²⁴ uma esfera. Corte-se a esfera por um plano perpendicular ao eixo. Seja $AB\Delta$ o segmento esférico determinado.

Seja o círculo $AB\Gamma\Delta$ a interseção determinada por um outro plano perpendicular passando pelo centro. Seja $B\Delta$ a interseção deste plano com o plano que determinou o segmento [esférico]. Seja a reta ΓA , o diâmetro perpendicular a $B\Delta$ e cortada pelo ponto H , de modo que AH seja o eixo do segmento [esférico] cujo vértice é o ponto A , enquanto que o eixo do segmento [esférico] oposto é $H\Gamma$.

Corte-se AH pelo ponto X de modo que AX esteja para XH assim como AH e o quádruplo de $H\Gamma$ estão para AH e o dobro de $H\Gamma$.

Digo que [o ponto] X é o centro de gravidade do segmento [esférico] cujo vértice é o ponto A ¹²⁵ ...

... [seja prolongada $A\Gamma$ dos dois lados] e seja feita de um lado $A\Theta$ igual a $A\Gamma$ e [do outro

[Pág. 110]

lado] $\Gamma\Xi$ igual ao raio da esfera. Imagine-se $\Gamma\Theta$ [como] uma alavanca cujo meio é [o ponto] A .¹²⁶ Seja também descrito, no plano que corta o segmento [esférico], um círculo com centro em H e

¹²³Arquimedes não apresenta a demonstração deste teorema pelo seu método, por considerar que seria equivalente à demonstração do teorema anterior. Contudo, uma demonstração geométrica foi desenvolvida por ele próprio em outro livro, ver *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposições 29 e 31, [17, págs. 235 e 244].

¹²⁴Três linhas sobre a construção da figura, faltantes no texto grego, foram reconstituídas por Heiberg.

¹²⁵As cinco linhas seguintes contêm somente traços de palavras que não foram possíveis de ser reconstituídas até o momento.

¹²⁶Este ponto A será considerado o fulcro da alavanca.

Seja agora um cilindro MN equivalente ao cone que tem por base o círculo de diâmetro EZ e como vértice o ponto A. Seja cortada [a reta] AH pelo [ponto] Φ de tal maneira que AH seja o quádruplo de ΦH . Portanto, o ponto Φ é o centro de gravidade do cone AEZ. Com efeito, isto foi assinalado anteriormente.¹²⁹

Corte-se ainda o cilindro MN por um plano perpendicular [ao eixo] de modo que o cilindro M esteja em equilíbrio com o cone EAZ. Então [posto que] o cone EAZ e o segmento [esférico] $BA\Delta$ permanecendo nos seus lugares, estão em equilíbrio com o cone EAZ deslocado e colocado no ponto no ponto Θ da alavanca de modo que Θ seja o seu centro de gravidade, que o cilindro MN é equivalente ao cone EAZ, que cada um dos dois cilindros M e N é colocado em Θ , e que o cilindro MN equilibra os dois [isto é, o segmento esférico e o cone], então também o [cilindro] N equilibra o segmento esférico em torno do ponto A.

Por outro lado, o segmento esférico $BA\Delta$ está para o cone cuja base é o círculo $B\Delta$ e cujo vértice o ponto A, assim como ΞH está para $H\Gamma$, pois isto foi demonstrado anteriormente.¹³⁰

Mas [a razão] entre o cone $BA\Delta$ e o cone EAZ é igual¹³¹ à [razão] entre o círculo de diâmetro $B\Delta$ e o círculo de diâmetro EZ, e a [razão] do círculo para o círculo é igual à [razão] do [quadrado] sobre BH para o [quadrado] sobre HE.

[Pág. 112]

E também o [quadrado] sobre BH é equivalente ao [retângulo de lados] ΓH e HA. E o [quadrado] sobre HE é equivalente ao [quadrado] sobre HA, e [a razão] entre o [retângulo de lados] ΓH e HA e o [quadrado] sobre HA, é igual [à razão] entre ΓH e HA. Por conseguinte, o cone $BA\Delta$ está para o cone EAZ assim como ΓH está para HA.

Mas foi também mostrado que o cone $BA\Delta$ está para o segmento [esférico] $BA\Delta$ assim como ΓH está para $H\Xi$. Então, por identidade¹³² o segmento [esférico] $BA\Delta$ [está] para o cone EAZ assim como ΞH está para HA. E como [a razão] entre AX e XH é igual à [razão] entre [a soma] de HA com o quádruplo de $H\Gamma$ e [a soma] de AH com o dobro de $H\Gamma$, *invertendo*,¹³³ HX estará para XA assim como [a soma] do dobro de ΓH com HA está para [a soma] do quádruplo de ΓH com HA.

Componendo,¹³⁴ [a razão] entre HA e AX é igual [à razão] entre [a soma] do sêxtuplo de ΓH com o dobro de HA e a soma de HA com o quádruplo de $H\Gamma$. Além disso, $H\Xi$ [é a quarta parte da soma] do sêxtuplo de $H\Gamma$ com o dobro de HA, e $\Gamma\Phi$ é a quarta parte [da soma] do quádruplo de $H\Gamma$ com HA, pois isto é evidente.¹³⁵ Então HA está para AX assim como¹³⁶ ΞH está para $\Gamma\Phi$. Por conseguinte, também ΞH está para HA assim como¹³⁷ $\Gamma\Phi$ está para XA.

¹²⁹Ver o Lema 10.

¹³⁰Ver o Teorema VII.

¹³¹Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XII, Proposição 11, citada na Seção 9.4, ver ainda [23, Volume 3, pág. 406] e [24, pág. 546].

¹³²Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 22, [24, pág. 227]: “Caso existam magnitudes, em quantidade qualquer, e outras iguais a elas em quantidade, tomadas duas a duas e na mesma razão, também, por igual posto, estarão na mesma razão.”

¹³³Ver a Equação (7.21) e *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 7, Corolário, [24, pág. 213]: “Disso, então, é evidente que, caso algumas magnitudes estejam em proporção, também estarão inversamente em proporção. O que era preciso provar.”

¹³⁴Ver a Equação (7.22).

¹³⁵Ver a dedução destas Equações na Seção 9.9, desde a Equação (9.109) até a Equação (9.122).

¹³⁶Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 15, citada na Nota de Rodapé 48, página 111 desta tese, ver ainda [23, Volume 2, pág. 163] e [24, pág. 220].

¹³⁷Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 16, citada na Subseção 8.3.2, ver ainda [23, Volume 2,

Mas foi mostrado também que [a razão] entre ΞH e HA é igual [à razão] entre o segmento [esférico] cujo vértice é o ponto A e cuja base é o círculo de diâmetro $B\Delta$, e o cone cujo vértice é o ponto A e cuja base é o círculo de diâmetro EZ . Portanto, o segmento [esférico] $BA\Delta$ está para o cone EAZ assim como $\Gamma\Phi$ está para XA .

E como o cilindro M equilibra o cone EAZ em torno do ponto A , e o centro de gravidade do cilindro é o [ponto] Θ e o [centro de gravidade] do cone EAZ o [ponto] Φ , então o cone EAZ estará para o cilindro M assim como ΘA está para $A\Phi$. Isto é, assim como ΓA está para $A\Phi$.

Além disso, o cilindro MN é equivalente ao cone EAZ . Portanto, *separando*,¹³⁸ o cilindro MN está para o cilindro N assim como $A\Gamma$ está para $\Gamma\Phi$. Além disso, o cilindro MN é equivalente ao cone EAZ .

[Pág. 113]

Portanto, o cone EAZ está para o cilindro N assim como ΓA está para $\Gamma\Phi$, isto é, assim como ΘA está para $\Gamma\Phi$. Mas também já foi demonstrado que o segmento [esférico] $BA\Delta$ está para o cone EAZ assim como $\Gamma\Phi$ está para XA . Então, por identidade,¹³⁹ o segmento [esférico] $AB\Delta$ estará para o cilindro N assim como ΘA está para AX .

Também foi demonstrado que o segmento [esférico] $BA\Delta$ equilibra o cilindro N em torno do ponto A e ainda que o centro de gravidade do cilindro N é o [ponto] Θ . Por conseguinte, o centro [de gravidade] do segmento [esférico] $BA\Delta$ é o ponto X .

10.13 [Teorema] X. [*Centro de Gravidade de um Segmento de Elipsoide de Revolução.*]

Da mesma maneira que isto, analisa-se que

o centro de gravidade de todo segmento de elipsoide está sobre a reta que constitui o eixo do segmento, dividindo-a de tal maneira que a razão entre a parte da mesma [reta] do lado do vértice do segmento, e a parte restante, é igual à razão entre a soma do eixo do segmento com o quádruplo do eixo do segmento oposto, e a soma do eixo do segmento com o dobro do eixo do segmento oposto.

10.14 [Teorema] XI. [*Volume e Centro de Gravidade de um Segmento de Hiperboloide de Revolução.*]

Com [este] método analisa-se também que

todo segmento de hiperboloide de revolução¹⁴⁰ tem a mesma razão para um cone com a mesma base e o mesmo eixo que o segmento, que aquela [razão] entre a soma do eixo do segmento

pág. 164] e [24, pág. 221].

¹³⁸Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 17, citada na Nota de Rodapé 112, página 122 desta tese, ver ainda [23, Volume 2, pág. 166] e [24, pág. 222]. Ver também a Equação (7.23).

¹³⁹Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro V, Proposição 22, citada na Nota de Rodapé 132, página 127 desta tese, ver ainda [23, Volume 2, pág. 179] e [24, pág. 227].

¹⁴⁰Arquimedes chama a hipérbole de *seção de cone obtusângulo*, ver a Seção 8.1.

o segmento do cilindro. Seja o paralelogramo AB^{144} a interseção [deste plano] e do prisma que contém o cilindro. Seja a reta $B\Gamma$ a interseção comum do plano que cortou o segmento cilíndrico com o plano traçado pelo eixo e perpendicular ao plano que cortou o segmento cilíndrico.

Seja a reta $\Gamma\Delta$ o eixo do prisma e do cilindro e [suponha que a reta] EZ a corte pela metade, em ângulo reto. Levante-se por EZ um plano perpendicular a $\Gamma\Delta$ o qual fará no prisma uma seção quadrada, enquanto que no cilindro a seção [será] um círculo. Seja então o quadrado MN a interseção com o prisma enquanto que o círculo $\Xi O\Pi P$ [seja] a interseção com o cilindro e o círculo tangencie os lados do quadrado nos pontos Ξ , O , Π e P .

Seja a reta $K\Lambda$ a interseção comum do plano cortando o segmento cilíndrico e do plano traçado por EZ , perpendicular ao eixo do cilindro. [A reta] $\Pi\Theta\Xi$ a divide em duas partes iguais.

Seja traçada no semicírculo $O\Pi P$ uma [reta] qualquer ΣT perpendicular a ΠX . Seja levantado por ΣT um plano perpendicular a $\Xi\Pi$, o qual seja prolongado de ambos os lados do plano que contém o círculo $\Xi O\Pi P$. Este [plano] fará interseção com o semicilindro cuja base é o semicírculo $O\Pi P$ e cuja altura é o eixo do prisma, segundo um paralelogramo do qual um lado será igual a ΣT e o outro [será igual] à geratriz do cilindro. Ele fará também interseção com o segmento cortado do cilindro, segundo um [outro] paralelogramo

[Pág. 116]

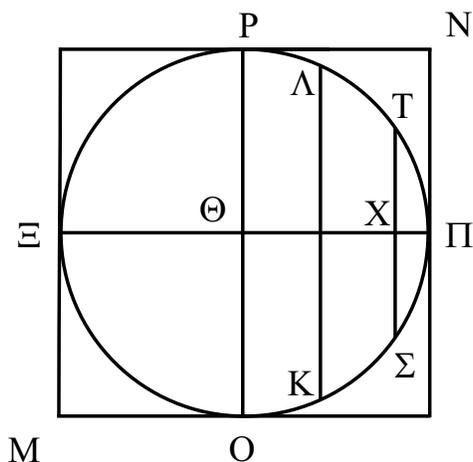


Figura 10.10: Segunda Figura do Teorema XII.

do qual um lado é igual a ΣT e o outro [é igual] a NY . Seja NY traçada no paralelogramo ΔE ,¹⁴⁵ paralelamente a $B\Omega$, de modo a cortar EI igual a ΠX . Como $E\Gamma$ é um paralelogramo e NI é paralela a $\Theta\Gamma$, e [como] $E\Theta$ e ΓB são traçadas através [delas], a razão entre $E\Theta$ e ΘI é igual à razão entre $\Omega\Gamma$ e ΓN , isto é,¹⁴⁶ [à razão] entre $B\Omega$ e YN .

