OBSERVAÇÃO.

Como deve ser extendida a definição de produto para grupos contínuos?

A noção de continuidade deve ser convenientemente generalizada, no sentido que uma mudança pequena em um dos fatores de um produto produza uma mudança também pequena no produto. Esta noção de continuidade é formulada no espaço dos parâmetro (chamada de variedade do grupo) que servem para definir os elementos do grupo (no caso de rotações tridimensionais o grupo é triparamétrico pois precisamos de 3 parâmetros reais para distinguir as rotações. Estes parâmetro podem ser os 3 ângulos de Euler ou os parâmetros de Cayley-Klein)

Em geral consideramos um grupo contínuo r-paramétrico. Escrevemos os seus elementos como

$$R(a_1, a_2, \ldots, a_r) \equiv R(a)$$

O domínio de variação dos parâmetros em geral pode ser qualquer um, enquanto eles variem continuamente. Se o domínio de variação dos parâmetros é finito se fala que a variedade do grupo é fechada.

A continuidade se exprime em termos de distâncias no espaço dos parâmetros. Isto é dois elementos do grupo $R(a)$ e $R(b)$ estão "perto um do outro" se a distância

$$\delta(a,b) \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{r} (a_i - b_i)^2 \right\}^{1/2}$$

é pequena (isso supondo que o espaço dos parâmetro pode ser premunido de uma métrica euclidiana).

As condições para ter um grupo são as mesmas que para grupos finitos, mas devem ser traduzidas na nova linguagem:

I <u>Elemento identidade</u>:

Deve existir um conjunto de valores dos parâmetros $\{a^o\}$ tais que

$$R(a^o)R(a) = R(a)R(a^o) = R(a) \quad \text{, para todos os } \{a\}$$

Escrevemos simplesmente $R(a^o) \equiv E$ (IDENTIDADE)

$$\{a^o\} = \{a_1^o, a_2^o, \ldots, a_r^o\}$$

e costuma-se escrever (por conveniência) $a^o \equiv 0$. É dizer

$$E \equiv R(0)$$

II <u>Elemento inverso</u>:

Para cada conjunto de valores $\{a\}$ sempre podemos achar outro conjunto $\{\bar{a}\}$ tal que

$$R(a)R(\bar{a}) = R(\bar{a})R(a) = R(0) = E$$

O elemento $R(\bar{a})$ é chamado de elemento INVERSO

$$R(\bar{a}) = [R(a)]^{-1}$$

III <u>Produto de dois elementos</u>.

O produto de dois elementos também deve pertencer ao conjunto. Isto é dado os conjuntos de valores $\{a\}$ e $\{b\}$ dos parâmetros, sempre deve existir um outro conjunto $\{c\}$ tal que

$$R(a)\cdot R(b) = R(c)$$

onde os parâmetros $\{c\}$ são funções reais dos parâmetros $\{a\}$ e $\{b\}$ :

$$c_k \equiv \phi_k(a_1, a_2, \ldots, a_r; b_1, b_2, \ldots, b_r),$$
$$k = 1, 2, \ldots, r,$$

ou simbólicamente

$$c \equiv \phi(a, b)$$

Def. GRUPO de LiE $r$-paramétrico

Temos um grupo (contínuo) de LiE $r$-paramétrico se as funções $\phi_k$ são analíticas $(k = 1, 2, \ldots, r)$, isto é existem as suas derivadas a toda ordem

Def. GRUPO de LiE $r$-paramétrico de TRANSFORMAÇÕES. É um grupo de transformações num espaco de dim $n$ que dependem em $r$ parámetros

$$x'_\nu \equiv f_\nu(x_1, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r)$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, n;$$

simbólicamente

$$x' = f(x; a),$$

onde as funções $f_\nu$ são funções analíticas dos parámetros $\{a\}$

Todas as condições (requisitos) para ter um grupo devem ser satisfeitas. Em particular podemos achar um conjunto de parámetros $\{\bar{a}\}$ tal que

$$x'' = f(x'; \bar{a}) = f\left[f(x, a); \bar{a}\right] \equiv x.$$

Em outras palavras a transformação $x' = f(x; a)$ deve ser invertível. Esta condição se escreve em termos do Jacobiano da transformação

$$J \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \,.$$

Se realizamos duas transformações sucessivas

$$x'_\nu = f_\nu(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r)$$
$$x''_\nu = f_\nu(x'_1, \ldots, x'_n; b_1, \ldots, b_r)$$

deve existir uma transformação resultante que ligue diretamente $x_\nu \rightarrow x''_\nu$

$$\begin{tikzcd} x_\nu \arrow[r, "f(x;a)"] \arrow[rr, bend right, "f(x;c)"'] & x'_\nu \arrow[r, "f(x';b)"] & x''_\nu \end{tikzcd}$$

$$x''_\nu = f_\nu(x_1, \ldots, x_n; c_1, c_2, \ldots, c_r) \,,$$

onde os parâmetros $c_k$ são funções <u>analíticas</u> dos parâmetros $\{a\}$ e $\{b\}$

$$c_k = \phi_k(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_r) \,.$$

Existe também um conjunto de parâmetros $\{a^\circ\}$ tal que

$$x' = f(x; a^\circ) = x$$

Os requisitos de grupo implicam em severas restrições nas possíveis funções $f_\nu$. Por exemplo temos

$$x''_\nu = f_\nu(x'; b) = f_\nu(f_1(x;a), \ldots, f_n(x;a); b)$$
$$= f_\nu(x_1 \ldots, x_n; c) = f_\nu(x_1 \ldots x_n; \phi(a,b))$$

ou

$$f(f(x,a); b) = f(x; \phi(a,b)) \,.$$

## § Grupos contínuos [redacted]

As relações

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n; a_1 \dots a_r), \quad i = 1,2,\dots,n$$

podem ser derivadas em relação às variáveis $(x_1 \dots x_n)$, e em seguida eliminar os parâmetros $(a_1 \dots a_r)$. Obtemos como resultado um conjunto de equações diferenciais que não dependem de nenhum parâmetro. Estas, quando integradas dependerão de $r$ constantes de integração, voltando para a expressão original.

Ex. Grupo contínuo linear

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \quad , \quad i = 1,2\dots,n$$

Como as transformações acima são lineares, todas as derivadas segundas são nulas:

$$\frac{\partial^2 x_i'}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad , \quad i,j,k = 1,\dots,n$$

Estas equações diferenciais não contém nenhum parâmetro. A integração sim depende de $(n^2+n) = n(n+1)$ constantes que definem o grupo linear geral.

Se a integração deste conjunto de eq. diferenciais parciais (não contendo nenhum elemento arbitrário) depende de um número finito de parâmetros e formam um grupo, dizemos que o grupo contínuo é finito. Em caso contrário, obtemos um grupo contínuo infinito.

Ex: Seja o caso em que as equações diferenciais são:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_k} = 0, \quad k \neq i, \quad k = 1, 2 \ldots n.$$

As soluções são

$$x_i' = F_i(x_i) \quad , \; i = 1, 2 \ldots n$$

e claramente formam um grupo. De fato:

$$x_i'' = F_i(x_i') = F_i\big(F_i(x_i)\big) = G_i(x_i) \, ,$$

onde as funções $F_i$ são arbitrárias. Dados estes graus de liberdade, as soluções não podem ser rotuladas por um número finito de parâmetros. Neste caso, o grupo contínuo é infinito.

