é denominada *função de Green* para a Eq. (2.197). Em termos da função de Green,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t')F(t')\,dt'. \tag{2.212}$$

Se a força $F(t)$ é igual a zero para $t < t_0$, então a solução (2.210) será $x(t) = 0$ para $t < t_0$. Esta solução já estava ajustada às condições iniciais: o oscilador em repouso antes da aplicação da força. Para qualquer outra condição inicial, um transiente dado pela Eq. (2.133), com os valores apropriados de A e θ, deve ser somado à solução anterior. O valor da solução (2.210) é grande no estudo do comportamento transiente de sistemas mecânicos ou elétricos, quando submetidos à ação de um número variado de tipos de forças.

PROBLEMAS

1. a) A taxa máxima de consumo de combustível de um motor a jato ao desenvolver uma impulsão (força) é de $1{,}492 \times 10^4$ N. Sabendo-se que ele opera com impulsão máxima durante o levantamento de vôo, calcule a potência (em cavalos-vapor) gerada pelo motor do avião quando a velocidade do avião é 10 m/s, 50 m/s e 150 m/s (1 cavalo-vapor = 746 watts).

b) Um motor de pistões, ao alcançar sua taxa máxima de consumo de combustível, desenvolve uma potência constante de 500 HP. Calcule a força que ele aplica sobre o avião durante o levantamento de vôo, quando a velocidade é igual a 10 m/s, 50 m/s e 150 m/s.

2. Uma partícula de massa m está sujeita à ação de uma força F. Em $t = 0$, sua velocidade é igual a zero. Use o Teorema do Momento Linear para determinar a velocidade em qualquer tempo t posterior. Calcule a energia da partícula em qualquer tempo posterior, usando as Eqs. (2.7) e (2.8) e verifique se os resultados concordam.

3. Uma partícula de massa m está sujeita à ação de uma força dada pela Eq. (2.192). (Nessa equação, δt é um intervalo de tempo pequeno e fixo.) Determine o impulso total gerado pela força durante o tempo $-\infty < t < \infty$. Se sua velocidade inicial (em $t \to -\infty$) for v_0, qual a velocidade final (em $t \to \infty$)? Use o Teorema do Momento Linear.

4. Um próton de alta velocidade e carga elétrica e desloca-se a velocidade constante v_0 sobre uma linha reta próxima a um elétron de massa m e carga $-e$, inicialmente em repouso. O elétron encontra-se à distância a da trajetória do próton.

a) Suponha que o próton passe pelo elétron tão rapidamente que este não tenha tempo suficiente para deslocar-se a uma distância apreciável até que o próton esteja muito longe. Mostre que a componente de força em direção perpendicular à linha sobre a qual o próton se desloca é

$$F = \frac{e^2 a}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + v_0^2 t^2)^{3/2}}, \quad \text{(unidades MKS)}$$

onde $t = 0$, quando o próton alcança a distância de maior aproximação do elétron.

b) Calcule o impulso gerado por esta força.

c) Usando estes resultados, calcule (aproximadamente) o momento linear final e a energia cinética final do elétron.

e) Mostre que a condição para que a suposição original no item (a) seja válida é $(e^2/4\pi\epsilon_0) \ll \frac{1}{2}mv_0^2$.

5. Uma partícula de massa m em repouso em $t = 0$ está submetida à força $F(t) = F_0 \operatorname{sen}^2 \omega t$.

a) Esboce a forma que se deve esperar para $v(t)$ e $x(t)$, para vários períodos de oscilação da força.

b) Determine $v(t)$ e $x(t)$ e compare com o seu esboço anterior.

6. Uma partícula de massa m e velocidade inicial v_0 está sujeita a uma força $F(t)$ que começa em $t = 0$, como a mostrada na Fig. 2.9.

a) Faça um esboço mostrando $F(t)$ e a força esperada de $v(t)$ e $x(t)$.

b) Ache uma função simples $F(t)$ que tenha esta forma, e determine $x(t)$ e $v(t)$.

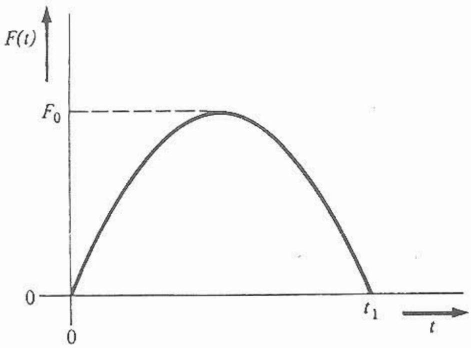

Fig. 2.9 Força apresentada no Probl. 6.