¹⁴⁴Leia-se: o paralelogramo $A\Phi B\Omega$.

¹⁴⁵Embora o texto grego (reproduzido por Heiberg) indique neste ponto o paralelogramo ΔE , o paralelogramo correto que contém a reta NY é $\Delta\Gamma\Omega B$.

¹⁴⁶Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 4, citada na Subseção 8.3.1, página 41 desta tese, ver ainda [23, Volume 2 pág. 200] e [24, pág. 235].

Mas $B\Omega$ está para YN assim como o paralelogramo determinado no semicilindro está para [o paralelogramo] determinado no segmento cortado do cilindro, pois¹⁴⁷ ΣT é o lado comum dos dois paralelogramos. Além disso, $E\Theta$ é igual a $\Theta\Pi$, e $I\Theta$ é igual a $X\Theta$. Como $\Pi\Theta$ é igual a $\Theta\Xi$, a razão entre $\Theta\Xi$ e ΘX é igual à razão entre o paralelogramo determinado no semicilindro e [aquele] determinado no segmento cortado do cilindro.

Imagine-se que o paralelogramo no segmento seja deslocado e colocado no ponto Ξ de modo que Ξ seja o seu centro de gravidade, e ainda imagine-se que $\Pi\Xi$ seja uma alavanca cujo ponto médio seja Θ . Então o paralelogramo no semicilindro, permanecendo no seu lugar, equilibra em torno do ponto Θ o paralelogramo determinado no segmento do cilindro,

[Pág. 117]

deslocado e colocado no ponto Ξ da alavanca, de modo que o ponto Ξ seja o seu centro de gravidade.

Como X é o centro de gravidade do paralelogramo determinado no semicilindro, como Ξ é o centro de gravidade do paralelogramo determinado no segmento [cilíndrico] cortado e deslocado, e [como] a razão entre $\Xi\Theta$ e ΘX é igual à razão entre o paralelogramo que dissemos ter X como centro de gravidade e o paralelogramo que dissemos ter Ξ como centro de gravidade, então o paralelogramo cujo centro de gravidade é X , equilibrará em torno do [ponto] Θ , o paralelogramo cujo centro de gravidade é Ξ .

Será demonstrado da mesma maneira que, toda vez que for traçada no semicírculo OIP qualquer outra perpendicular a $\Pi\Theta$ e pela [reta] traçada for levantado um plano perpendicular a $\Pi\Theta$ e prolongado dos dois lados do plano em que está o círculo ΞOIP , o paralelogramo determinado no semicírculo, permanecendo no seu lugar, equilibrará em relação ao ponto Θ , o paralelogramo determinado no segmento cortado do cilindro, deslocado e colocado na alavanca em Ξ de tal maneira que o seu centro de gravidade seja o ponto Ξ .

Portanto, todos os paralelogramos determinados no cilindro, permanecendo nos seus lugares, equilibrarão em torno do ponto Θ todos os paralelogramos determinados no segmento cortado do cilindro, deslocados e colocados no ponto Ξ da alavanca. Por conseguinte, também o semicilindro permanecendo no seu lugar, equilibra em relação ao ponto Θ o segmento cortado [do cilindro]

[Pág. 118]

deslocado e colocado no ponto Ξ da alavanca, de modo que o ponto Ξ seja o seu centro de gravidade.

10.16 [Teorema] XIII. [*Volume da Unha Cilíndrica. Determinação Mecânica — Continuação.*]

Seja de novo o paralelogramo MN perpendicular ao eixo¹⁴⁸ e o círculo ΞOIP . Sejam traçadas as [retas] ΘM e ΘH e a partir delas sejam levantados planos perpendiculares ao plano em que está o semicírculo OIP e sejam prolongados os ditos planos de ambos os lados.¹⁴⁹

¹⁴⁷Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 1, [24, pág. 231]: “Os triângulos e os paralelogramos que estão sob a mesma altura estão entre si como as bases.”

¹⁴⁸Isto é, perpendicular ao eixo do cilindro.

¹⁴⁹Isto é, de ambos os lados do plano que contém o círculo.

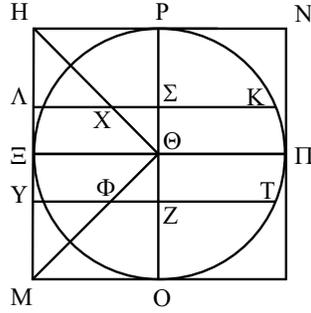


Figura 10.11: Figura do Teorema XIII.

Haverá então um prisma tendo uma base tão grande quanto o triângulo ΘMH e uma altura igual ao eixo do cilindro. Este prisma é a quarta parte de todo o prisma que contém o cilindro.¹⁵⁰ Sejam traçadas no semicírculo OIP e no quadrado MN [duas] retas quaisquer $K\Lambda$ e TY equidistantes de ΠE . Estas retas cortam a circunferência do semicírculo OIP nos pontos K e T , o diâmetro OP em Σ e Z , e as [retas] ΘH e ΘM nos [pontos] Φ e X .

Sejam levantados pelas [retas] $K\Lambda$ e TY planos perpendiculares a OP e sejam prolongados estes planos de ambos os lados do plano em que está o círculo ΞOIP . Então

[Pág. 119]

um dos dois planos determinará como interseção no semicilindro cuja base é o semicírculo OIP e [cuja] altura é aquela do cilindro, um paralelogramo do qual um dos lados é igual a $K\Sigma$ e o outro lado é igual ao eixo do cilindro. Da mesma maneira, [determinará como interseção] no prisma ΘHM , [um paralelogramo] do qual um dos lados será igual a ΛX e o outro será igual ao eixo.

Pelos mesmos motivos, no mesmo semicilindro haverá um outro paralelogramo do qual um dos lados é igual a TZ e o outro é igual ao eixo do cilindro, e no prisma, um [outro] paralelogramo do qual um dos lados é igual a $Y\Phi$ e o outro é igual ao eixo do cilindro...¹⁵¹

10.17 [Teorema] XIV. [Uma Outra Determinação do Volume da Unha Cilíndrica.]

Seja¹⁵² um prisma reto de bases quadradas e seja o quadrado $AB\Gamma\Delta$ uma das bases. Seja um cilindro inscrito no prisma, e seja a base do cilindro, o círculo $EZH\Theta$, tangente aos lados do [quadrado] $AB\Gamma\Delta$ nos [pontos] E , Z , H e Δ . Seja traçado um plano pelo centro do círculo e pelo lado do quadrado do plano oposto

¹⁵⁰Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XI, Proposição 32, citada na Seção 9.11, ver ainda [23, Volume 3, pág. 341] e [24, pág. 513].

¹⁵¹No manuscrito do *Códice C* falta o texto grego referente à demonstração deste teorema. Porém, com os conhecimentos já adquiridos sobre o método usado por Arquimedes, é possível reconstruir o raciocínio que permite chegar à conclusão final. Os detalhes das construções físicas baseadas na lei da alavanca que permitem determinar o volume da unha cilíndrica, são comentados com as figuras necessárias na Seção 9.11.

¹⁵²Para uma visão alternativa sobre este Teorema, ver [46] e [47].

[Pág. 120]

ao plano $AB\Gamma\Delta$ e correspondente [ao lado] $\Gamma\Delta$.

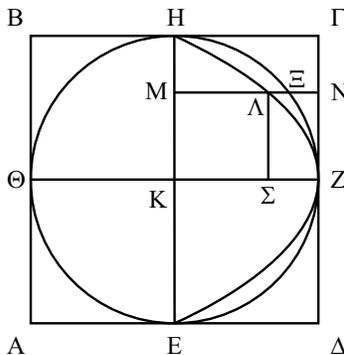


Figura 10.12: Figura do Teorema XIV.

Este [plano] cortará do prisma inteiro um outro prisma que será a quarta parte do prisma inteiro e que será delimitado por três paralelogramos e por dois triângulos opostos entre si.

Seja então inscrita no semicírculo EZH uma parábola e seja ZK [a parte do seu diâmetro situada no segmento] da parábola. Seja traçada no paralelogramo ΔH uma [reta] qualquer MN paralela a KZ . Ela cortará a circunferência do semicírculo em Ξ e a parábola em Λ .

Então o [retângulo]¹⁵³ MNA é equivalente ao [quadrado de lado] NZ , pois isto é evidente.¹⁵⁴ Por isso então, MN está para NA assim como o [quadrado] sobre KH está para o [quadrado] sobre $\Lambda\Sigma$.

Seja também levantado sobre MN um plano perpendicular a EH . Este plano fará interseção com o prisma cortado do prisma inteiro, segundo um triângulo retângulo do qual um dos lados em torno do ângulo reto será MN , e o outro [lado], no plano [passando] por $\Gamma\Delta$, perpendicular à reta $\Gamma\Delta$, traçado a partir do [ponto] N , [será] igual ao eixo do cilindro, e a hipotenusa [estará] no próprio plano secante.

[Este plano] fará também interseção com o segmento cortado do cilindro pelo plano traçado por EH e pelo lado do quadrado oposto a $\Gamma\Delta$, segundo um triângulo retângulo do qual um dos lados adjacentes ao ângulo reto será $M\Xi$ e o outro [lado estará] na superfície do cilindro, traçado por Ξ e perpendicular ao plano KN , e a hipotenusa [estará] no plano secante.

Portanto, pelos mesmos motivos, o [retângulo de lados] MN e $M\Lambda$ é equivalente ao [quadrado de lado] $M\Xi$, pois isto é evidente. E como MN estará para $M\Lambda$, assim o [quadrado] sobre MN [estará] para o [quadrado] sobre $M\Xi$. Mas a razão do [quadrado] sobre MN para o [quadrado] sobre $M\Xi$

[Pág. 121]

¹⁵³Com a denominação MNA , Arquimedes entende o retângulo de lados MN e NA .

¹⁵⁴Esta igualdade corresponde a aplicar a Equação da parábola ao ponto Λ , considerando que o *parâmetro* (*orthia*) da parábola é MN . Portanto, a Equação é: $(MN)(NA) = Q(NZ)$.

é igual à razão do triângulo sobre MN determinado no prisma, para o triângulo sobre MΞ cortado no segmento pela superfície do cilindro. Portanto, MN está para MΛ assim como o triângulo [do prisma] está para o triângulo [do segmento].

Da mesma maneira será também demonstrado que se for traçada, no paralelogramo circunscrito à parábola, qualquer outra paralela a KZ, e se, a partir da [reta] traçada for levantado um plano perpendicular a EH, o triângulo determinado no prisma estará para [o triângulo determinado] no segmento do cilindro assim como a paralela traçada a KZ no paralelogramo ΔH está para [a reta] interceptada entre a parábola EZ e o diâmetro EH.

Preenchido então o paralelogramo ΔH pelas paralelas a KZ, e o segmento compreendido entre a parábola e o diâmetro preenchido com os segmentos [de reta] interceptados...¹⁵⁵ às paralelas a KZ traçadas no paralelogramo, e [a razão] entre todos os triângulos no prisma e todos os triângulos no segmento cortado do cilindro será igual [à razão] entre todas as retas [interceptadas] entre a parábola e a reta EH.