§ Exemplos de Grupos de Lie

1. Grupo linear em uma dimensão:

$$x' = a_1 x + a_2 \, , \qquad a_1 \neq 0$$

Produto:

$$x'' = b_1 x' + b_2 = b_1(a_1 x + a_2) + b_2 \qquad (b_1 \neq 0)$$

$$= c_1 x + c_2 = b_1 a_1 x + b_2 + a_2 b_1$$

logo: $c_1 = a_1 b_1 \; , \; c_2 = b_2 + a_2 b_1$

Grupo não-abeliano.

Elemento identidade: $a_1 = 1, \; a_2 = 0$

Elemento inverso: $a_1 b_1 = 1$, $b_2 + a_2 b_1 = 0$

$$b_1 = \frac{1}{a_1} \quad , \quad b_2 = -a_2 b_1 = -\frac{a_2}{a_1}$$

## 2. Grupo linear em $\underline{n}$ dimensões: $GL(n)$

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad , \quad i = 1, \ldots n \quad ,$$

com

$$\det(a_{ij}) \neq 0$$

para que a transformação seja invertível. Em notação matricial

$$\underset{\sim}{x}' = \underset{\approx}{A} \cdot \underset{\sim}{x} \quad , \quad \det \underset{\approx}{A} \neq 0$$

este grupo depende de $n^2$ parâmetros reais. Os parâmetros variam sobre um intervalo infinito, de maneira que $GL(n)$ não é fechado.

## 3. Grupo Unimodular em $\underline{n}$ dimensões: $SL(n)$

Subgrupo do $GL(n)$ sujeito à condição de ter determinante unitário:

$$\det A = \det(a_{ij}) = 1$$

# de parâmetros essenciais: $(n^2 - 1)$ reais

## 4. Grupo Ortogonal em $\underline{n}$ dimensões: $O(n)$

É o grupo de transformações que deixam invariante

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

Isto significa que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i'^2 = \sum_i \sum_{jk} a_{ij} a_{ik} x_j x_j = \sum_{jk} \delta_{jk} x_j x_k$$

$$= \sum_j x_j^2$$

Assim, obtemos a condição:

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} ,$$

que significa que toda coluna é ortogonal a toda outra coluna, e cada coluna é normalizada (em conseqüência, a matriz transposta é a inversa). Temos então

$$n + \frac{n(n-1)}{2}$$

condições reais.

# de parâmetros essenciais: $n^2 - \left(n + \frac{n(n-1)}{2}\right) = \frac{n(n-1)}{2}$

Em particular temos

$$A \cdot A^T = 1$$

ou $\quad (\det A)^2 = 1 \implies \det A = \pm 1$

5. Grupo ortogonal especial em $n$ dimensões : $SO(n)$, $O^+(n)$

Subgrupo do anterior com

$$\det A = +1$$

# de parâmetros : $\frac{n(n-1)}{2}$ . O conjunto com $\det A = -1$

não é subgrupo

## 6. Grupo unitário em $n$ dimensões : $U(n)$

Definido em um espaço complexo de dim $n$. De maneira que temos

$$z' = Az \quad , \quad AA^{\dagger} = 1 = A^{\dagger}A$$

A condição de unitaridade fornece:

$$\delta_{jk} = \sum_i A_{ji} A^{\dagger}_{ik} = \sum_i A_{ji} A^*_{ki} \,,$$

de maneira que toda coluna (linha) é ortogonal a toda outra coluna (linha) com métrica hermiteana

$$x \cdot y^{\dagger} = \sum_i x_i y_i^*$$

Em particular $\det A^{\dagger} = (\det A)^* \Rightarrow (\det A)(\det A)^* = 1$ ou

$$|\det A|^2 = 1 \,, \quad \det A = e^{i\alpha}$$

As condições de unitaridade são em total $n + \frac{n(n-1)}{2} 2$ $= n + (n^2 - n) = n^2$ condições reais.

Para matrizes complexas de dim $n$, temos $2n^2$ parâmetros reais. Em total

# de parâmetros : $2n^2 - n^2 = n^2$

Da condição de unitaridade, temos

$$\sum_j |A_{ij}|^2 = 1 \,,$$

de onde resulta $|A_{ij}|^2 \leq 1$, $\forall i,j = 1,2 \ldots n$. Assim, os parâmetros de $U(n)$ variam sobre um intervalo finito, e o grupo unitário é fechado. Todos os subgrupos de $U(n)$ são também fechados ($O(n)$ e $SO(n)$ em particular)

7. Grupo unitário especial em $\underline{n}$ dimensões : $SU(n)$

Subgrupo de $U(n)$ com a condição que
$$\det A = +1$$
Neste caso, descontamos um parâmetro real :

\# parâmetros : $n^2 - 1$

A condição de unitaridade fornece :

$$z' \cdot z'^{\dagger} = \sum_{i=1}^{n} z_i' z_i'^{*} = \sum_{i=1}^{n} |z_i'|^2$$

$$= Az \cdot z^{\dagger} A^{\dagger} = z \cdot z^{\dagger} = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$$

$\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$ é um invariante.

§ Grupos Contínuos mistos

São grupos onde usamos rótulos discretos, além de parâmetros contínuos. Seja o exemplo do grupo:

$x' = \pm x + a$, onde o parâmetro $\underline{a}$ varia continuamente em
$$-\infty < a < +\infty$$

O grupo consiste de duas partes desconexas. As transformações

$$x' = x + a, \qquad (H)$$

formam um subgrupo onde todas as transformações podem ser obtidas variando continuamente o parâmetro $\underline{a}$ desde $\underline{0}$ (identidade) até um valor finito. No entanto, as transformações

$$x' = -x + a$$

não podem ser obtidas continuamente a partir da identidade. Seja $I : x' = -x$, a inversão. A decomposição de $G$ em classes de resíduos é

$$G = H + HI,$$

onde $H$ é um subgrupo invariante de $G$, e a ordem do grupo quociente é 2, $\# G/H = 2$

A mesma coisa acontece com o grupo ortogonal $O(n)$. Consiste de duas peças; uma com $\det A = +1$, e a outra com $\det A = -1$. A primeira é um subgrupo $SO(n)$, onde todo elemento do grupo pode ser obtido por uma trajetória contínua a partir da identidade. $SO(n)$ é invariante para o grupo ortogonal completo.

