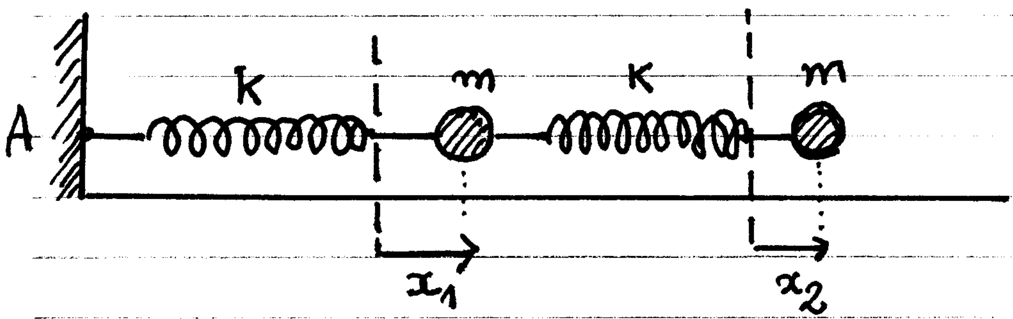
1. Sistema oscilatório de partículas



As linhas tracejadas indicam a posição de equilíbrio. As molas (k) e as massas (m) são idênticas.

(a) Equações de movimento:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2), \qquad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1). \qquad (2)$$

Note que somando as eqs. acima (para obter a eq. para o CM), as forças internas se cancelam:

$$F_{2\to 1} = -k(x_1 - x_2)\,;\; F_{1\to 2} = -k(x_2 - x_1).$$

Para $M\ddot{\vec{R}} = m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = -kx_1$, sobra apenas a força externa (da mola cujo extremo está fixo no ponto A).

(b) Procuramos as freqüências dos modos normais propondo soluções do tipo:

$$x_1(t) = C_1 e^{i\omega t} \quad , \quad x_2(t) = C_2 e^{i\omega t} \quad , \quad (*)$$

com $t_0 = 0$ para origem do tempo. Obtemos:

$$\ddot{x}_i = -\omega^2 C_i e^{i\omega t} .$$

<u>Def</u>. Freqüência do oscilador livre, ω_0^2

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m} \quad ,$$

de maneira que (1) e (2) ficam na forma:

$$\ddot{x}_1 = -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \; , \qquad (1')$$

$$\ddot{x}_2 = +\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 \; . \qquad (2')$$

Substituindo a solução (*) em (1') e (2') e eliminando o fator $e^{i\omega t}$ que aparece em todos os termos, obtemos:

$$-\omega^2 C_1 = -2\omega_0^2 C_1 + \omega_0^2 C_2 \; ,$$

$$-\omega^2 C_2 = -\omega_0^2 C_2 + \omega_0^2 C_1 \; .$$

que re-escrevemos como um sistema linear homogêneo:

$$\left.\begin{aligned} (2\omega_0^2-\omega^2)C_1 - \omega_0^2 C_2 &= 0 , \\ -\omega_0^2 C_1 + (\omega_0^2-\omega^2) C_2 &= 0 . \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}&(1'')\\&(2'')\end{aligned}$$

O sistema linear possui solução não trivial, quando é satisfeita a condição:

$$\left\| \begin{matrix} 2\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2-\omega^2 \end{matrix} \right\| = 0 = (2\omega_0^2-\omega^2)(\omega_0^2-\omega^2)-\omega_0^4 ,$$

onde $\|\cdots\|$ significa 'determinante'. A eq. secular fica na forma:

$$\omega^4 - 3\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0 ,$$

cujas soluções para ω^2 são:

$$\boxed{\omega_\pm^2 = \frac{\omega_0^2}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right) .}$$