[Pág. 122]

Mas o prisma é constituído por todos os triângulos do prisma, enquanto que o segmento cilíndrico [é constituído] por todos [os triângulos] do segmento, e o paralelogramo ΔH [é constituído por] todas as paralelas a KZ dentro do paralelogramo, enquanto que o segmento de parábola [é constituído] por todas [as retas] entre a parábola e a [reta] EH.

Por conseguinte, o prisma [está] para o segmento cortado do cilindro, assim como o paralelogramo ΔH [está] para o segmento EZH compreendido entre a parábola e a reta EH.

Mas o paralelogramo ΔH é uma vez e meia o segmento compreendido entre a parábola e a reta EH, pois isso foi demonstrado¹⁵⁶ nos [escritos] publicados anteriormente. Portanto, também o prisma é uma vez e meia o segmento cortado do cilindro. Então o segmento do cilindro está para dois assim como o prisma está para três. Mas o prisma está para três assim como todo o prisma circunscrito ao cilindro está para doze, por ser um [prisma] um quarto do outro [prisma].

Portanto, o segmento do cilindro está para dois, assim como todo o prisma está para doze. Desta maneira, o segmento cortado do cilindro é a sexta parte do prisma.

10.18 [Teorema] XV. [*Demonstração Geométrica do Teorema XII.*]

Seja um prisma reto de bases quadradas, sendo uma delas o quadrado ABΓΔ. Seja inscrito no prisma um cilindro, cuja base é o círculo EZH. Então este é tangente aos lados do quadrado nos pontos E, Z, H e Θ. Seja K o centro [do círculo]

[Pág. 123]

e pelo diâmetro EH e por um dos lados [do quadrado oposto, correspondente a ΓΔ], seja traçado um plano...¹⁵⁷ Então este plano corta do prisma inteiro, um prisma, e [corta] do cilindro, um

¹⁵⁵Neste ponto existe uma lacuna no texto grego que Heiberg não conseguiu preencher. Foi somente em 2001 que Netz, Saito e Tchernetska, [46] e [47], usando tecnologias modernas, publicaram uma “nova leitura” do texto grego deste teorema, preenchendo a lacuna. Porém, devemos observar que o preenchimento desta lacuna não afeta as conclusões do teorema.

¹⁵⁶Ver *O Método*, Teorema I e a *Quadratura da Parábola*, Proposição 24, [18, pág. 193].

¹⁵⁷O texto grego apresenta algumas falhas, que podem ser reconstituídas a partir dos Teoremas XII e XIV, pois trata-se da construção da mesma Figura (uma unha cilíndrica ou um segmento de cilindro, como esta forma

segmento cilíndrico.

Afirmo que este segmento cortado do cilindro pelo plano traçado, é a sexta parte do prisma inteiro, o que será demonstrado.

Inicialmente demonstraremos que será possível inscrever, e também circunscrever, no segmento cortado do cilindro, uma figura sólida constituída por prismas tendo a mesma altura e tendo como bases triângulos semelhantes, de modo que a figura circunscrita seja maior que a inscrita, [por uma grandeza] menor que qualquer grandeza considerada.

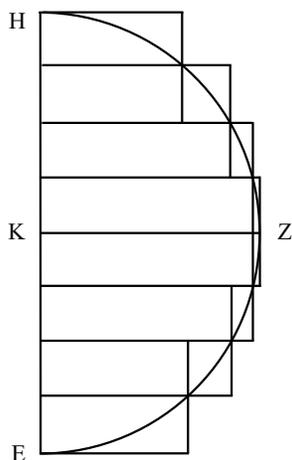


Figura 10.13: Primeira Figura do Teorema XV.

[Divida-se,¹⁵⁸ portanto, o diâmetro EH do semicírculo EZH, sucessivamente, em duas partes iguais. Sejam traçadas pelos pontos de divisão as paralelas a KZ cortando a circunferência do semicírculo. Sejam traçadas, pelos pontos de interseção destas retas com a circunferência, as paralelas a EH e sejam essas prolongadas dos dois lados até sua interseção com as duas paralelas a KZ mais próximas.

Sejam traçados pelas paralelas planos perpendiculares ao plano do semicírculo. Estes planos determinarão prismas inscritos e circunscritos ao segmento cilíndrico, tendo a mesma altura e tendo como bases triângulos retângulos com um cateto sobre as paralelas a KZ.

Se agora continuarmos a divisão de EH em duas partes iguais até que os dois prismas adjacentes a KZ sejam menores que uma grandeza qualquer,¹⁵⁹ a diferença entre as figuras sólidas circunscrita e inscrita ao segmento cilíndrico será também menor que uma grandeza qualquer,

geométrica é chamada por Arquimedes).

¹⁵⁸Existe neste ponto do texto grego uma grande lacuna que não foi possível reconstituir. Heiberg, porém, conseguiu reproduzir o desenvolvimento lógico que estava faltando, seguindo o estilo de Arquimedes. Apresentamos a seguir a demonstração de acordo com Heiberg.

¹⁵⁹Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro X, Proposição 1, [24, pág. 354]: “Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta.”

pois esta diferença é igual à soma dos dois prismas adjacentes a KZ. Com efeito, a todos os outros prismas da figura circunscrita correspondem prismas iguais da figura inscrita.

[Pág. 124]

Seja agora traçada no semicírculo uma parábola EZH e pelos seus pontos de interseção com as retas paralelas a KZ, sejam traçadas paralelas a EH as quais sejam prolongadas como dito anteriormente.¹⁶⁰

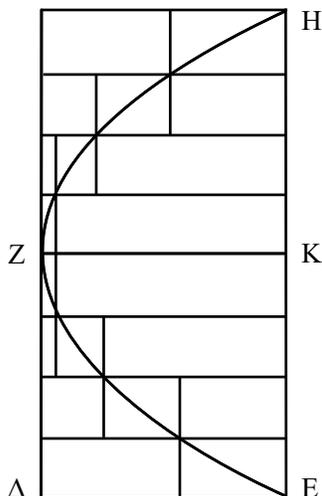


Figura 10.14: Segunda Figura do Teorema XV.

Existirão então duas figuras, uma circunscrita e outra inscrita ao segmento de parábola, constituídas por paralelogramos¹⁶¹ tais que a diferença entre a primeira e a segunda seja igual à soma dos dois paralelogramos tendo a base comum em ZK. Além disso, cada um desses paralelogramos corresponde a um dos prismas no interior das figuras sólidas mencionados anteriormente.

[Pág. 125]

Agora, se o segmento cortado do cilindro não é equivalente à sexta parte do prisma inteiro, será então maior ou menor.

Imagine-se inicialmente que seja maior. O prisma cortado pelo plano inclinado é, portanto, menor que três meios do segmento de cilindro.¹⁶²

Agora inscreva-se e circunscreva-se ao segmento cilíndrico figuras sólidas tais como foi dito, de modo que a diferença entre a figura circunscrita e a inscrita seja menor que uma grandeza qualquer.

¹⁶⁰Como no caso do semicírculo, estas retas são prolongadas dos dois lados até sua interseção com as duas paralelas a KZ mais próximas.

¹⁶¹No caso trata-se de retângulos.

¹⁶²Chamando SC = Segmento Cilíndrico, PP = Prisma Parcial e PT = Prisma Total, temos pelo Teorema XIV que: $PP = (1/4)PT$ e pela hipótese estabelecida $SC > (1/6)PT$. Portanto: $SC > (4/6)PP$, ou $PP < (3/2)SC$.

Então, como foi demonstrado,¹⁶³ a razão entre as retas traçadas no paralelogramo ΔH e as retas interceptadas entre a parábola e a reta EH , é igual à razão entre os triângulos do prisma cortado pelo plano inclinado e os triângulos do segmento cilíndrico. Ou seja, é igual à razão entre os prismas contidos no prisma cortado pelo plano inclinado e os prismas contidos na figura sólida inscrita,¹⁶⁴ diminuída de dois.¹⁶⁵

E como a razão entre as retas indicadas é igual à razão dos paralelogramos em que é dividido o paralelogramo ΔH , com os paralelogramos contidos na figura inscrita na parábola,¹⁶⁶ menos dois,¹⁶⁷ então o prisma cortado pelo plano inclinado estará para a figura inscrita, assim como¹⁶⁸ o paralelogramo ΔH está para a figura inscrita na parábola.

Portanto, sendo que o prisma cortado pelo plano inclinado é inferior aos três meios do segmento cilíndrico¹⁶⁹ e sendo a diferença entre este último e a figura inscrita inferior a uma grandeza qualquer,¹⁷⁰ então o prisma cortado pelo plano inclinado será inferior aos três meios da figura sólida inscrita no segmento cortado do cilindro.

Mas foi demonstrado que o prisma cortado pelo plano inclinado está para a figura sólida inscrita no segmento cortado do cilindro, assim como o paralelogramo ΔH está para a soma dos paralelogramos inscritos no segmento, compreendidos entre a parábola e a reta EH .

Portanto, o paralelogramo ΔH é menor que os três meios da soma dos paralelogramos do segmento¹⁷¹ compreendido entre a parábola e a reta EH . Isto certamente é impossível, pois foi demonstrado em outro lugar¹⁷² que o paralelogramo ΔH é equivalente aos três meios do segmento [de parábola] compreendido entre a parábola e a reta EH .

[Pág. 126]

Portanto, o segmento cilíndrico não é superior¹⁷³ [à sexta parte do prisma inteiro.

Imagine-se em seguida que o segmento cilíndrico cortado seja então inferior à sexta parte do prisma inteiro. O prisma cortado pelo plano inclinado é, portanto, superior aos três meios do segmento cilíndrico.

Seja circunscrita novamente ao segmento cilíndrico uma figura sólida e seja inscrita uma outra da maneira descrita anteriormente. Será demonstrado também do mesmo modo que a razão entre a soma dos prismas contidos no prisma cortado pelo plano inclinado e a soma dos prismas da figura circunscrita ao segmento cilíndrico é igual à razão entre os paralelogramos contidos no paralelogramo ΔH e os paralelogramos da figura circunscrita ao segmento de parábola

¹⁶³Ver o Teorema XIV.

¹⁶⁴Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro XI, Proposição 32, citada na Seção 9.11, ver ainda [23, Volume 3, pág. 341] e [24, pág. 513].

¹⁶⁵Existem dois prismas pequenos a mais no prisma cortado pelo plano inclinado, do que o número de prismas pequenos contidos na figura sólida inscrita.

¹⁶⁶Ver *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 1, citada na Nota de Rodapé 147, página 131 desta tese, ver ainda [23, Volume 2, pág. 191] e [24, 231].

¹⁶⁷Existem dois paralelogramos pequenos a mais no paralelogramo ΔH , do que o número de paralelogramos pequenos contidos na figura inscrita na parábola.

¹⁶⁸Ver o Teorema mencionado em *O Método* logo após os Lemas, página 107 desta tese. Ver ainda *Sobre Conoides e Esferoides*, Proposição 1, [15, págs. 105-106], assim como os comentários de Rufini, [21, pág. 106].

¹⁶⁹Pela hipótese suposta neste caso.

¹⁷⁰Fim da lacuna

¹⁷¹Este segmento é o segmento de parábola.

¹⁷²Ver a *Quadratura da Parábola*, Proposição 24, [18, pág. 193] e *O Método*, Teorema I.

¹⁷³Neste ponto há outra lacuna no texto grego. O raciocínio a seguir foi reconstituído por Heiberg.

compreendidos entre a parábola e a reta EH.]¹⁷⁴

Portanto, a razão entre [a soma de] todos os prismas no prisma cortado pelo plano inclinado e [a soma de] todos os prismas na figura circunscrita ao segmento cilíndrico será igual à razão entre [a soma] de todos os paralelogramos no paralelogramo ΔH e [a soma] de todos os paralelogramos na figura circunscrita ao segmento, compreendidos entre a parábola e a reta EH.