## § Grupos de um parâmetro: transformações infinitesimais

Na regra do produto, expressamos os parâmetros $\underline{c}$ em função de $\underline{a}$ e $\underline{b}$:

$$c_k = \phi_k(a_1 \ldots a_r; b_1 \ldots b_r)$$

No caso de um grupo a um parâmetro temos

$$c = \phi(a; b)$$

Esta equação pode ser resolvida (deve) para $\underline{a}$ em termos de $\underline{b}$ e $\underline{c}$, ou para $\underline{b}$ em termos de $\underline{a}$ e $\underline{c}$. Para isso é necessário que todos os Jacobianos sejam não nulos:

$$\left\| \frac{\partial \phi_k}{\partial a_\ell} \right\| \neq 0 , \quad \left\| \frac{\partial \phi_k}{\partial b_m} \right\| \neq 0$$

Também temos a condição para que as transformações sejam um grupo:

$$f(f(x;a);b) = f(x;\phi(a,b))$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f(x;a)"] \arrow[rr, bend right, "f(x;\phi(a,b))"'] & x' \arrow[r, "f(x';b)"] & x'' = f(x';b) \end{tikzcd}$$

Esta condição é uma identidade em $(x,a,b)$, mas também pode ser expressada como uma identidade entre $x$ e $x'$, e qualquer par de parâmetros entre $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$. Consideramos agora o caso de transformações infinitesimais:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "a+da"'] & x' \arrow[d, "\delta a"] \\ & x'+dx' \end{tikzcd}$$

Temos que:

$$x'+dx' = f(x;a+da) = f(x';\delta a)$$
$$x' = f(x;a)$$

Com $f(x;a=0)$ sendo a identidade. Expandindo essas relações:

$$x'+dx' = \underbrace{f(x';0)}_{x'} + \frac{\partial f}{\partial a}(x';a)\Big|_{a=0} \cdot \delta a$$

ou seja $$dx' = \left(\frac{\partial f}{\partial a}(x';a)\right)_{a=0} \cdot \delta a$$

Por outro lado, para os parâmetros temos:

$$\begin{aligned} a+da &= \phi(a;\delta a) \\ &= \phi(a;0) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial b}(a;b)\right)_{b=0} \cdot \delta a \\ &= a + \left(\frac{\partial \phi}{\partial b}(a;b)\right)_{b=0} \cdot \delta a \end{aligned}$$

porque $\phi(a;0) = a$. Temos:

$$da = \left(\frac{\partial \phi}{\partial b}(a;b)\right)_{b=0} \cdot \delta a$$

a derivada parcial é necessariamente não nula, de maneira que podemos escrever:

$$\delta a = \Psi(a)\, da \;, \quad \Psi(a) \equiv \frac{1}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial b}(a;b)\right)_{b=0}}$$

Temos também:

$$dx' = \left(\frac{\partial f}{\partial a}(x';a)\right)_{a=0} \cdot \delta a \equiv u(x')\,\delta a$$

$$dx' = u(x')\,\delta a = u(x')\,\Psi(a)\, da$$

$$\frac{dx'}{u(x')} = \Psi(a)\, da$$

esta eq. de 1ª ordem pode ser integrada facilmente:

$$\int_x^{x'} \frac{dx'}{u(x')} = \int_0^a \Psi(a)\, da = U(x') - U(x)$$

Introduzindo novas variáveis por

$$U(x) \equiv y \,, \qquad \int_0^a \psi(a)da = t \,,$$

temos que

$$y' - y = t \quad \text{ou} \quad y' = y + t$$

Para grupos finitos, este processo é simplesmente uma mudança de coordenadas que transforma todos os elementos do grupo pela mesma transformação. Neste caso, de grupos contínuos de um parâmetro, temos então demostrado que eles são equivalentes a um grupo de traslações, e portanto são abelianos. Este resultado não se aplica a grupos mistos, quando não existe ligação contínua com a identidade.

Temos mostrado então que para um grupo de Lie de um parâmetro, sempre podemos introduzir um parâmetro canônico $\underline{t}$ tal que

$$R(t_1)R(t_2) = R(t_2)R(t_1) = R(t_1+t_2)$$

$$R(t)^{-1} = R(-t) \,, \quad R(0) = 1$$

Neste caso, sempre existe uma representação exponencial dos operadores:

$$\frac{dR(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{R(t+\Delta t) - R(t)}{\Delta t}\right),$$

e usando a propriedade de grupo

$$R(t+\Delta t) = R(t)\cdot R(\Delta t)$$

Assim:

$$\frac{dR}{dt}(t) = R(t) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \left( \frac{R(\Delta t) - 1}{\Delta t} \right)$$

O operador

$$\mathcal{R} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \left( \frac{R(\Delta t) - 1}{\Delta t} \right)$$

está associado com o operador infinitesimal do grupo Lie. Temos o resultado:

$$\frac{dR}{dt}(t) = \mathcal{R} \cdot R(t) \,,$$

cuja solução é

$$R(t) = R_0 \, e^{\mathcal{R} t} \,,$$

e se usarmos a convenção que $R(0) = 1$, a identidade do grupo, temos

$$R(t) = e^{\mathcal{R} t} \,.$$

Se exigirmos que a representação seja unitária

$$R^{+}(t) = R^{-1}(t) = R(-t) = e^{-\mathcal{R} t} = e^{\mathcal{R}^{+} t} \,,$$

com $\mathcal{R}^{+} = -\mathcal{R}$, anti-hermiteano.

Escrever

$$\mathcal{R} = iS \Rightarrow \mathcal{R}^{+} = -iS^{+} = -iS = -\mathcal{R}$$

Com $S$ hermiteano $\Rightarrow R(t) = e^{iSt}$

Trabalhamos agora o caso geral $r$-paramétrico:

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1 \ldots a_r), \quad i = 1, 2 \ldots n$$

$$x_i' + dx_i' = f_i(x_1' \ldots x_n'; \delta a_1, \delta a_2 \ldots \delta a_r)$$

$$= f_i(x_1 \ldots x_n; a_1 + da_1, a_2 + da_2 \ldots a_r + da_r)$$

$$dx_i' = \sum_{k=1}^{r} \left[ \frac{\partial f_i}{\partial a_k}(x_1' \ldots x_n'; a_1 \ldots a_r) \right]_{a=0} \cdot \delta a_k$$

$$a_j + da_j = \phi_j(a_1 \ldots a_r; \delta a_1, \delta a_2 \ldots \delta a_r)$$

$$da_j = \sum_{m=1}^{r} \left[ \frac{\partial \phi_j}{\partial b_m}(a_1 \ldots a_r; b_1 \ldots b_r) \right]_{b=0} \delta a_m$$

Assim, temos as expressões:

$$dx_i' = \sum_{k=1}^{r} u_{ik}(x') \, \delta a_k \quad , \quad da_j = \sum_{m=1}^{r} \Theta_{jm}(a) \, \delta a_m$$

Como todos os jacobianos são <u>não</u> nulos, i.e.

$$\left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial a_k} \right\| \neq 0 \quad , \quad \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial b_k} \right\| \neq 0$$

A matriz $\Theta_{jm}(a) = \left[ \frac{\partial \phi_j}{\partial b_m}(a_1 \ldots a_r; b_1 \ldots b_r) \right]_{b=0}$ é inversível.

