F313-C

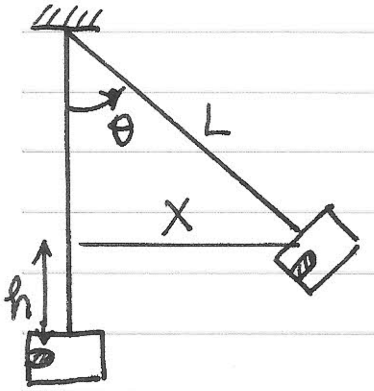
2ª Prova.

1. Pêndulo balístico

(a) Como o choque é inelástico, a energia não é conservada na colisão. Usamos então a conservação do momentum:

$$mV_0 = (m+M)V \Rightarrow V = V_0\left(\frac{m}{m+M}\right).$$

Durante a oscilação do pêndulo a energia é conservada. Toda a energia cinética após a colisão é convertida em energia potencial:



a altura máxima alcançada é:

$$h = L - L\cos\theta$$
$$= L\left(1 - \sqrt{1-\mathrm{sen}^2\theta}\right)$$

Para o deslocamento horizontal:

$$X = L\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$h = L\left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{X}{L}\right)^2}\right)$$

A raiz acima pode ser expandida em série de Taylor para $\frac{X}{L} \ll 1$. Obtemos:

$$\sqrt{1-\left(\frac{X}{L}\right)^2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{X}{L}\right)^2 \ldots$$

Substituindo, obtemos:

$$h = L \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{X}{L}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{X^2}{L}$$

Seja K_f a energia cinética após a colisão. A conservação da energia fornece:

$$K_f = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{(M+m)}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 V_0^2 = (m+M)g\,h$$

$$= \cancel{(m+M)}\frac{g}{\cancel{2}}\frac{X^2}{L}$$

Resulta: $$V_0^2 = \left(\frac{m+M}{m}\right)^2 X^2\left(\frac{g}{L}\right)$$

$$\boxed{V_0 = \frac{m+M}{m}\,X\,\sqrt{\frac{g}{L}}\,.}$$

(b) Calculamos a energia cinética perdida na colisão. Seja K_i a energia cinética inicial.

$$\frac{\Delta K}{K_i} = (K_i - K_f)/K_i = 1 - \frac{K_f}{K_i}$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}V_0^2}{\frac{1}{2}mV_0^2} = 1 - \frac{m}{m+M} = \frac{M}{M+m}$$

$$\boxed{\frac{\Delta K}{K_i} = \frac{M}{M+m}}$$

Para o exemplo dado, $m = 2g$, $M = 3000\,g$,

$$\frac{\Delta K}{K_i} = \frac{3000}{3002} = 0.9993 = 99.93\,\%$$

Quase toda a energia inicial foi perdida como calor. ■

P.S. Outra maneira simples de obter o resultado, é lembrar que o momento linear é conservado e expressar a energia cinética em termos do momento. Seja este p.

$$K_i = \frac{p^2}{2m} \quad , \quad K_f = \frac{p^2}{2(m+M)}$$

Temos:

$$\frac{\Delta K}{K_i} = \frac{(\cancel{p^2}/2)}{(p^2/2)} \frac{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+M}\right)}{\frac{1}{m}} = 1 - \frac{m}{m+M}$$

$$= \frac{M}{m+M}$$

2. Dois corpos em campos eletromagnéticos

(a) Escrevemos as equações de movimento para as partículas:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = q_1 q_2 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} + q_1 \frac{\dot{\vec{r}}_1}{c} \times \vec{B} \,, \qquad (1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = q_1 q_2 \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} + q_2 \frac{\dot{\vec{r}}_2}{c} \times \vec{B} \,. \qquad (2)$$

Pesquisamos a eq. de movimento para a coordenada relativa

$$\vec{\rho} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Rightarrow \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{\rho} \qquad (3)$$

De (1) e (2) obtemos (mais (3)):

$$\ddot{\vec{\rho}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) q_1 q_2 \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} +$$

$$+ \frac{q_2}{m_2} \left(\frac{\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{\rho}}}{c}\right) \times \vec{B} - \frac{q_1}{m_1} \frac{\dot{\vec{r}}_1}{c} \times \vec{B}$$