Isto é, o prisma cortado pelo plano inclinado e a figura circunscrita ao segmento cilíndrico, terão a mesma razão que o paralelogramo ΔH e a figura circunscrita ao segmento [de parábola] compreendida entre a parábola e a reta EH.

[Pág. 127]

Mas o prisma cortado pelo plano inclinado é superior aos três meios da figura sólida circunscrita ao segmento cilíndrico.¹⁷⁵ [Por conseguinte, o paralelogramo ΔH também é superior aos três meios da figura circunscrita ao segmento de parábola compreendida entre a parábola e a reta EH, o que certamente é impossível, pois foi demonstrado em outro lugar¹⁷⁶ que o paralelogramo ΔH é equivalente aos três meios do segmento de parábola compreendido entre a parábola e a reta EH.

Portanto, o segmento cilíndrico também não é inferior à sexta parte do prisma inteiro. Assim então, o segmento cilíndrico não sendo nem inferior nem superior, ele será igual à sexta parte do prisma todo, como era necessário demonstrar.]

¹⁷⁴Neste ponto termina a lacuna do texto grego.

¹⁷⁵O texto grego apresenta aqui mais uma lacuna bem na parte da conclusão final do teorema. A reconstituição desta parte apresentada a seguir também é devida a Heiberg. É a partir dela que foram feitas as traduções em outros idiomas.

¹⁷⁶Ver a *Quadratura da Parábola*, Proposição 24, [18, pág. 193].

Capítulo 11

Conclusão

Com a tradução completa e comentada desta obra fascinante de Arquimedes concluímos esta tese.

Para provar teoremas puramente geométricos como cálculos de áreas e de volumes, ele utilizou aspectos básicos da mecânica. Em particular, podemos citar a utilização do conceito de centro de gravidade, a lei da alavanca e condições de equilíbrio de corpos sob a ação gravitacional terrestre.

A leitura desse livro de Arquimedes onde são tratados e exemplificados estes temas importantes é um grande desafio para o leitor moderno. Isto ocorre não apenas pela linguagem dos matemáticos gregos, muito distante da nossa, mas também pela complexidade do raciocínio do autor.

Através desta tese procuramos apresentar estes conceitos usando uma linguagem matemática mais próxima da nossa cultura. Além disso, apresentamos figuras de diversas alavancas em equilíbrio com corpos dependurados em seus braços e estando a distâncias específicas do fulcro, seguindo as especificações de Arquimedes. Isto permite uma interpretação experimental das passagens físicas envolvidas no seu raciocínio.

Acreditamos dessa maneira poder contribuir para uma maior divulgação das obras de Arquimedes, que já conta com alguns de seus livros traduzidos e comentados em português, como listado na bibliografia ao final desta tese.

Esta relação pode ser escrita matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{A\Delta}{\Delta\varepsilon} = \frac{\varepsilon N}{NO} . \quad (\text{A.1})$$

Ou:

$$\frac{A\Delta}{A\Delta - A\varepsilon} = \frac{\varepsilon N}{\varepsilon N - \varepsilon O} . \quad (\text{A.2})$$

Pelas propriedades das proporções dadas pelas Equações (7.21) e (7.27), temos:

$$\frac{A\Delta}{A\varepsilon} = \frac{\varepsilon N}{O\varepsilon} . \quad (\text{A.3})$$

Portanto:

$$\frac{\varrho(A\Delta)}{A\varepsilon} = \frac{\varrho(\varepsilon N)}{O\varepsilon} . \quad (\text{A.4})$$

Com isto vem então:

$$\frac{A\Gamma}{A\varepsilon} = \frac{\varepsilon M}{O\varepsilon} . \quad (\text{A.5})$$

Mas de acordo com a Proposição 2 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides, citada na página 44 desta tese, juntamente com a Figura A.1, vem que:

$$\frac{A\Gamma}{A\varepsilon} = \frac{K\Gamma}{KN} . \quad (\text{A.6})$$

Mas por construção temos que:

$$K\Gamma = K\theta . \quad (\text{A.7})$$

Então, pelas Equações (A.5), (A.6) e (A.7) temos:

$$\frac{\varepsilon M}{O\varepsilon} = \frac{K\Gamma}{KN} = \frac{K\theta}{KN} . \quad (\text{A.8})$$

Esta Equação, análoga à Equação (9.2), é o ponto de partida da demonstração física.

A.2 Teoremas II e VII

Nesta Seção apresentamos a demonstração das relações matemáticas necessárias para os Teoremas II e VII. Em particular, vamos apresentar a demonstração da Equação (9.11).

Os objetos que nos interessam neste caso são representados pela Figura A.2.

Para a demonstração da relação matemática básica necessária para a dedução física do Teorema II, Arquimedes parte das igualdades obtidas na construção desta figura, a saber:

$$\Gamma A = \Sigma M , \quad (\text{A.9})$$

e

$$A\Sigma = \Sigma\Pi . \quad (\text{A.10})$$

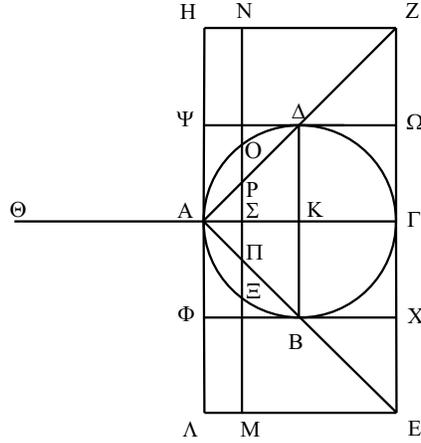


Figura A.2: Figura do Teorema II

Vamos representar $R(AB, CD)$ como sendo o retângulo de lados AB e CD , e $Q(FG)$ como sendo o quadrado de lado FG . Multiplicando as Equações (A.9) e (A.10) membro a membro, obtemos:

$$R(\Gamma A, A\Sigma) = R(M\Sigma, \Sigma\Pi) , \quad (\text{A.11})$$

De acordo com o Corolário da Proposição 8 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides, citado na página 41 desta tese, juntamente com a Figura A.2, temos que:

$$R(\Gamma A, A\Sigma) = Q(A\varepsilon) . \quad (\text{A.12})$$

Portanto:

$$R(M\Sigma, \Sigma\Pi) = Q(A\varepsilon) . \quad (\text{A.13})$$

Da Figura A.2 vem que o triângulo $A\Sigma\Pi$ é isósceles, tal que

$$A\Sigma = \Sigma\Pi . \quad (\text{A.14})$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $A\Sigma\varepsilon$ e usando a Equação (A.14), obtemos:

$$Q(A\varepsilon) = Q(A\Sigma) + Q(\varepsilon\Sigma) = Q(\Sigma\Pi) + Q(\varepsilon\Sigma) . \quad (\text{A.15})$$

Combinando as Equações (A.13) e (A.15) vem que:

$$R(M\Sigma, \Sigma\Pi) = Q(\varepsilon\Sigma) + Q(\Sigma\Pi) . \quad (\text{A.16})$$

Agora dividimos membro a membro as identidades das Equações (A.9) e (A.10), obtendo:

$$\frac{\Gamma A}{A\Sigma} = \frac{M\Sigma}{\Sigma\Pi} . \quad (\text{A.17})$$

Por construção temos que:

$$\Gamma A = \Theta A . \quad (\text{A.18})$$

A demonstração da relação matemática necessária para provar este teorema começa com a observação de que os triângulos $AE\Gamma$ e $A\Pi\Sigma$ são equiângulos. Portanto, aplica-se a Proposição 4 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides.¹ Temos então as seguintes proporções:

$$\frac{A\Gamma}{A\Sigma} = \frac{AE}{A\Pi} , \quad (\text{A.24})$$

e

$$\frac{AE}{A\Pi} = \frac{E\Gamma}{\Pi\Sigma} . \quad (\text{A.25})$$

Mas, por construção:

$$A\Gamma = \Theta A . \quad (\text{A.26})$$

Sendo $M\Sigma$ e $E\Gamma$ os lados opostos de um paralelogramo, temos que:

$$M\Sigma = E\Gamma . \quad (\text{A.27})$$

Então podemos escrever que:

$$\frac{\Theta A}{A\Sigma} = \frac{M\Sigma}{\Sigma\Pi} . \quad (\text{A.28})$$

Por outro lado, multiplicando o numerador e o denominador do segundo membro por $M\Sigma$ temos:

$$\frac{M\Sigma}{\Sigma\Pi} = \frac{(M\Sigma)(M\Sigma)}{(M\Sigma)(\Sigma\Pi)} = \frac{Q(M\Sigma)}{R(M\Sigma, \Sigma\Pi)} . \quad (\text{A.29})$$

Aqui estamos usando a notação $Q(M\Sigma)$ como sendo o quadrado de lado $M\Sigma$ e $R(M\Sigma, \Sigma\Pi)$ como sendo o retângulo de lados $M\Sigma$ e $\Sigma\Pi$.

Neste ponto, para seguir o raciocínio de Arquimedes, devemos introduzir a equação da elipse (8.23), tal como foi deduzida no Capítulo 8, que lembramos aqui, de forma simplificada:²

$$\frac{Q(\textit{ordenada})}{R(\textit{abscissa}, \textit{complemento da abscissa})} = \textit{constante} . \quad (\text{A.30})$$

Aplicando esta Equação a dois pontos de uma elipse que podemos chamar de 1 e 2, teremos então:

$$\frac{R(\textit{abscissa}_1, \textit{complemento}_1)}{Q(\textit{ordenada}_1)} = \frac{R(\textit{abscissa}_2, \textit{complemento}_2)}{Q(\textit{ordenada}_2)} . \quad (\text{A.31})$$

Esta expressão aplicada aos pontos Ξ e B na Figura 9.15 permite escrever:

$$\frac{R(A\Sigma, \Sigma\Gamma)}{Q(\Sigma\Xi)} = \frac{R(AK, K\Gamma)}{Q(KB)} . \quad (\text{A.32})$$

Mas

$$AK = K\Gamma . \quad (\text{A.33})$$

¹Citada na Subseção 8.3.1, página 41 desta tese, ver também [23, Volume 2, pág. 200] e [24, pág. 235].

²Chamamos de *complemento da abscissa* ou simplesmente de *complemento* à diferença entre o eixo maior da elipse e a própria abscissa.