Logo, podemos expressar os $\delta a_m$ em função dos $da_m$:

$$\delta a_k = \sum_{m=1}^{r} \psi_{km}(a) \, da_m$$

e obtemos finalmente:

$$dx_i' = \sum_{k=1}^{r} u_{ik}(x') \sum_{m=1}^{r} \psi_{km}(a)\, da_m$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} u_{ik}(x') \psi_{km}(a)\, da_m$$

No caso $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$, os $\delta a$ coincidem com os $da$, portanto:

$$\Theta_{jm}(0) = \delta_{jm} \Rightarrow \psi_{km}(0) = \delta_{km}$$

$$dx_i' = \sum_{m=1}^{r} \left( \sum_{k=1}^{r} u_{ik}(x') \psi_{km}(a) \right) da_m$$

$$= \sum_{m=1}^{r} \left( \frac{\partial x_i'}{\partial a_m} \right) da_m$$

ou equivalentemente, considerando as coordenadas $x'$ como funções dos $\underline{a}$:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_m} = \sum_{k=1}^{r} u_{ik}(x') \psi_{km}(a)$$

As coordenadas $x$ são os valores iniciais de $x'$ para $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$. Se apenas um dos parâmetros é variado, temos um subgrupo de um parâmetro (que é abeliano) e obtemos uma particular transformação infinitesimal. Qualquer transformação infinitesimal é uma combinação linear de $\underline{r}$ transformações infinitesimais independentes. Negligenciando termos de ordem superior em $\delta a_i$, as transformações infinitesimais comutam entre si. Estudemos a mudança em uma função $F(x)$ arbitrária, por efeito de uma transformação infinitesimal:

$$x_i' + dx_i' = f(x'; \delta a)$$

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) dx_i \doteq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) \sum_{k=1}^{r} u_{ik}(x)\,\delta a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \delta a_k \sum_{i=1}^{n} u_{ik}(x) \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \delta a_k\, X_k\, F$$

com $\displaystyle X_k \equiv \sum_{i=1}^{n} u_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Operadores} \\ \text{infinitesimais} \\ \text{do grupo} \end{array} \right.$

Assim: $\displaystyle F + dF = \left(1 + \sum_{k=1}^{r} \delta a_k X_k\right) F$

O operador diferencial

$$1 + \sum_{k=1}^{r} \delta a_k X_k$$

está perto da identidade (transformação infinitesimal). Em particular, se $F$ é uma das variáveis $x_i$, obtemos:

$$x_i' = \left(1 + \sum_{k=1}^{r} \delta a_k X_k\right) x_i$$

$$= x_i + \sum_{k=1}^{r} \delta a_k \sum_{m=1}^{n} u_{mk}(x) \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_m}}_{\delta_{im}}$$

$$x_i + dx_i = x_i + \sum_{k=1}^{r} \delta a_k\, u_{ik}(x)$$

$\Rightarrow$ $\displaystyle dx_i = \sum_{k=1}^{r} u_{ik}(x)\,\delta a_k$ , expressão previamente obtida

Ex: Grupo ortogonal em 3-dim, $SO(3)$

Ele é caraterizado pela propriedade:

$$A^T \cdot A = A \cdot A^T = 1 \; ,$$

onde $A^T$ é a matriz traposta (as matrizes são reais). O grupo ortogonal completo tem duas peças disjuntas segundo se $\det A = \pm 1$; o subgrupo $SO(3)$ é contínuo com $\det A = +1$.
Para uma transformação infinitesimal escrevemos

$$A = 1 + B \quad , \quad A^T = 1 + B^T$$

Assim temos:

$$1 = AA^T = (1+B)(1+B^T) \cong 1 + B + B^T$$

em primeira ordem (transf. infinitesimais). Obtemos a condição:

$$B + B^T = 0 \Rightarrow B^T = -B \, ,$$

isto é a matriz $B$ é antisimétrica. Ela é descrita por 3 parâmetros independentes

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \delta\zeta & -\delta\eta \\ -\delta\zeta & 0 & \delta\xi \\ \delta\eta & -\delta\xi & 0 \end{pmatrix}$$

A transformação infinitesimal $(1+B)$ operando sobre as coordenadas fornece:

$$x' = x + \delta\zeta\, y - \delta\eta\, z$$
$$y' = y - \delta\zeta\, x + \delta\xi\, z$$
$$z' = z + \delta\eta\, x - \delta\xi\, y$$

ou equivalentemente:

$$\begin{cases} dx = y\,\delta\zeta - z\,\delta\eta \\ dy = -x\,\delta\zeta + z\,\delta\xi \\ dz = x\,\delta\eta - y\,\delta\xi \end{cases}$$

Destas transformações obtemos as funções $u_{ik}(x)$:

$$u_{1\xi} = 0 \qquad u_{2\xi} = z \qquad u_{3\xi} = -y$$

$$u_{1\eta} = -z \qquad u_{2\eta} = 0 \qquad u_{3\eta} = x$$

$$u_{1\zeta} = y \qquad u_{2\zeta} = -x \qquad u_{3\zeta} = 0$$

e os correspondentes operadores infinitesimais:

$$X_\xi = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}$$

$$X_\eta = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_\zeta = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

Que correspondem às componentes do momentum angular.
Calculemos os comutadores dos operadores infinitesimais:

$$X_\xi X_\eta f(x,y,z) = \left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$= xz\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} - z^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + y\frac{\partial f}{\partial x} + yz\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}$$

Por outro lado:

$$X_\eta X_\xi f = x\frac{\partial f}{\partial y} + xz\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + yz\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}$$

Com a hipótese que as derivadas são contínuas, obtemos:

$$(X_\xi X_\eta - X_\eta X_\xi) f = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = \left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) f$$
$$= X_\zeta f$$

Permutando ciclicamente os índices $\xi \to \eta \to \zeta$ e $1 \to 2 \to 3$, obtemos as relações de comutação:

$$[X_\xi, X_\eta] = X_\zeta \;, \quad [X_\eta, X_\zeta] = X_\xi \;, \quad [X_\zeta, X_\xi] = X_\eta \;,$$

que são as conhecidas relações de comutação do momentum angular. A transformação infinitesimal mais geral é portanto do tipo:

$$1 + \delta\xi X_\xi + \delta\eta X_\eta + \delta\zeta X_\zeta \;,$$

que pode ser escrita em forma mais compacta com:

$$\delta\vec{u} \equiv (\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta) \;, \quad \vec{X} = (X_\xi, X_\eta, X_\zeta)$$

$$1 + \delta\vec{u}\cdot\vec{X}$$

## § Constantes de estrutura

A propriedade encontrada para os comutadores dos operadores infinitesimais de SO(3) é geral para um grupo de Lie. Calculemos os comutadores para o caso geral:

$$X_\rho = \sum_{i=1}^{n} u_{i\rho}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad \rho = 1,2 \ldots r$$

$$[X_\rho, X_\sigma] = X_\rho X_\sigma - X_\sigma X_\rho = u_{i\rho} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{j\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) - u_{j\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_{i\rho} \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

$$= \cancel{u_{i\rho} u_{j\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}} + u_{i\rho} \frac{\partial u_{j\sigma}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \cancel{u_{j\sigma} u_{i\rho} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}} -$$

$$- u_{j\sigma} \frac{\partial u_{i\rho}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mudando índices mudos (usando a convenção de Einstein):