Identificamos a 'massa reduzida' μ em

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \,,$$

assim, a eq. para a coordenada $\vec{\rho}$ é

$$\ddot{\vec{\rho}} = \frac{q_1 q_2}{\mu} \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} + \frac{q_2}{m_2} \frac{\dot{\vec{\rho}}}{c} \times \vec{B} + $$
$$+ \left(\frac{q_2}{m_2} - \frac{q_1}{m_1} \right) \frac{\dot{\vec{r}}_1}{c} \times \vec{B}$$

que resulta acoplada à coordenada $\vec{r}_1$. Assim, em geral, as eqs. de movimento estão acopladas. Podemos eliminar o termo em $\dot{\vec{r}}_1$ se a condição

$$\frac{q_1}{m_1} = \frac{q_2}{m_2} \quad \text{for satisfeita.}$$

Neste caso:

$$\ddot{\vec{\rho}} = \frac{q_1 q_2}{\mu} \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} + \left(\frac{q_2}{m_2} \right) \frac{\dot{\vec{\rho}}}{c} \times \vec{B}$$

a eq. para $\vec{\rho}$ fica desacoplada. Note que:

$$\frac{q_1}{m_1} = \frac{q_2}{m_2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \frac{q_1 + q_2}{q_2} = \frac{m_1 + m_2}{q_2}$$

Def.

$$M \equiv m_1 + m_2 \quad , \quad \text{massa total}$$
$$Q \equiv q_1 + q_2 \quad , \quad \text{carga total}$$

Obtemos que,

$$\frac{q_2}{m_2} = \frac{Q}{M}$$

e escrevemos a eq. para $\vec{\rho}$ como

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{\rho}} = q_1 q_2 \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} + \left(\frac{m_1 m_2}{M^2}\right) Q \frac{\dot{\vec{\rho}}}{c} \times \vec{B}}$$

(b) Analisamos agora a eq. para o CM:

$$M\vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$$

Temos:

$$M\ddot{\vec{R}} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{q_1}{m_1 c}\left(m_1 \dot{\vec{r}}_1 \times \vec{B}\right) + \frac{q_2}{m_2 c}\left(m_2 \dot{\vec{r}}_2 \times \vec{B}\right).$$

Mas mostramos em (a) que

$$\frac{q_1}{m_1} = \frac{q_2}{m_2} = \frac{Q}{M},$$

de forma que:

$$M\ddot{\vec{R}} = \frac{Q}{Mc}\left(M\dot{\vec{R}} \times \vec{B}\right) = \frac{Q}{c}\left(\dot{\vec{R}} \times \vec{B}\right).$$

Seja $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$, a velocidade do CM. Notamos que a eq. para $\vec{R}$ agora está desacoplada. Esta é:

$$M\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{Q}{c}\left(\vec{V} \times \vec{B}\right)$$

Para o caso particular $\vec{B} = B\hat{z}$, obtemos:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{QB}{Mc} V_y ,$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -\frac{QB}{Mc} V_x ,$$

$$\frac{dV_z}{dt} = 0 \Rightarrow V_z = cte.$$

As eqs. para (V_x, V_y) podem ser tratadas em conjunto, usando uma velocidade complexa:

$$V_\perp = V_x + i V_y$$

$$\frac{dV_\perp}{dt} = \dot{V}_x + i\dot{V}_y = \frac{QB}{MC} V_y - i\frac{QB}{MC} V_x$$

$$= -i\left(\frac{QB}{MC}\right)(V_x + i V_y) = -i\left(\frac{QB}{Mc}\right) V_\perp$$

<u>Def</u>. Freqüência de cilotron para o CM:

$$\Omega \equiv \frac{QB}{Mc}$$

A velocidade perpendicular satisfaz:

$$\frac{dV_\perp}{dt} = -i\Omega V_\perp$$

cujas soluções são:

$$V_\perp = A\, e^{-i\Omega t} = A_0\, e^{-i(\Omega t + \theta_0)}$$

Com parte real e imaginária dadas por:

$$V_x = A_0 \cos(\Omega t + \theta_0)$$

$$V_y = -A_0\, \mathrm{sen}(\Omega t + \theta_0)$$

e

$$V_z = V_z^{(0)} = \text{cte.}$$

■