Então:

$$R(AK, K\Gamma) = Q(AK) . \quad (\text{A.34})$$

Pela semelhança dos triângulos AKB e $A\Sigma\Pi$, temos:

$$\frac{AK}{KB} = \frac{A\Sigma}{\Sigma\Pi} , \quad (\text{A.35})$$

e também:

$$\frac{Q(AK)}{Q(KB)} = \frac{Q(A\Sigma)}{Q(\Sigma\Pi)} . \quad (\text{A.36})$$

Substituindo estes resultados na Equação (A.32) obtém-se:

$$\frac{R(A\Sigma, \Sigma\Gamma)}{Q(\Sigma\varepsilon)} = \frac{Q(AK)}{Q(KB)} = \frac{Q(A\Sigma)}{Q(\Sigma\Pi)} . \quad (\text{A.37})$$

Pela propriedade *permutando* das proporções³ aplicada à Equação (A.37), temos:

$$\frac{Q(A\Sigma)}{R(A\Sigma, \Sigma\Gamma)} = \frac{Q(\Sigma\Pi)}{Q(\Sigma\varepsilon)} . \quad (\text{A.38})$$

Agora, na Figura 9.15 verificamos que os triângulos $A\Sigma\Pi$ e ΠME são semelhantes por serem equiângulos. Portanto, podemos escrever que:

$$\frac{A\Sigma}{ME} = \frac{\Sigma\Pi}{M\Pi} . \quad (\text{A.39})$$

Mas, por serem lados opostos de um paralelogramo, temos que:

$$ME = \Sigma\Gamma . \quad (\text{A.40})$$

Então:

$$\frac{A\Sigma}{\Sigma\Gamma} = \frac{\Sigma\Pi}{M\Pi} . \quad (\text{A.41})$$

Multiplicando o numerador e o denominador do primeiro membro desta igualdade por $A\Sigma$ e multiplicando o numerador e o denominador do segundo membro por $\Sigma\Pi$ temos:

$$\frac{(A\Sigma)(A\Sigma)}{(\Sigma\Gamma)(A\Sigma)} = \frac{(\Sigma\Pi)(\Sigma\Pi)}{(M\Pi)(\Sigma\Pi)} . \quad (\text{A.42})$$

Utilizando a notação simplificada obtém-se então:

$$\frac{Q(A\Sigma)}{R(A\Sigma, \Sigma\Gamma)} = \frac{Q(\Sigma\Pi)}{R(M\Pi, \Sigma\Pi)} . \quad (\text{A.43})$$

Comparando este resultado com a Equação (A.38) concluímos que:

$$R(M\Pi, \Pi\Sigma) = Q(\Xi\Sigma) . \quad (\text{A.44})$$

Somando $Q(\Pi\Sigma)$ aos dois membros desta igualdade, obtemos:

³Ver a Equação (7.20).

$$(M\Pi)(\Pi\Sigma) + (\Pi\Sigma)(\Pi\Sigma) = Q(\Xi\Sigma) + Q(\Pi\Sigma) . \quad (\text{A.45})$$

Ou então:

$$(\Pi\Sigma)[(M\Pi) + (\Pi\Sigma)] = Q(\Xi\Sigma) + Q(\Pi\Sigma) , \quad (\text{A.46})$$

ou ainda:

$$R(M\Sigma, \Sigma\Pi) = Q(\Xi\Sigma) + Q(\Pi\Sigma) . \quad (\text{A.47})$$

Substituindo o valor da Equação (A.47) na Equação (A.29), temos:

$$\frac{M\Sigma}{\Sigma\Pi} = \frac{Q(M\Sigma)}{R(M\Sigma, \Sigma\Pi)} = \frac{Q(M\Sigma)}{Q(\Xi\Sigma) + Q(\Pi\Sigma)} . \quad (\text{A.48})$$

Concluimos a dedução matemática comparando a Equação (A.48) com a Equação (A.28), obtendo:

$$\frac{\Theta A}{A\Sigma} = \frac{Q(M\Sigma)}{Q(\Xi\Sigma) + Q(\Pi\Sigma)} . \quad (\text{A.49})$$

Esta Equação, análoga à Eq. (9.25), é a base matemática necessária para a demonstração física do terceiro Teorema.

A.4 Teorema IV

Apresentamos agora a demonstração da Equação (9.39). Os objetos deste Teorema estão representados na Figura A.4.

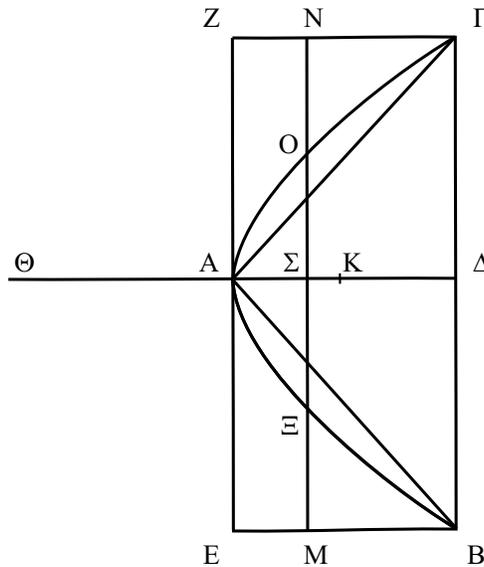


Figura A.4: Construção geométrica do teorema IV.

Sendo $BA\Gamma$ uma parábola e sendo as retas $\Xi\Sigma$ e $B\Delta$ duas ordenadas,⁴ podemos escrever, aplicando a Equação da parábola para os pontos B e Ξ :

$$Q(B\Delta) = (\text{constante})(A\Delta) , \quad (\text{A.50})$$

e

$$Q(\Xi\Sigma) = (\text{constante})(A\Sigma) . \quad (\text{A.51})$$

Dividindo membro a membro temos:

$$\frac{A\Delta}{A\Sigma} = \frac{Q(B\Delta)}{Q(\Xi\Sigma)} . \quad (\text{A.52})$$

Mas

$$A\Delta = A\Theta , \quad (\text{A.53})$$

e

$$B\Delta = M\Sigma . \quad (\text{A.54})$$

Portanto:

$$\frac{A\Theta}{A\Sigma} = \frac{Q(M\Sigma)}{Q(\Xi\Sigma)} . \quad (\text{A.55})$$

Esta Equação, análoga à Equação (9.39), é a base matemática necessária para a demonstração física deste Teorema.

A.5 Teorema V

Apresentamos agora a demonstração matemática da Equação (9.46). Os objetos representados neste Teorema aparecem na Figura A.5.

Usando o mesmo raciocínio do teorema anterior e aplicando a Equação da parábola⁵ para os pontos B e Ξ , temos:

$$\frac{A\Delta}{A\Sigma} = \frac{Q(B\Delta)}{Q(\Xi\Sigma)} . \quad (\text{A.56})$$

Por outro lado, devido à semelhança dos triângulos $AB\Delta$ e $A\Pi\Sigma$, temos:

$$\frac{A\Delta}{A\Sigma} = \frac{B\Delta}{\Pi\Sigma} . \quad (\text{A.57})$$

Desta última Equação, multiplicando o numerador e o denominador do segundo membro por $B\Delta$ vem:

$$\frac{A\Delta}{A\Sigma} = \frac{Q(B\Delta)}{R(\Pi\Sigma, B\Delta)} . \quad (\text{A.58})$$

Comparando as Equações (A.56) e (A.58) concluímos que:

⁴Ver a Equação (8.10).

⁵Ver a Equação (8.10).

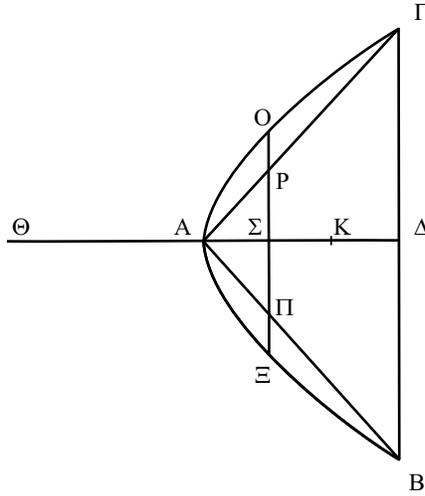


Figura A.5: Construção geométrica do teorema V.

$$\frac{Q(B\Delta)}{Q(\Xi\Sigma)} = \frac{Q(B\Delta)}{R(\Pi\Sigma, B\Delta)} . \quad (\text{A.59})$$

Portanto,

$$Q(\Xi\Sigma) = R(\Pi\Sigma, B\Delta) . \quad (\text{A.60})$$

De acordo com *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 17:⁶

Caso três retas estejam em proporção, o retângulo contido pelos extremos é igual ao quadrado sobre a média; e, caso o retângulo contido pelos extremos seja igual ao quadrado sobre a média, as três retas estarão em proporção.

Ou seja, se três segmentos de reta são proporcionais, então o retângulo formado pelos extremos é igual ao quadrado do termo médio. Isto pode ser escrito da seguinte forma. Caso:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} , \quad (\text{A.61})$$

então

$$ac = b^2 , \quad (\text{A.62})$$

e vice-versa.

A Equação (A.60) é análoga à Equação (A.62). Concluimos então que os segmentos de reta $B\Delta$, $\Sigma\Xi$ e $\Sigma\Pi$ são proporcionais, ou seja:

$$\frac{B\Delta}{\Sigma\Xi} = \frac{\Sigma\Pi}{\Sigma\Pi} . \quad (\text{A.63})$$

Assim sendo, temos também, pelas propriedades das proporções,⁷ que:

⁶[24, pág. 248].

⁷A Equação (7.13) permite escrever que se $(a/b = b/c)$, então vale também a seguinte proporção:

$$\frac{B\Delta}{\Pi\Sigma} = \frac{Q(\Xi\Sigma)}{Q(\Pi\Sigma)} . \quad (\text{A.64})$$

Por construção temos que:

$$\Theta A = A\Delta . \quad (\text{A.65})$$

Pelas Equações (A.57) e (A.65) vem que:

$$\frac{B\Delta}{\Pi\Sigma} = \frac{A\Delta}{A\Sigma} = \frac{A\Theta}{A\Sigma} . \quad (\text{A.66})$$

Portanto, pela Equação (A.64) obtemos:

$$\frac{\Theta A}{A\Sigma} = \frac{Q(\Xi\Sigma)}{Q(\Pi\Sigma)} . \quad (\text{A.67})$$

Esta Equação, análoga à Equação (9.46), é a relação matemática básica necessária para a demonstração física deste quinto Teorema.

A.6 Teorema VI

Apresentamos agora a dedução da Equação (9.54). Os objetos representados neste Teorema aparecem na Figura A.6.

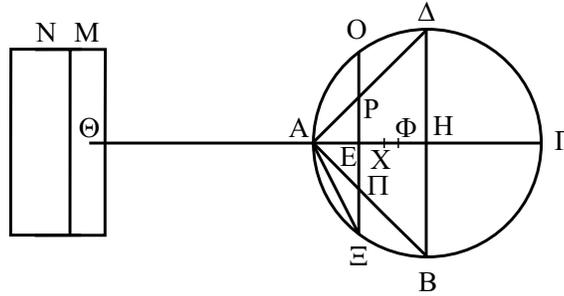


Figura A.6: Construção geométrica do teorema VI de acordo com Mugler.

Usando a notação simplificada podemos escrever:

$$\frac{A\Gamma}{AE} = \frac{(A\Gamma)(AE)}{(AE)(AE)} = \frac{R(A\Gamma, AE)}{Q(AE)} . \quad (\text{A.68})$$

No Apêndice C demonstramos que:

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2} .$$

$$R(A\Gamma, AE) = Q(A\Xi) . \quad (\text{A.69})$$

A partir destas duas Equações vem que:

$$\frac{A\Gamma}{AE} = \frac{R(A\Gamma, AE)}{Q(AE)} = \frac{Q(A\Xi)}{Q(AE)} . \quad (\text{A.70})$$

Pelo teorema de Pitágoras em $A\Xi\Xi$ vem:

$$Q(A\Xi) = Q(AE) + Q(E\Xi) . \quad (\text{A.71})$$

Sendo

$$AE = E\Pi , \quad (\text{A.72})$$

vem:

$$\frac{A\Gamma}{AE} = \frac{Q(\Xi E) + Q(E\Pi)}{Q(E\Pi)} . \quad (\text{A.73})$$

Esta Equação, análoga à Eq. (9.54), é a base matemática necessária para a demonstração deste Teorema.

A.7 Teorema IX

Apresentamos aqui a demonstração matemática da Equação (9.98). Os objetos representados neste Teorema aparecem na Figura A.7.

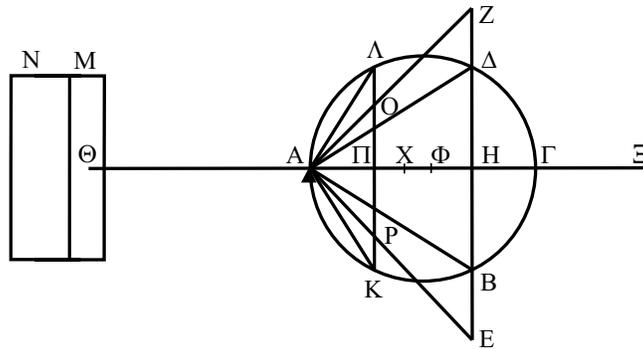


Figura A.7: Representação em corte do segmento esférico, dos cones e cilindros.