$$= u_{i\rho} \frac{\partial u_{j\sigma}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - u_{i\sigma} \frac{\partial u_{j\rho}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$= \left( u_{i\rho} \frac{\partial u_{j\sigma}}{\partial x_i} - u_{i\sigma} \frac{\partial u_{j\rho}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Pode-se mostrar que (ver Hamermesh, cap. 8) que a condição de integrabilidade das equações

$$dx_i = \sum_{k,l=1}^{r} u_{ik}(x) \psi_{kl}(a) da_l$$

ou
$$\frac{\partial x_i}{\partial a_l} = \sum_{k=1}^{r} u_{ik}(x) \psi_{kl}(a)$$

conduz a:

$$\boxed{\left(u_{i\rho}\frac{\partial u_{j\sigma}}{\partial x_i} - u_{i\sigma}\frac{\partial u_{j\rho}}{\partial x_i}\right) \equiv C^{k}_{\rho\sigma}\, u_{jk}}$$

onde as $C^{k}_{\rho\sigma}$ são constantes, isto é:

$$\frac{\partial}{\partial a_\lambda} C^{k}_{\rho\sigma} = 0$$

} são chamadas CONSTANTES de ESTRUTURA

A relação de comutação fica então como:

$$\boxed{[X_\rho, X_\sigma] = C^{k}_{\rho\sigma}\, u_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j} = C^{k}_{\rho\sigma}\, X_k} \quad ,$$

de maneira que a álgebra é fechada. Como temos que $[X_\rho, X_\sigma] = -[X_\sigma, X_\rho]$, isto implica:

$$\boxed{C^{k}_{\rho\sigma} = -C^{k}_{\sigma\rho}}$$

Como a identidade de Jacobi é satisfeita pelos comutadores

$$[[X_\rho, X_\sigma], X_\tau] + [[X_\sigma, X_\tau], X_\rho] + [[X_\tau, X_\rho], X_\sigma] = 0,$$

as constantes de estrutura satisfazem

$$\boxed{C^{\mu}_{\rho\sigma}C^{\nu}_{\mu\tau} + C^{\mu}_{\sigma\tau}C^{\nu}_{\mu\rho} + C^{\mu}_{\tau\rho}C^{\nu}_{\mu\sigma} = 0}$$

As constantes de estrutura podem ser calculadas a partir de

$$\frac{\partial \psi_{k\mu}}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial \psi_{k\lambda}}{\partial a_\mu} = C^{k}_{\tau\sigma}\, \psi_{\tau\mu}\, \psi_{\sigma\lambda}$$

Temos a propriedade:

$$X_\rho x_i = u_{j\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} x_i = u_{j\rho} \delta_{ij} = u_{i\rho}$$

De maneira que as eq. diferenciais podem ser escritas como:

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_\lambda} = u_{ik} \Psi_{k\lambda}(a) = \Psi_{k\lambda}(a) X_k x_i$$

com $\Psi_{k\lambda}(a=0) = \delta_{k\lambda}$. Toda transformação do grupo pode ser obtida deixando variar os parâmetros $a_\lambda$ sobre uma reta:

$$a_\lambda = s_\lambda \cdot \tau \quad , \quad \lambda = 1,2 \ldots r \quad ,$$

com $s_\lambda$ sendo um vetor real. O valor $\tau = 0$ da a identidade. Seja $S(\tau)$ o operador da transformação:

$$x_i(\tau) = S(\tau)\, x_i(0) \quad , \quad S(0) = 1$$

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial x_i}{\partial a_\lambda}\left(\frac{da_\lambda}{d\tau}\right) = s_\lambda \Psi_{k\lambda}(a) X_k x_i(\tau)$$

$$= \frac{dS}{d\tau}(\tau)\, x_i(0) = s_\lambda \Psi_{k\lambda}(a) X_k S(\tau)\, x_i(0) ,$$

de maneira que obtemos uma equação diferencial para $S(\tau)$:

$$\boxed{\frac{dS}{d\tau}(\tau) = s_\lambda \Psi_{k\lambda}(s_\rho \tau) X_k S(\tau)}$$

para $\tau = 0$, $\Psi_{k\lambda}(0) = \delta_{k\lambda}$, $S(0) = 1$

$$\left(\frac{dS}{d\tau}(\tau)\right)_{\tau=0} = s_\lambda X_\lambda ,$$

e o desenvolvimento de Taylor de $S(\tau)$ tem a expansão:

$$S(\tau) = 1 + s_\lambda \tau X_\lambda + \cdots$$

com

$$x_i(\tau) = (1 + s_\lambda \tau X_\lambda + \cdots)\, x_i(0)$$

Consideremos um segundo vetor $t_\lambda$ do operador infinitesimal $t_\lambda X_\lambda$ e

$$T(\tau) = 1 + t_\lambda \tau X_\lambda + \cdots$$

Para o produto $S(\tau)T(\tau)$ temos os desenvolvimentos:

$$S(\tau)T(\tau) = (1 + s_\lambda \tau X_\lambda + \cdots)(1 + t_\rho \tau X_\rho + \cdots)$$

$$= 1 + (s_\lambda + t_\lambda)\tau X_\lambda + \cdots ,$$

de maneira que o produto se identifica com o operador infinitesimal $(s_\lambda + t_\lambda) X_\lambda$. A solução da eq. diferencial (devidamente parametrizada com $\tau$) é uma exponencial. O operador infinitesimal associado com

$$S^{-1}(\tau)T^{-1}(\tau)S(\tau)T(\tau)$$

é o comutador dos correspondentes operadores infinitesimais:

$$S^{-1}(\tau)T^{-1}(\tau)S(\tau)T(\tau) = (1 - s_\lambda \tau X_\lambda \cdots)(1 - t_\mu \tau X_\mu \cdots) \cdot$$
$$\cdot (1 + s_k \tau X_k \cdots)(1 + t_\nu \tau X_\nu \cdots)$$

Os termos de primeira ordem se cancelam:

$$= 1 + \cancel{s_k \tau X_k} - \cancel{s_\lambda \tau X_\lambda} - \cancel{t_\mu \tau X_\mu} + \cancel{t_\nu \tau X_\nu} + \tau^2(\dots) + \dots$$