Do formulário obtemos a raíz quadrada:

$$\sqrt{3 \pm \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} ,$$

obtendo:

$$\omega_\pm = \omega_0\left(\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}\right) = \begin{cases} 1.62\,\omega_0 , & + \\ 0.62\,\omega_0 , & - \end{cases}$$

com o resultado:

$$\omega_- < \omega_0 < \omega_+ \ . \qquad \blacksquare$$

(c) Descrição dos modos normais

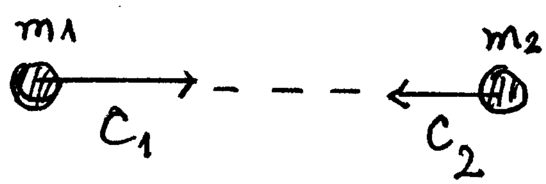
I. Substituímos ω_+^2 em ω^2 na eq. (1″)

$$\left[2\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2}(\sqrt{5}+3)\right] C_1 = \omega_0^2 C_2$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} C_1 = C_2$$

ou $$C_2 = -\,0.62\, C_1 \ .$$

Neste modo, os corpos oscilam em oposição de fase e a amplitude de m_2 é menor que a de m_1:



II. $\omega^2 = \omega_-^2$, substituímos ω^2 por ω_-^2 em (2″):

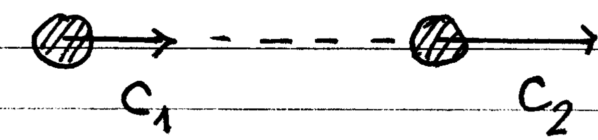
$$\omega_0^2 C_1 = (\omega_0^2 - \omega_-^2) C_2 = \left[\omega_0^2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\omega_0^2\right] C_2$$

$$= \omega_0^2 \ \frac{\sqrt{5}-1}{2} C_2$$

Resultado:

$$C_1 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) C_2 = 0.62\ C_2$$

Os corpos oscilam em fase, sendo a amplitude de x_1 menor que a de x_2:

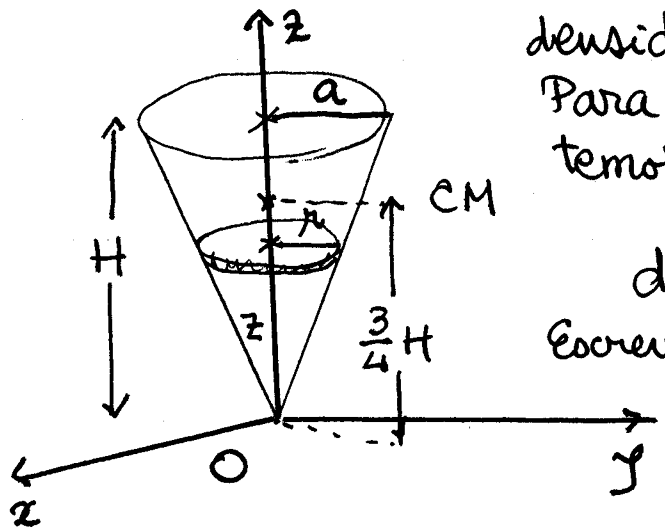


■

2. Centro de Massa de corpos sólidos

(a) Os teoremas usados referem-se a eixos de simetria e corpos compostos. Calculamos primeiro o CM do cone. Usamos coordenadas cilíndricas e integramos por fatias.

Coordenadas cilíndricas (r, φ, z), seja ρ a densidade.



Para a massa 'infinitesimal' temos:

$$dm = \rho \pi r^2 dz$$

Escrever 'r' em termos de 'z' para o cone

$$\frac{z}{H} = \frac{r}{a}$$

$$\Rightarrow r = \frac{a}{H} z \quad , \quad r^2 = \left(\frac{a}{H}\right)^2 z^2$$

As coordenadas (X, Y) do CM são nulas por causa da simetria: o CM se localiza no eixo 'z'. Basta só calcular a coordenada Z:

$$MZ = \int_{\text{cone}} dm\, z = \rho \pi \int_0^H dz \left(\frac{a}{H}\right)^2 z^3$$

$$= \rho \pi \left(\frac{a^2}{H^2}\right) \frac{1}{4} H^4 = \frac{\rho \pi}{4} a^2 H^2$$