Sendo os triângulos $AK\Gamma$ e $AK\Pi$ semelhantes⁸ temos:

$$\frac{A\Gamma}{AK} = \frac{AK}{A\Pi} . \quad (\text{A.74})$$

⁸Ou simplesmente aplicando ao triângulo $AK\Gamma$ o Corolário de *Os Elementos* de Euclides, Livro VI, Proposição 8, citado na Subseção 8.3.1, página 41 desta tese, ver ainda [23, Vol. 2, pág. 210] e [24, pág. 241].

A partir deste resultado vem que:

$$A\Gamma = \frac{Q(AK)}{A\Pi} . \quad (\text{A.75})$$

Esta Equação também pode ser colocada na seguinte forma:

$$Q(A\Gamma) = \frac{Q(AK)Q(AK)}{Q(A\Pi)} . \quad (\text{A.76})$$

A Definição 9 do Livro V de *Os Elementos* de Euclides afirma que:⁹

Quando três magnitudes estejam em proporção, a primeira é dita ter para a terceira uma razão dupla da [razão] que [a primeira tem] para a segunda.

De acordo com a Equação (7.13) da teoria das proporções, temos que se

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} , \quad (\text{A.77})$$

então:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} . \quad (\text{A.78})$$

Aplicando este resultado na Equação (A.74) resulta em:

$$\frac{A\Gamma}{A\Pi} = \frac{Q(A\Gamma)}{Q(AK)} . \quad (\text{A.79})$$

Substituindo $Q(A\Gamma)$ pelo seu valor obtido na Equação (A.76), obtemos:

$$\frac{A\Gamma}{A\Pi} = \frac{Q(AK)Q(AK)}{Q(A\Pi)Q(AK)} . \quad (\text{A.80})$$

Ou então:

$$\frac{A\Gamma}{A\Pi} = \frac{Q(AK)}{Q(A\Pi)} . \quad (\text{A.81})$$

Arquimedes usa então a Equação (A.81) como ponto de partida para a demonstração do teorema. Continua também aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $AK\Pi$:

$$Q(AK) = Q(A\Pi) + Q(K\Pi) . \quad (\text{A.82})$$

Mas:

$$Q(A\Pi) = Q(\Pi O) , \quad (\text{A.83})$$

pois o triângulo $A\Pi O$ é isósceles por construção (semelhante a AHZ). Então:

$$\frac{A\Gamma}{A\Pi} = \frac{Q(K\Pi) + Q(\Pi O)}{Q(\Pi O)} . \quad (\text{A.84})$$

Esta relação, análoga à Equação (9.98), é a base matemática necessária para a demonstração física deste Teorema.

⁹[24, pág. 206].

Apêndice B

A Parábola

B.1 A Parábola em Coordenadas Cartesianas

Seja dado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) com centro $O = (0, 0)$. A parábola é definida pelo conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano equidistantes de uma reta r , chamada de *diretriz*, e de um ponto F não pertencente a r , ponto este chamado de *foco* da parábola, Figura B.1.

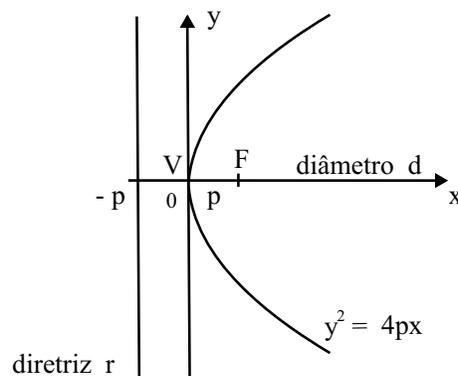


Figura B.1: A parábola $y^2 = 4px$.

A Equação de uma parábola com foco $F = (p, 0)$ e reta diretriz r localizada em $x = -p$, Figura B.1, é dada por:¹

$$y^2 = 4px . \tag{B.1}$$

A Equação de uma parábola com foco $F = (0, p)$ e reta diretriz r localizada em $y = -p$, é dada por:

$$x^2 = 4py . \tag{B.2}$$

Ela está representada na Figura B.2.

¹Ver [40, Capítulo 5].

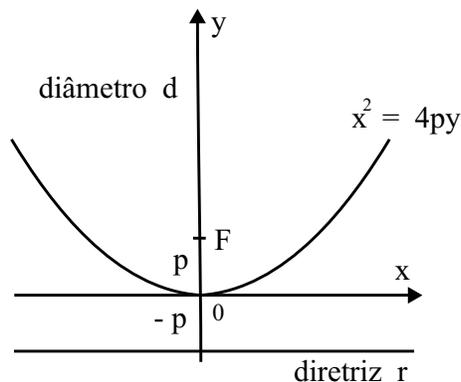


Figura B.2: A parábola $x^2 = 4py$.

B.2 A Subtangente — Considerações de Arquimedes

No primeiro teorema de *O Método*, Arquimedes considera os segmentos de reta ΔB e BE , Figuras 8.3, 10.1 e B.3.

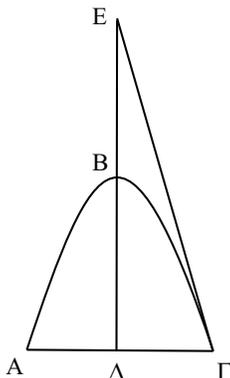


Figura B.3: Parábola $AB\Gamma$ com tangente EF .

Ele afirma que estes dois segmentos são iguais, sem demonstrar isto, informando que a demonstração encontra-se nos *Elementos*. O livro *Elementos* a que Arquimedes se refere aqui não é a obra de geometria de Euclides, já que esta não trata das cônicas. Provavelmente estes *Elementos* se referem a uma obra anterior de Arquimedes, atualmente perdida, que tratava das propriedades básicas ou elementares das seções cônicas.² Além disso, e de maneira mais marcante, ele considera em sua obra *Quadratura da Parábola* essa Proposição como um Lema ou como um Teorema que já foi demonstrado em outra obra.³ Vamos considerar a Figura B.3.

A segunda Proposição da obra *Quadratura da Parábola* de Arquimedes afirma o seguinte:⁴

Se tivermos uma parábola $AB\Gamma$, uma reta $B\Delta$ paralela ao diâmetro ou sendo ela mesma o diâmetro, uma reta $A\Delta\Gamma$ paralela à tangente à cônica no ponto B [vértice da parábola], e uma reta EF tangente à cônica no ponto Γ , [então] $B\Delta$ e BE serão iguais.

Na Seção B.3 apresentamos uma dedução moderna deste Lema.

²[6, págs. 38 e 91, Nota 5].

³[15, pág. 235] e [18, págs. 166-167].

⁴[18, págs. 166-167].

B.3 A Subtangente — Uma Dedução Moderna

Utilizando uma notação algébrica moderna, achamos interessante apresentar aqui uma demonstração do Lema mencionado na Seção B.2. Esta demonstração moderna é atribuída ao matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665).⁵

A Equação da parábola, Equação (B.1), pode ser escrita como:

$$x = \frac{y^2}{4p} . \quad (\text{B.3})$$

A partir da Figura B.4 podemos escrever $(x_1, y_1) = (B\Delta, \Delta\Gamma)$ e $(x_2, y_2) = (B\Phi, \Phi\Omega)$.

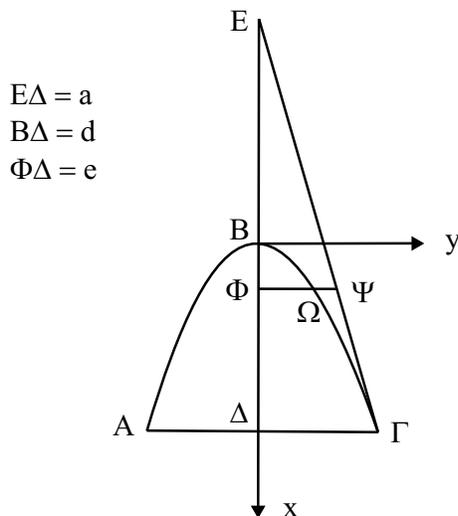


Figura B.4: Sistema de eixos (x, y) centrado no vértice B da parábola ABΓ.

Usando estas substituições na Equação (B.3) obtemos:

$$\frac{B\Delta}{B\Phi} = \frac{\Delta\Gamma^2}{\Phi\Omega^2} . \quad (\text{B.4})$$

Sendo o ponto Ψ externo à parábola, temos que:

$$\Phi\Omega < \Phi\Psi . \quad (\text{B.5})$$

Portanto, das Equações (B.4) e (B.5) obtemos a seguinte desigualdade:

$$\frac{B\Delta}{B\Phi} > \frac{\Delta\Gamma^2}{\Phi\Psi^2} . \quad (\text{B.6})$$

Pela semelhança dos triângulos EΔΓ e EΦΨ temos:

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Phi\Psi} = \frac{\Delta E}{\Phi E} . \quad (\text{B.7})$$

Das Equações (B.6) e (B.7) obtém-se então:

$$\frac{B\Delta}{B\Phi} > \frac{\Delta E^2}{\Phi E^2} . \quad (\text{B.8})$$

⁵[48, pág. 63].

Chamamos agora $\Delta E = a$, $\Delta \Phi = e$, $\Delta B = d$. Sendo d conhecido pois é definido pelo ponto de tangência Γ , a desigualdade (B.8) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2} . \quad (\text{B.9})$$

A partir desta Equação obtemos:

$$da^2 - 2aed + de^2 > da^2 - ea^2 . \quad (\text{B.10})$$

Eliminando os termos comuns e dividindo por e , temos:

$$-2ad + de > -a^2 , \quad (\text{B.11})$$

ou

$$de + a^2 > 2ad . \quad (\text{B.12})$$

Fazendo o ponto Φ tender a Δ , temos que $e = \Delta \Phi$ tende a zero, enquanto que a desigualdade (B.12) se torna igualdade, pois o segmento externo à parábola $\Omega\Psi$ também tende a zero. Podemos então escrever que neste limite:

$$a = 2d . \quad (\text{B.13})$$

Ou seja, *a subtangente é dividida em duas partes iguais pelo vértice*, que era o que queríamos demonstrar. Concluimos então com Arquimedes que:

$$\Delta E = 2\Delta B . \quad (\text{B.14})$$

Apêndice C

Uma Propriedade do Triângulo Retângulo

Na demonstração do segundo teorema de *O Método*, Arquimedes simplesmente informa¹ a partir da Figura 10.2, equivalente à Figura 9.8, que o retângulo de lados $(\Gamma A, A\Sigma)$ é equivalente ao quadrado de lado $(A\varepsilon)$, sem nenhum comentário adicional.

Por ser usada repetidamente no texto de *O Método*, apresentamos aqui uma dedução que pode ser obtida a partir da obra *Os Elementos* de Euclides. Na Proposição VIII do Livro VI de Euclides demonstra-se que:²

Se, em um triângulo retângulo, a partir do ângulo reto é traçada uma reta perpendicular à base, então os triângulos em torno da perpendicular são semelhantes entre si e ao triângulo maior.

Reproduzimos na Figura C.1 a parte que nos interessa da Figura 10.2 do segundo teorema de *O Método*.

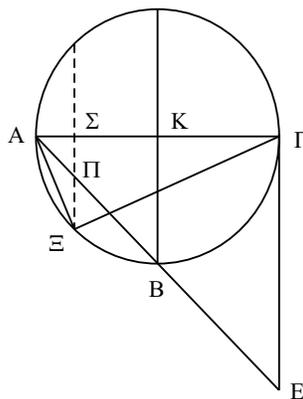


Figura C.1: Triângulo retângulo $A\varepsilon\Gamma$ inscrito no círculo $AB\Gamma$.

O círculo $AB\Gamma$ tem centro K . O triângulo $A\varepsilon\Gamma$ é retângulo e os segmentos KB e $\Sigma\varepsilon$ são ortogonais ao diâmetro $AK\Gamma$.

A partir desta Figura C.1 e da Proposição VIII do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides,³ concluímos que os triângulos $A\varepsilon\Gamma$ e $A\varepsilon\Sigma$ são semelhantes. Portanto:

¹Ver a pág. 111 desta tese.