Temos que o resultado líquido, em ordem $\tau^2$, é:

$$S^{-1}(\tau)T^{-1}(\tau)S(\tau)T(\tau) = 1 + \tau^2 [s_k X_k, t_\mu X_\mu] + \cdots ,$$

de maneira que neste caso a variável relevante é $\tau^2$. Se $S(\tau)$ e $T(\tau)$ comutam, $S^{-1}T^{-1}ST$ é o operador identidade e temos

$$[s_k X_k, t_\mu X_\mu] = 0$$

Desta maneira podem ser estudadas todas as estruturas de grupos de Lie. Por exemplo, se o grupo $G$ for abeliano, temos

$$[X_k, X_\lambda] = 0, \quad \forall k, \lambda = 1, 2 \dots, r ,$$

ou em termo das constantes de estrutura:

$$C^{\rho}_{k\lambda} = 0, \quad \forall \rho, k, \lambda = 1, 2, \dots, r$$

# § Integração Invariante

Para grupos finitos, os lemas de Schur e os teoremas de ortogonalidade se baseavam na propriedade de rearranjo dos elementos do grupo. O ponto essencial nessas derivações é que associamos o mesmo peso a todos os elementos R de um grupo finito. Seja H um subconjunto de G, $H \subset G$, temos para um $S \in G$ dado que

$$\sum_{R \in H} f(R) = \sum_{R \in SH} f(S^{-1}R)$$

onde SH é o subconjunto obtido a partir de H por multiplicação à esquerda com o elemento $S \in G$. Se R percorre todo o grupo G, $S^{-1}R$ é apenas um rearranjo dos elementos do grupo G,

$$\sum_{R \in G} f(R) = \sum_{R \in G} f(S^{-1}R)$$

Queremos estender esta propriedade para grupos de Lie: o peso associado com um elemento A é igual ao peso associado ao elemento BA, obtido a partir de A por multiplicação à esquerda por B. Associamos a elementos na vizinhança de A um volume (medida) $d\tau_A$. Da mesma maneira $d\tau_{BA}$ à vizinhança de elementos em torno de BA. Queremos que:

$$d\tau_A = d\tau_{BA}$$

Se fala que esta medida é "<u>invariante pela esquerda</u>". Temos agora, para uma função f dos <u>elementos</u> do grupo:

$$\int_H d\tau_A\, f(A) = \int_{BH} d\tau_{BA}\, f(B^{-1}A) = \int_{BH} d\tau_A\, f(B^{-1}A)$$

e considerando o grupo completo $G$:

$$\int_G d\tau_A\, f(A) = \int_G d\tau_A\, f(B^{-1}A)$$

O conjunto de elementos de $H$ na vizinhança de $A$ têm parâmetros perto dos parâmetros de $A$:

$$A \leftrightarrow \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$$

volume no espaço dos parâmetros: $da$.

Multiplicando pela esquerda por $B$ com parâmetros $(b_1 \ldots b_r)$, a vizinhança correspondente em $BH$ terá parâmetros na vizinhança de $c_k = \phi_k(a;b)$ com volume $\underline{dc}$.
Para fazer as medidas iguais, escolhemos uma função densidade $\rho(a)$ tal que:

$$d\tau_H = \rho(a)\,da = d\tau_{BH} = \rho(c)\,dc$$

Podemos fixar arbitrariamente o valor $\rho(0)$ na vizinhança da identidade. O conjunto na vizinhança da identidade é "trasladado" por multiplicação pela esquerda por $B$ em uma região do espaço dos parâmetros na vizinhança de $\underline{b}$

$$b_k = \phi_k(0;b)$$
$$b_k + db_k = \phi_k(da, b)$$

$$db_k = \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial \phi_k(a;b)}{\partial a_l}\bigg|_{a=0} da_l \,,$$

de maneira que os volumes $\underline{db}$ e $\underline{da}$ estão relacionados pela equação:

$$db = \left\| \left[ \frac{\partial \phi_k(a;b)}{\partial a_l} \right]_{a=0} \right\| da$$

$$= J(b)\, da \,, \qquad \text{com} \quad J(b) \neq 0$$

e colocando $\rho(b) = \dfrac{\rho(0)}{J(b)}$ temos

$$\rho(b)\, db = \frac{\rho(0)}{J(b)} J(b)\, da = \rho(0)\, da \,,$$

que nos dá a receita de como calcular $\rho(b)$ para "traslação pela esquerda" em $B$.

Ex. O grupo ortogonal próprio $SO(3)$

Uma rotação arbitrária pode ser parametrizada por um vetor de três componentes:

$$\phi \hat{n} = (\phi n_x, \phi n_y, \phi n_z) \,,$$

onde o comprimento do vetor é o ângulo $\phi$, e $\hat{n}$ é um vetor unitário que fornece a direção positiva do eixo. O eixo pode ter qualquer orientação espacial e o ângulo $\phi$ pode tomar os valores

$$0 \leq \phi \leq \pi \,,$$

de maneira que os parâmetros do grupo de rotações se encontram no interior de uma esfera de raio $\pi$. Para cada ponto no interior da esfera corresponde exatamente uma rotação. Na superfície da esfera, $\phi = \pi$, dois pontos diametralmente opostos representam a mesma rotação e os identificamos. Consideramos então coordenadas polares dentro da esfera de raio $\pi$. Os parâmetros da identidade são $(0,0,0)$. Consideramos parâmetros $(\xi, \eta, \zeta)$ na vizinhança da identidade. A transformação infinitesimal correspondente é

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 1 & -\zeta & \eta \\ \zeta & 1 & -\xi \\ -\eta & \xi & 1 \end{pmatrix} = 1 + \underline{\underline{A}} ,$$

onde $\underline{\underline{A}}$ é antisimétrica. Queremos agora trasladar esta vizinhança no espaço dos parâmetros por multiplicação pela esquerda com $S$, alguma outra rotação em ângulo $\varphi$. Como todas as rotações pelo mesmo ângulo são equivalentes, esperamos que a função densidade $\rho$ só dependa do ângulo $\varphi$ de rotação:

$$\rho = \rho(\varphi)$$

Podemos considerar então qualquer rotação em $\varphi$. A mais conveniente é

$$\underline{\underline{S}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

e multiplicando pela esquerda obtemos $\underline{\underline{S}}(\varphi)\underline{\underline{R}}$:

$$\underline{\underline{S(\varphi)}}\,\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 1 & -\zeta & \eta \\ \zeta\cos\varphi + \eta\,\mathrm{sen}\,\varphi & \cos\varphi - \xi\,\mathrm{sen}\,\varphi & -\xi\cos\varphi - \mathrm{sen}\,\varphi \\ \zeta\,\mathrm{sen}\,\varphi - \eta\cos\varphi & \mathrm{sen}\,\varphi + \xi\cos\varphi & -\xi\,\mathrm{sen}\,\varphi + \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Sabemos que o Traço está ligado ao ângulo de rotação:

$$1 + 2\cos\varphi' = \mathrm{Tr}\,\underline{\underline{S(\varphi)}}\cdot\underline{\underline{R}} = 1 + 2\cos\varphi - 2\xi\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\cong 1 + 2\cos(\varphi + \xi)$$

em primeira ordem em $(\xi, \eta, \zeta) \Rightarrow \varphi' = \varphi + \xi$. Temos que calcular agora o eixo da rotação $\underline{\underline{S(\varphi)}}\cdot\underline{\underline{R}}$ em primeira ordem

$$n_x - \zeta n_y + \eta n_z = n_x$$

$$(\zeta\cos\varphi + \eta\,\mathrm{sen}\,\varphi)n_x + (\cos\varphi - \xi\,\mathrm{sen}\,\varphi)n_y - (\xi\cos\varphi + \mathrm{sen}\,\varphi)n_z = n_y$$

$$(\zeta\,\mathrm{sen}\,\varphi - \eta\cos\varphi)n_x + (\mathrm{sen}\,\varphi + \xi\cos\varphi)n_y + (-\xi\,\mathrm{sen}\,\varphi + \cos\varphi)n_z = n_z$$

ou

$$\begin{cases} (\cos\varphi - \xi\,\mathrm{sen}\,\varphi - 1)\,n_y - (\xi\cos\varphi + \mathrm{sen}\,\varphi)\,n_z = -(\zeta\cos\varphi + \eta\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,n_x \\ (\mathrm{sen}\,\varphi + \xi\cos\varphi)\,n_y + (-\xi\,\mathrm{sen}\,\varphi + \cos\varphi - 1)\,n_z = (\eta\cos\varphi - \zeta\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,n_x \end{cases}$$

o determinante deste último sistema é dado por:

$$\Delta = 2\,(1 - \cos\varphi + \xi\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

e $\dfrac{1}{\Delta} = \dfrac{1}{2(1-\cos\varphi)}\left[1 - \xi\,\dfrac{(1+\cos\varphi)}{\mathrm{sen}\,\varphi}\right]$ em 1ª ordem