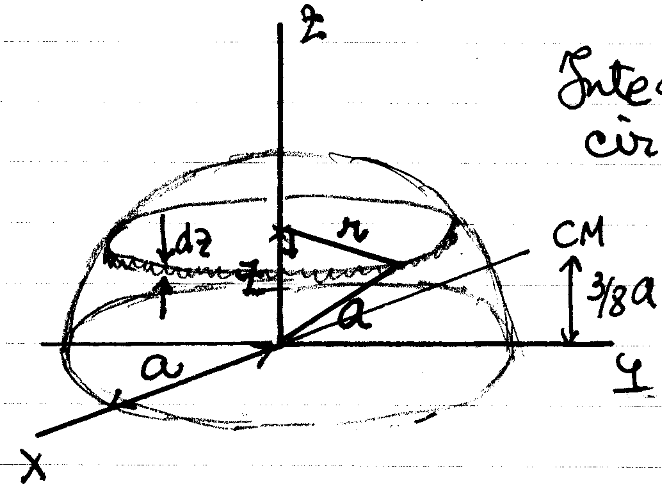
A massa do cone é $M = \rho \cdot \frac{1}{3}\pi a^2 H$

$$Z = \frac{\cancel{\rho} \frac{\cancel{\pi}}{4} \cancel{a^2} H^{\cancel{2}}}{\cancel{\rho} \frac{1}{3} \cancel{\pi} \cancel{a^2} \cancel{H}} = \frac{3}{4} H$$

Centro de massa:

$$\vec{R} = (0, 0, 3/4\, H)$$

(b) Calculamos o CM de uma semi-esfera de raio a. Usamos as mesmas coordenadas cilíndricas e integramos por fatias. A base da semi-esfera se localiza no plano (xy) ($z=0$).



Integramos somando discos circulares de massa:

$$dm = \rho \pi r^2 dz$$

Expressamos r^2 em termos da coordenada 'z':

$r^2 = a^2 - z^2$. Obtemos:

$$MZ = \rho\pi \int_0^a dz\; z(a^2 - z^2) = \rho\pi\left(\frac{1}{2}a^4 - \frac{1}{4}a^4\right)$$

$$= \rho\pi \frac{a^4}{4}$$

A massa da semiesfera é:

$$M = \rho \frac{2}{3}\pi a^3 .$$

Resulta:

$$z = \frac{\cancel{\rho\pi} a^{\cancel{4}}/4}{\cancel{\rho\pi}\frac{2}{3}\cancel{a^3}} = \frac{3}{8}a$$

(c) Calculamos o CM para o corpo composto. Usamos o resultado da semi-esfera e colocamos o cone na parte negativa do eixo 'z'. Sejam M_c e M_{SE} as massas respectivas.

$$M_c = \frac{1}{3}\pi\rho a^2 H \quad , \quad M_{SE} = \frac{2}{3}\pi\rho a^3$$

Seja $S \equiv \frac{1}{3}\pi\rho a^2$,

$$\Rightarrow M_c = SH \quad , \quad M_{SE} = 2aS$$

Colocar a base circular em $z = 0$:

$$\cancel{S}(H+2a)\, z_{CM} = \cancel{S}\left(2a\left(\frac{3}{8}a\right) + H\left(-\frac{1}{4}H\right)\right)$$

$$z_{CM} = \frac{1}{4}\left(\frac{3a^2 - H^2}{2a+H}\right)$$

Condição para que o CM esteja na base circular:

$$3a^2 - H_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_0 = a\sqrt{3}}$$

— o —

Deslocamento em z_0 do CM:

$$z_{CM} = \frac{2a\left(z_0 + \frac{3}{8}a\right) + H\left(z_0 - \frac{1}{4}H\right)}{2a + H}$$

i) $z_0 = H$, origem no vértice do cone

$$z_{CM} = \frac{2a\left(H + \frac{3}{8}a\right) + H\left(\frac{3}{4}H\right)}{2a+H}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{3a^2 + 3H^2 + 8aH}{2a+H}$$

ii) $z_0 = \frac{1}{4}H$, origem no CM do cone.

$$z_{CM} = \frac{2a\left(\frac{3}{8}a + \frac{1}{4}H\right)}{2a+H}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{3a^2 + 2aH}{2a+H}$$