²[24, pág. 240].

³Citada na Subseção 8.3.1.

$$\frac{A\Gamma}{A\Xi} = \frac{A\Xi}{A\Sigma} . \tag{C.1}$$

Ou seja:

$$(A\Gamma) \cdot (A\Sigma) = (A\Xi)^2 , \tag{C.2}$$

que é onde Arquimedes queria chegar.

Apêndice D

As Figuras de *O Método*

D.1 Letras Maiúsculas e Minúsculas

Os tradutores e copiadorees das obras de Arquimedes adotaram maneiras diferentes para identificar os vários pontos das figuras. O *Códice C* tal como chegou até nossos dias, indica claramente os pontos com as letras gregas minúsculas ($\alpha\beta\gamma\dots$). Nas traduções modernas foram adotadas convenções diferentes. As letras gregas maiúsculas (ΑΒΓ...) foram utilizadas por Mugler.¹ As letras latinas (ABC...) foram utilizadas por Heath, Rufini e Babini.² As mesmas letras gregas minúsculas ($\alpha\beta\gamma\dots$) do *Códice C* foram utilizadas por Heiberg e Dijksterhuis.³

Neste trabalho optamos por usar as letras gregas maiúsculas, da mesma forma que Mugler, por três motivos:

1. As letras maiúsculas correspondem à maneira como realmente escreviam os gregos no tempo de Arquimedes. Foi apenas no início da idade média que se introduziram as letras minúsculas.
2. O texto usado para a tradução utiliza letras maiúsculas para identificar os pontos. Portanto, fica mais fácil e imediato identificar estes pontos utilizando também letras maiúsculas nas figuras.
3. As letras maiúsculas aparecem de forma mais clara nas figuras do que as minúsculas.

D.2 As Figuras de Arquimedes

Durante a realização deste trabalho foi possível verificar como são na realidade algumas figuras constantes do palimpsesto original.⁴ Além disso, foi possível observar a complexidade do trabalho de conservação, digitalização e disponibilização do palimpsesto que está sendo executado pela equipe do museu Walters, de Baltimore.

¹[8].

²[12], [5] e [6].

³[37] e [11].

⁴O trabalho de recuperação do texto e das imagens do palimpsesto pode ser acompanhado em www.archimedespalimpsest.org

Neste contexto são de fundamental importância no que diz respeito às figuras encontradas os comentários esclarecedores elaborados por Reviel Netz e William Noel em seu livro *Códex Arquimedes*.⁵

De acordo com Netz e Noel, com base nas imagens do palimpsesto bem como em outras figuras dos matemáticos gregos, as figuras encontradas no palimpsesto não constituem uma representação fiel do objeto real. Existe um motivo por detrás desta atitude. O objetivo mais provável é o de evitar que a perfeição de uma figura possa induzir a erros baseados na evidência visual. A conclusão destes autores é a de que os diagramas *não são pictóricos*. Ou seja, em vez de um retrato, o diagrama antigo era uma *representação esquemática*.

Para exemplificar este ponto de vista, os autores apresentam uma comparação da figura do Teorema I tal como aparece no palimpsesto, com a figura do mesmo teorema como aparece nas apresentações modernas. Na Figura D.1 temos a figura original do palimpsesto.⁶

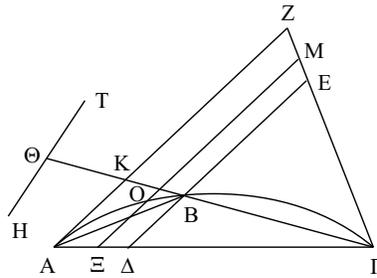


Figura D.1: Figura original do Teorema I no palimpsesto.

Já na Figura D.2 temos as representações deste teorema como apresentadas na traduções modernas.⁷

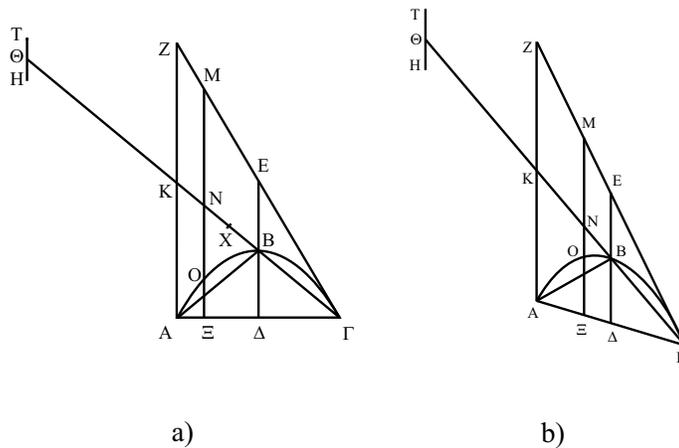


Figura D.2: a) Figura do Teorema I apresentada por Mugler e Rufini. b) Figura do Teorema I de acordo com Dijksterhuis e Heath.

Ao comparar as duas figuras fica evidente que as apresentações modernas da Figura D.2 são *corretas*. Isto é, elas representam muito bem a realidade dos objetos descritos por Arquimedes e daquilo que ele quis demonstrar. Em particular, as linhas TH e ZA são paralelas, o ponto

⁵[1, págs. 107-113] e [22, págs. 146-151].

⁶[1, págs. 107-113] e [22, págs. 146-151].

⁷[19, pág. 86], [21, pág. 108], [11, pág. 317] e [12, pág. 16].

K está no meio da linha ZA, e assim por diante. Todos estes aspectos são mencionados por Arquimedes na descrição da figura no texto. Já na representação original desta imagem como aparece no palimpsesto, Figura D.1, as proporções e os paralelismos não são sempre respeitadas. Logo a figura do palimpsesto, que corresponde com maior probabilidade ao desenho original de Arquimedes, fornece apenas uma ideia do objeto, mas não é uma representação fiel.

D.3 Comentários sobre as Figuras dos Teoremas VI e IX

Na tradução de *O Método* bem como na elaboração dos comentários usamos como base a obra de Charles Mugler.⁸

No que diz respeito às figuras, existem discrepâncias entre as Figuras dos Teoremas VI e IX de *O Método* nas várias traduções existentes do texto grego. As que utilizamos são as Figuras 10.6 e 10.8, ver as páginas 120 e 126 desta tese. Embora estas figuras sejam diferentes entre si, o ponto que queremos discutir aqui é comum às duas figuras. Vamos então concentrar nossos comentários sobre a figura do Teorema VI, sendo que os mesmos comentários aplicam-se à figura do Teorema IX.

É interessante mostrar aqui as diferenças encontradas para a mesma figura nas diferentes traduções e explicar porque, nos comentários que apresentamos na Seção 9.7, resolvemos adotar uma outra apresentação gráfica.

Na representação adotada por Mugler,⁹ Figura D.3, MN indica um cilindro constituído pelos dois cilindros M e N. A mesma representação aparece em Heiberg, Heath, Rufini e Babini.¹⁰

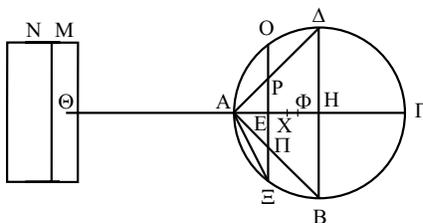


Figura D.3: A figura do Teorema VI na tradução de C. Mugler.

Estes cilindros podem ser separados e, de acordo com a descrição feita por Arquimedes no texto original, cada um dos cilindros M e N separadamente deveria ter o seu centro de gravidade em Θ . Contudo, pelas figuras mostradas nas traduções para o alemão, inglês (por Heath), italiano e espanhol, fica claro que o cilindro N não tem o seu centro de gravidade em Θ . Isto é contrário ao texto de Arquimedes.

Já na apresentação do mesmo teorema feita por Dijksterhuis encontramos a Figura D.4.¹¹

Fica evidente nesta figura o esforço do tradutor para apresentar corretamente o que está descrito no texto, já que os dois cilindros M e N possuem seus centros de gravidade no ponto Θ . Apesar disto, esbarra-se então na impossibilidade física de termos dois cilindros sólidos homogêneos ocupando o mesmo espaço.

⁸[17], [18], [19] e [20].

⁹[19, pág. 102].

¹⁰[37, pág. 395], [12, pág. 28], [5, pág. 131] e [6, pág. 57].

¹¹[11, pág. 327].

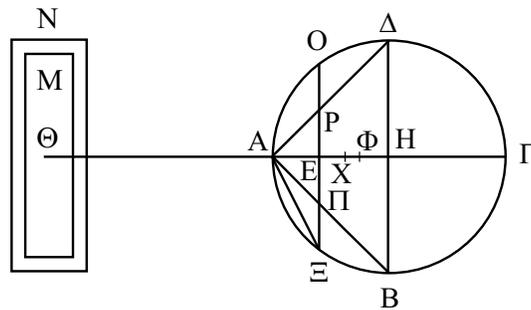


Figura D.4: A figura do Teorema VI na apresentação de E. J. Dijksterhuis.

Nos nossos comentários sobre este Teorema achamos conveniente usar uma outra apresentação gráfica que pudesse simultaneamente respeitar o texto de Arquimedes e mostrar uma imagem que seja fisicamente viável, Figura 9.31, reproduzida aqui na Figura D.5.

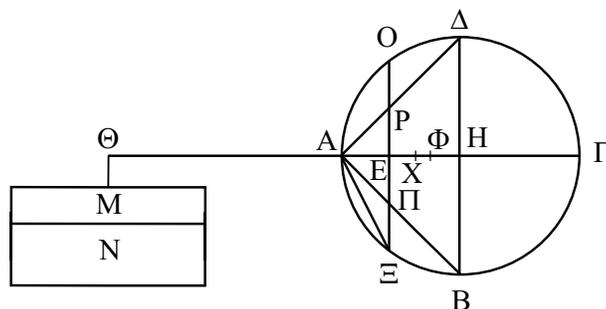


Figura D.5: A figura do Teorema VI apresentada em nosso trabalho.

Para isto aproveitamos a lei da alavanca, extensivamente usada nesse texto, e o sexto Postulado de *Sobre o Equilíbrio dos Planos*.¹² Com efeito, considerando que os cilindros estão em equilíbrio com outros sólidos (o que é demonstrado no texto) então, de acordo com o princípio acima citado, o equilíbrio é mantido mesmo que os corpos sejam suspensos por uma linha vertical passando pelo seus centros de gravidade.¹³ Com a nossa Figura evitamos de sobrepor dois sólidos homogêneos na mesma região do espaço, como ocorreu com a representação de Dijksterhuis. Além disso, mantivemos os centros de gravidade dos cilindros M e N ao longo de uma mesma vertical passando por Θ , evitando as representações de Heiberg, Mugler, Heath e Rufini que não são fieis ao texto de Arquimedes.

O mesmo vale para a representação da Figura do Teorema IX que apresentamos na Seção 9.9.

¹²Ver a discussão deste Postulado na Subseção 6.1.3, página 26 desta tese.

¹³Uma ampla discussão sobre este postulado pode ser encontrada em *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*, [30, pág. 223].

Apêndice E

O Centro de Gravidade de um Semicírculo

O Teorema XIII pode ser usado para encontrar o centro de gravidade de um semicírculo.¹ Apresentamos a seguir a essência deste cálculo.

Pelas deduções físicas e matemáticas deste teorema, Arquimedes provou que um prisma de base triangular e um semicilindro construídos de acordo com as definições estabelecidas no enunciado do teorema e uniformemente distribuídos ao longo do travessão da alavanca, ficam em equilíbrio. Isto está ilustrado na Figura 9.55, reproduzida abaixo na Figura E.1.