Solução:

$$n_y = n_x \frac{1}{2(1-\cos\varphi)}\left[1-\xi\,\frac{(1+\cos\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}\right]\left[\eta\,\operatorname{sen}\varphi+\zeta(\cos\varphi-1)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{n_y}{n_x} = \frac{1}{2(1-\cos\varphi)}\left[\eta\,\operatorname{sen}\varphi+\zeta(\cos\varphi-1)\right] = -\frac{\zeta}{2}+\frac{\eta}{2}\,\frac{1+\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$$

e para $n_z$:

$$\frac{n_z}{n_x} = \frac{1}{2(1-\cos\varphi)}\left[\eta(1-\cos\varphi)+\zeta\,\operatorname{sen}\varphi\right] = \frac{\eta}{2}+\frac{\zeta}{2}\,\frac{1+\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$$

O vetor unitário é então:

$$\hat{n} = n_x\left(1,\ -\frac{\zeta}{2}+\frac{\eta}{2}\left(\frac{1+\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\right),\ \frac{\eta}{2}+\frac{\zeta}{2}\left(\frac{1+\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\right)\right)$$

Em primeira ordem, a condição de normalização implica

$$\hat{n}^2 = 1 = n_x^2 \implies n_x = 1$$

Os parâmetros do producto são $(\varphi' n_x,\ \varphi' n_y,\ \varphi' n_z)$:

$$u = \varphi' n_x = \varphi+\xi \qquad = u(\xi,\eta,\zeta;\varphi)$$

$$v = \varphi' n_y = \varphi\left[-\frac{\zeta}{2}+\frac{\eta}{2}\left(\frac{1+\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\right)\right] \qquad = v(\xi\eta\zeta;\varphi)$$

$$w = \varphi' n_z = \varphi\left[\frac{\eta}{2}+\frac{\zeta}{2}\left(\frac{1+\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\right)\right] \qquad = w(\xi\eta\zeta;\varphi)$$

Calculamos agora o Jacobiano da transformação:

$$J(\varphi) = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{000} & \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{000} & \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)_{000} \\ \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)_{000} & \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)_{000} & \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right)_{000} \\ \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{000} & \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{000} & \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)_{000} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varphi}{2}\left(\frac{1+\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\right) & -\frac{\varphi}{2} \\ 0 & \frac{\varphi}{2} & \frac{\varphi}{2}\left(\frac{1+\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\varphi^2}{4}\frac{(1+\cos\varphi)^2}{\operatorname{sen}^2\varphi} + \frac{\varphi^2}{4} = \frac{\varphi^2}{4}\left[\frac{(1+\cos\varphi)^2}{(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi)} + 1\right]$$

$$= \frac{\varphi^2}{4}\left(\frac{1+\cancel{\cos\varphi}+1-\cancel{\cos\varphi}}{1-\cos\varphi}\right) = \frac{\varphi^2}{2}\left(\frac{1}{1-\cos\varphi}\right)$$

Colocando $\rho(0)=1$, temos:

$$\rho(\varphi) = \frac{2}{\varphi^2}(1-\cos\varphi)$$

Para integrar uma função $f$ sobre o grupo temos

$$\int_0^\pi \varphi^2 d\varphi \int_{4\pi} d\Omega \; \frac{2}{\varphi^2}(1-\cos\varphi)\, f(\varphi,\Omega) =$$

$$= 2\int_0^\pi d\varphi \int_{4\pi} d\Omega \; (1-\cos\varphi)\, f(\varphi,\Omega)$$

Se a função $f$ não depende da orientação do eixo de rotação:

$$f = f(\varphi)$$

$$= 2 \cdot 4\pi \int_0^{\pi} d\varphi\,(1-\cos\varphi)\, f(\varphi) = 8\pi \int_0^{\pi} d\varphi\,(1-\cos\varphi)\, f(\varphi)$$

O "volume total" do grupo (análogo à ordem para grupos finitos):

$$V_h = 8\pi \int_0^{\pi} d\varphi\,(1-\cos\varphi) = 16\pi \int_0^{\pi} d\varphi\, \operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2} = 8\pi^2$$

A relação de ortogonalidade para os caraterės das RI do grupo se escreve agora:

$$\frac{1}{V_h} \cdot 8\pi \int_0^{\pi} d\varphi\,(1-\cos\varphi)\, \chi^{(i)*}(\varphi)\, \chi^{(j)}(\varphi) = \delta_{ij}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi\,(1-\cos\varphi)\, \chi^{(i)*}(\varphi)\, \chi^{(j)}(\varphi)$$

Vejamos o caso explícito dos carateres do grupo para $j$ arbitrário. Encontramos que temos RI de $SO(3)$ com

$$\chi^{(j)}(\varphi) = \frac{\operatorname{sen}(j+\frac{1}{2})\varphi}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}, \quad j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \ldots,$$

com carateres reais. Verifiquemos a relação de ortogonalidade, primeiro com $j = \ell = 0, 1, 2 ..$ inteiro, onde as representações são <u>univalentes</u>:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi\,(1-\cos\varphi)\, \chi^{(\ell)*}(\varphi)\, \chi^{(\ell')}(\varphi) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi\; 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\varphi}{2}\; \frac{\mathrm{sen}\,(\ell+\frac{1}{2})\varphi \cdot \mathrm{sen}\,(\ell'+\frac{1}{2})\varphi}{\mathrm{sen}^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi\; \mathrm{sen}\left[(\ell+\tfrac{1}{2})\varphi\right] \cdot \mathrm{sen}\left[(\ell'+\tfrac{1}{2})\varphi\right]$$

usando a identidade trigonométrica:

$$2\,\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B = \cos(A-B) - \cos(A+B),$$

a integral fica:

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi \left\{\cos\left[(\ell-\ell')\varphi\right] - \cos\left[(\ell+\ell'+1)\varphi\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{ \frac{1}{\ell-\ell'}\,\mathrm{sen}\,(\ell-\ell')\varphi\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\ell+\ell'+1}\,\mathrm{sen}\,(\ell+\ell'+1)\varphi\Big|_0^{\pi}\right\}$$

$$= \delta_{\ell\ell'}$$

Mostremos agora que as representações $\Gamma^{(\ell)}$ formam um <u>conjunto completo</u>, isto é não existe outra rep. I.i. que seja <u>contínua e univalente</u>. Seja $\chi(\varphi)$ o caráter de tal representação, assumindo que existe. Ela teria que ser ortogonal a toda $\Gamma^{(\ell)}$, $\ell=0,1,2\ldots$

$$\int_0^{\pi} d\varphi\,(1-\cos\varphi)\, \chi^{(\ell)*}(\varphi)\, \chi(\varphi) = 0, \quad \forall \ell=0,1,2\ldots$$