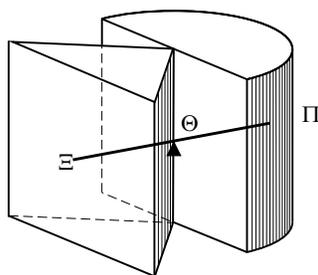


Figura E.1: Prisma de base triangular e semicilindro em equilíbrio na alavanca, de acordo com o Teorema XIII.

Consideramos agora a interseção definida nos dois sólidos por um plano passando pelo travessão da alavanca e paralelo às suas bases. Esta interseção gera um triângulo no prisma e um semicírculo no semicilindro.

Atribuindo-se às duas figuras planas pesos uniformemente distribuídos, elas estarão em equilíbrio apoiadas uniformemente sobre o travessão da alavanca, como mostrado na Figura E.2.

Nesta figura está indicado também o ponto Ψ , centro de gravidade do triângulo, cuja posição é conhecida pelo Lema 5 de *O Método*.² No caso da Figura E.2 temos que

$$\frac{\Xi\Psi}{\Xi\Theta} = \frac{1}{3}. \quad (\text{E.1})$$

Resta agora determinar a posição do centro de gravidade X do semicírculo, que por simetria estará sobre o braço $\Theta\Pi$ do travessão da alavanca.

¹[12, págs. 38-40].

²Citado na Seção 9.2, na página 49 desta tese.

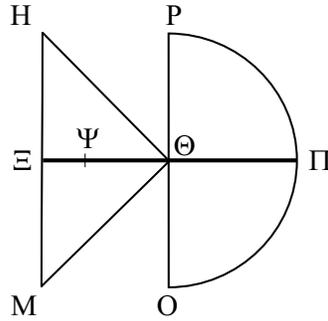


Figura E.2: Triângulo e semicírculo em equilíbrio na alavanca.

Pelo sexto postulado de *Sobre o Equilíbrio dos Planos*³ sabemos que a alavanca continuará em equilíbrio se as figuras estiverem apoiadas unicamente pelos seus centros de gravidade, como mostrado pela Figura E.3.

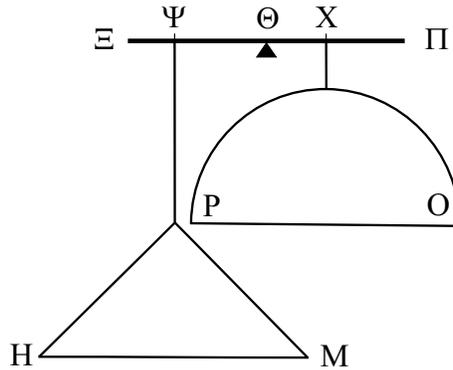


Figura E.3: Triângulo e semicírculo em equilíbrio apoiados nos respectivos centros de gravidade.

Por meio desta última alavanca em equilíbrio, conhecendo a posição Ψ do centro de gravidade do triângulo, podemos determinar o centro de gravidade X do semicírculo.

Vamos usar a notação moderna e chamar de r ao raio do semicírculo. Logo o semicírculo e o triângulo terão a mesma base $2r$. Já a altura do triângulo será igual ao raio do semicírculo, r .

A distância $\Theta\Psi$ do centro de gravidade Ψ do triângulo ao fulcro Θ será $(2/3)r$ de acordo com a Equação (E.1).

A área A_t do triângulo é dada por:

$$A_t = \frac{(2r)(r)}{2} = r^2 . \quad (\text{E.2})$$

E a área A_s do semicírculo é dada por:

$$A_s = \frac{\pi r^2}{2} . \quad (\text{E.3})$$

Vamos chamar de x à distância entre o fulcro Θ e o centro de gravidade X do semicírculo, a ser determinada. De acordo com a lei da alavanca temos então que:

³Citado na Subseção 6.1.3, página 26 desta tese.

$$\frac{A_t}{A_s} = \frac{x}{(2/3)r} = \frac{r^2}{(1/2)\pi r^2} . \quad (\text{E.4})$$

Portanto:

$$x = \frac{4r}{3\pi} . \quad (\text{E.5})$$

Isto completa o cálculo do centro de gravidade do semicírculo.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Netz and W. Noel. *Códex Arquimedes*. Record, Rio de Janeiro, 2009. Tradução de R. Schwartz, revisão técnica de D. V. Bevilacqua.
- [2] J. L. Heiberg. Eine neue Archimedeshandschrift. *Hermes*, 42:234–303, 1907.
- [3] J. L. Heiberg and H. G. Zeuthen. Eine neue Schrift des Archimedes. *Bibliotheca Mathematica*, 7:321–363, 1907. Reimpresso em *Archimedes Werke*, A. Czwalina (editor), (Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1963), págs. 379-423.
- [4] A. Hirshfeld. *Eureka Man: The Life and Legacy of Archimedes*. Walker & Company, New York, 2009.
- [5] Archimede. Metodo sui teoremi meccanici: Archimede ad Eratostene. In E. Rufini, editor, *Il “Metodo” di Archimede e le Origini del Calcolo Infinitesimale nell’Antichità*, pages 101–179. Feltrinelli, Milano, 1961. Traduzido por E. Rufini.
- [6] Arquimedes. *El “Método”*. Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 1966. Introdução e notas de J. Babini.
- [7] Arquímedes. *El Método*. Alianza Editorial, Madrid, 1986. Tradução de M. L. Puertas e L. Vega. Introdução e Notas de L. Vega.
- [8] Archimède. La Méthode. In C. Mugler, editor, *Archimède*, volume III, pages 78–127. Société d’Édition “Les Belles Lettres”, Paris, 1971. Traduzido por C. Mugler.
- [9] D. E. Smith. A newly discovered treatise of Archimedes. *The Monist*, 19:202–230, 1909.
- [10] Archimedes. *Geometrical Solutions Derived from Mechanics*. Open Court, Chicago, 1909. Traduzido do grego para o alemão por J. L. Heiberg, versão em inglês a partir da tradução em alemão por L. G. Robinson. Introdução de D. E. Smith.
- [11] Archimedes. The Method of Mechanical Theorems. In E. J. Dijksterhuis, editor, *Archimedes*. Princeton University Press, Princeton, 1987. Capítulo X, páginas 313-345. Traduzido por C. Dikshoorn.
- [12] Archimedes. The Method of Archimedes. In T. L. Heath, editor, *The Works of Archimedes*, pages 1–51 (Supplement). Dover, New York, 2002. Traduzido por T. L. Heath.
- [13] Arquimedes, O método por Arquimedes relativo às investigações mecânicas à Eratóstenes. Tradução de I. F. Balieiro Filho, em: *Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya—Quatro Episódios da História da Heurística*, Anexo. Tese de doutorado, Unesp, Rio Claro, 2004.

- [14] E. J. Dijksterhuis. *Archimedes*. Princeton University Press, Princeton, 1987. Traduzido por C. Dikshoorn.
- [15] Archimedes. *The Works of Archimedes*. Dover, New York, 2002. Traduzido e editado em notação moderna por T. L. Heath.
- [16] T. L. Heath. *A History of Greek Mathematics*, volume II. Clarendon Press, Oxford, 1921.
- [17] C. Mugler. *Archimède*, volume 1. Société d'Édition "Les Belles Lettres", Paris, 1970.
- [18] C. Mugler. *Archimède*, volume 2. Société d'Édition "Les Belles Lettres", Paris, 1971.
- [19] C. Mugler. *Archimède*, volume 3. Société d'Édition "Les Belles Lettres", Paris, 1971.
- [20] C. Mugler. *Archimède*, volume 4. Société d'Édition "Les Belles Lettres", Paris, 1972.
- [21] E. Rufini. *Il "Metodo" di Archimede e le Origini del Calcolo Infinitesimale nell'Antichità*. Feltrinelli, Milano, 1961.
- [22] R. Netz and W. Noel. *Il Codice Perduto di Archimede*. Rizzoli, Milano, 2007. Tradução italiana de C. Capararo.
- [23] Euclid. *The Thirteen Books of the Elements*. Dover, New York, 1956. Três volumes. Traduzido com introdução e comentários por T. L. Heath.
- [24] Euclides. *Elementos*. UNESP, São Paulo, 2009. Traduzido por I. Bicudo.
- [25] Plutarco. *La Vita di Marcello*. Felice Valgrisio, Venezia, 1587. Tradução italiana de Ludovico Domenichi.
- [26] Tito Livio. *Ab Urbe Condita*. Disponível em: <http://www.thelatinlibrary.com>.
- [27] Vitruvio. *De Architectura*. Disponível em: <http://www.thelatinlibrary.com>.
- [28] Cicero. *De Re Publica*. Disponível em: <http://www.thelatinlibrary.com>.
- [29] Luciano de Samosata. *Opere (Ippia)*. Felice Le Monnier, Firenze, 1862.
- [30] A. K. T. Assis. *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*. Apeiron, Montreal, 2008. ISBN: 9780973291179. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [31] W. R. Knorr. Archimedes and the elements: proposal for a revised chronological ordering of the Archimedean corpus. *Archive for the History of Exact Sciences*, 19:211–290, 1978-79.
- [32] A. K. T. Assis. Sobre o equilíbrio dos planos - tradução comentada de um texto de Arquimedes. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 18:81–94, 1997.
- [33] Arquimedes, Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas. Em A. K. T. Assis, *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca* (Apeiron, Montreal, 2008), págs. 222-240. Tradução de A. K. T. Assis. ISBN: 9780973291179. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [34] Arquimedes. Sobre o equilíbrio dos planos (segunda parte). *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 2:146–157, 2004. Introdução e tradução de A. K. T. Assis e N. B. F. Campos.

- [35] A. K. T. Assis. Sobre os corpos flutuantes - tradução comentada de um texto de Arquimedes. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 16:69–80, 1996.
- [36] J. L. Heiberg. *Archimedis Opera*. Teubner, Leipzig, 1880-81. Primeira edição. 3 volumes.
- [37] Archimedes. Der Archimedes Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen. In A. Czwalina, editor, *Archimedes Werke*, pages 379–423. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1963. Traduzido por J. L. Heiberg e comentado por H. G. Zeuthen.
- [38] J. L. Heiberg. *Archimedis Opera*. Teubner, Leipzig, 1910-15. Segunda edição. 3 volumes. Reimpresso em 1972. Stuttgart.
- [39] Apollonius. *Treatise on Conic Sections*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. Traduzido e editado em notação moderna por T. L. Heath. Reimpressão da edição de 1896.
- [40] R. J. Santos. *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2002.
- [41] V. L. V. Seco. Estudos sobre “O Método” de Arquimedes através da Construção de Balanças e Alavancas. Instituto de Física, Universidade Estadual de Campinas—UNICAMP, Relatório Final de F590 - Iniciação Científica I, primeiro semestre de 2010. Orientador: A. K. T. Assis. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/~assis, 2010.
- [42] Cicero. *Tusculanae Disputationes*. Disponível em: <http://www.thelatinlibrary.com>.
- [43] W. Knorr. Archimedes’ lost treatise on the centers of gravity of solids. *Mathematical Intelligencer*, 1:102–109, 1978-79.
- [44] A. K. T. Assis. *Archimedes, the Center of Gravity, and the First Law of Mechanics: The Law of the Lever*. Apeiron, Montreal, 2010. Segunda edição. ISBN: 9780986492648. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [45] E. Hayashi. A reconstruction of the proof of proposition 11 in Archimedes’s Method: proofs about the volume and the center of gravity of any segment of an obtuse-angled conoid. *Historia Scientiarum*, 3-3:215–230, 1994.
- [46] R. Netz, K. Saito, and N. Tchernetska. A new reading of Method proposition 14: preliminary evidence from the Archimedes palimpsest (part 1). *SCIAMVS*, 2:9–29, 2001.
- [47] R. Netz, K. Saito, and N. Tchernetska. A new reading of Method proposition 14: preliminary evidence from the Archimedes palimpsest (part 2). *SCIAMVS*, 3:109–125, 2002.
- [48] N. A. Malara. *Educazione Matematica e Sviluppo Sociale*. Rubettino Editore, S. R. L., Catanzaro, 2002.