Tomando diferenças entre $\underline{\underline{\ell}}$ sucessivos, e notando que os caratêres são reais, temos

$$\int_0^{\pi} d\varphi\,(1-\cos\varphi)\,\chi(\varphi)\left[\chi^{(\ell+1)}(\varphi)-\chi^{(\ell)}\right]=0\ ,\quad \forall \ell=0,1,2\ldots$$

Temos que: $\chi^{(0)}(\varphi)=1$, representação idêntica, e em geral

$$\chi^{(\ell+1)}(\varphi)-\chi^{(\ell)}(\varphi)=\frac{\text{sen}\,(\ell+\frac{3}{2})\varphi}{\text{sen}\,\frac{\varphi}{2}}-\frac{\text{sen}\,(\ell+\frac{1}{2})\varphi}{\text{sen}\,\frac{\varphi}{2}}$$

Usamos a identidade:

$$\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \text{sen}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

ou $\quad \text{sen}\,(\ell+\frac{3}{2})\varphi-\text{sen}\,(\ell+\frac{1}{2})\varphi = 2\cos(\ell+1)\varphi\ \text{sen}\,\frac{\varphi}{2}$

Isto é vamos ter a relação:

$$0=\int_0^{\pi} d\varphi\left[(1-\cos\varphi)\,\chi(\varphi)\right]2\cos(\ell+1)\varphi\ ,\quad \ell=0,1,2\ldots$$

e também

$$0=\int_0^{\pi} d\varphi\,(1-\cos\varphi)\,\chi(\varphi)\cdot\chi^{(0)}(\varphi)$$

Como $\chi(-\varphi)=\chi(\varphi)$, função par, isto significa que todos os coeficientes de Fourier de

$(1-\cos\varphi)\,\chi(\varphi)$

são nulos. Como o conjunto $\{\cos\ell\varphi\}_{\ell=0,1,2\ldots}$ é um conjunto completo de funções, para funções pares e de período $2\pi \Rightarrow \chi(\varphi)=0$. Portanto não existe outra representação contínua e univalente que seja l.i. com as $\Gamma^{(\ell)}$.

No caso geral, incluindo as representações bivalentes do grupo, com

$$\overset{(j)}{\chi}(\varphi) = \frac{\operatorname{sen}(j+\frac{1}{2})\varphi}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}} \quad , \quad j=0,\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2}\ldots$$

as relações de ortogonalidade não são satisfeitas. Temos, neste caso, que ir para o correspondente grupo unitário SU(2), para o qual as rep. $\chi^{(j)}(\varphi)$ são univalentes. Nesta situação, porém, uma rotação em $2\pi$ não é a identidade, e o espaço dos parâmetros tem que ser ampliado para uma esfera de raio $2\pi$. O "volume total" do grupo é então:

$$V_h = 8\pi \int_0^{2\pi} d\varphi\,(1-\cos\varphi) = 16\pi^2$$

e as relações de ortogonalidade ficam:

$$\frac{1}{V_h}\, 8\pi \int_0^{2\pi} d\varphi\,(1-\cos\varphi)\, \overset{(j)*}{\chi}(\varphi)\, \overset{(j')}{\chi}(\varphi)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\,(1-\cos\varphi)\, \overset{(j)*}{\chi}(\varphi)\, \overset{(j')}{\chi}(\varphi)\,,$$

com $j, j' = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\ldots$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, \operatorname{sen}\left[(j+\tfrac{1}{2})\varphi\right] \operatorname{sen}\left[(j'+\tfrac{1}{2})\varphi\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \left[\cos(j-j')\varphi - \cos(j+j'+1)\varphi\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{ \frac{1}{j-j'} \operatorname{sen}(j-j')\varphi \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{j+j'+1} \operatorname{sen}(j+j'+1)\varphi \Big|_0^{2\pi} \right\}$$

os números $(j-j')$ e $(j+j'+1)$ podem agora ser semi-inteiros.
Resultado:

$$\frac{1}{V_h}\int_0^{2\pi} 8\pi\, d\varphi\, (1-\cos\varphi)\, \chi^{(j)*}(\varphi)\, \chi^{(j')}(\varphi) = \delta_{jj'}$$

com $j, j' = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

Da mesma maneira que para $SO(3)$, podemos mostrar que não existem outras representações de $SU(2)$, contínuas e univalentes, que sejam l.i. com as $\chi^{(j)}(\varphi)$. Isto, porque as funções:

$$\chi^{(0)}(\varphi) = 1, \quad \chi^{(1/2)}(\varphi) = 2\cos\frac{\varphi}{2},$$

$$\chi^{(1)}(\varphi) - \chi^{(0)}(\varphi) = 1 + 2\cos\varphi - 1 = 2\cos\varphi$$

$$\chi^{(3/2)}(\varphi) - \chi^{(1/2)} = 2\cos\frac{3}{2}\varphi \; \dots$$

$\{1, \cos\frac{\varphi}{2}, \cos\varphi, \cos\frac{3}{2}\varphi \dots\}$ são um conjunto completo para funções pares de período $4\pi$

Em geral, pode-se mostrar que se a variedade do grupo é <u>m-conexa</u>, teremos representações <u>m-valuadas</u>
Todas as propriedades dos carateres e as relações de ortogonalidade foram derivadas assumindo tácitamente que as representações eram <u>univalentes</u>. Elas não são válidas no caso de multivalencias. Por outro lado, o comportamento dos spinores, por exemplo, não pode ser ignorado, pois temos motivações físicas fortes para considerá-los. Este problema pode ser resolvido usando o conceito de GRUPO COBERTOR UNIVERSAL. Pode-se mostrar que para todo grupo <u>multiplemente conexo</u> G existe sempre um grupo <u>simplesmente conexo</u> $\tilde{G}$ (o grupo cobertor universal de G), de maneira que $\tilde{G}$ pode ser mapeado homomórficamente sobre G:

$$\tilde{G} \longrightarrow G$$

O grupo $\tilde{G}$ contem um <u>subgrupo invariante discreto N</u>, tal que G é isomorfo à $\tilde{G}/N$

$$G \sim \tilde{G}/N$$

Toda RI de G (simples ou multivalente) é uma representação univalente de $\tilde{G}$. Para encontrar todas as RI de G, estudamos as RI de $\tilde{G}$. Para as RI de $\tilde{G}$, todas elas são univalentes, e os teoremas do ortogonalidade e completeza são válidos.

<u>Ex.</u> Grupo SO(3).

O cobertor universal é o grupo SU(2). Neste caso, o grupo discreto N é isomorfo à $\{1,-1\}$. Neste caso, foram geradas todas as RI de SU(2).