7. Uma partícula, cuja velocidade original seja v_0, está sujeita à força dada pela Eq. (2.191).

a) Determine $v(t)$ e $x(t)$.

b) Mostre que, quando $\delta t \to 0$, o movimento se aproxima de um movimento a velocidade constante que muda abruptamente sua velocidade em $t = t_0$ de uma quantidade de p_0/m. (δt é um intervalo de tempo fixo.)

8) Um microfone, constituído de um diafragma de massa m e área A, está suspenso de forma a poder mover-se livremente em direção perpendicular ao diafragma. Uma on-

da sonora causa um impacto sobre o diafragma fazendo com que a pressão em sua face frontal seja

$$p = p_0 + p' \operatorname{sen} \omega t.$$

Suponha que a pressão na face posterior permaneça constante e igual à pressão atmosférica p_0. Desprezando todas as outras forças, com exceção daquela devido à diferença de pressão através do diafragma, determine o seu movimento. Num microfone real existe uma força restauradora que age sobre o diafragma que o impede de se deslocar para muito longe. Como se desprezou esta força aqui, nada o impedirá de deslocar-se, sem parar, a velocidade constante. Evite esta dificuldade escolhendo a velocidade inicial de tal forma que o movimento seja puramente oscilatório. Se a voltagem de saída do microfone for proporcional à pressão do som p' e independente de ω, como deverá depender da amplitude e da freqüência do movimento do diafragma?

9. Um cabo-de-guerra é seguro por dois grupos de cinco homens, cada um. Cada homem pesa 70 kg e pode puxar o cabo inicialmente com uma força de 100 N. Inicialmente os dois grupos estão compensados, mas quando os homens cansam, a força com que cada um puxa o cabo decresce de acordo com a relação

$$F = (100\,\mathrm{N})e^{-t/\tau},$$

onde o tempo médio para atingir o cansaço é de 10 s para um grupo e 20 s para o outro. Determine o movimento. Suponha que nenhum dos homens solte o cabo ($g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^{-2}}$). Qual a velocidade final dos dois times? Qual das suposições é responsável por este resultado não razoável?

10. Uma partícula inicialmente em repouso está sujeita, começando em $t = 0$, a uma força

$$F = F_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \theta).$$

a) Determine o seu movimento.

b) Como a velocidade final depende de θ e de ω? [*Sugestão*. Os cálculos algébricos serão simplificados escrevendo-se $\cos(\omega t + \theta)$ em termos de funções exponenciais complexas.]

11. Um barco cuja velocidade inicial é v_0 é desacelerado por uma força de atrito

$$F = -be^{\alpha v}.$$

a) Determine o seu movimento.

b) Determine o tempo e a distância necessária para parar o barco.

12. Um barco é desacelerado por uma força $F(v)$. Sua velocidade decresce de acordo com a fórmula

$$v = C(t - t_1)^2,$$

onde C é uma constante e t_1 é o tempo que ele leva para parar. Determine a força $F(v)$.

13. Um motor a jato desenvolve uma impulsão constante máxima F_0, sendo usado para impulsionar um avião cuja força de atrito é proporcional ao quadrado da velocidade. Se o avião iniciar seu movimento em $t = 0$ a velocidade desprezível e acelerar com a impulsão máxima, determine a sua velocidade $v(t)$.

14. Suponha que o motor de um avião de massa m impulsionado a hélice fornece uma potência constante P à sua aceleração máxima. Determine a força $F(v)$. Desprezando o atrito, use o método discutido na Seç. 2.4 para determinar a velocidade e a posição do avião, quando ele é acelerado ao longo da pista, partindo do repouso em $t = 0$. Verifique os resultados obtidos para a velocidade, usando o teorema da energia. Em que aspectos as suposições usadas neste problema não são realistas em relação à Física? Em que aspectos as respostas mudariam se fossem adotadas suposições mais realistas?

15. O motor de um carro de corrida de massa m fornece uma potência constante P em sua aceleração máxima. Supondo que o atrito seja proporcional à velocidade, ache uma expressão para $v(t)$, quando o carro é acelerado, a partir do repouso, com a potência máxima. A sua solução comporta-se corretamente quando $t \to \infty$?

16. a) Um corpo de massa m desliza sobre uma superfície horizontal áspera. O coeficiente de atrito estático é μ_s e o coeficiente de atrito de deslizamento, μ. Determine uma função analítica, $F(v)$, para representar a força de atrito, que tenha o valor constante apropriado, em velocidades apreciáveis, e reduz-se ao valor estático em velocidades muito baixas.

b) Ache o movimento sob a ação da força que você determinou, no caso de o corpo partir com velocidade v_0.

17. Determine $v(t)$ e $x(t)$ para uma partícula de massa m que inicia o seu movimento em $x_0 = 0$ a velocidade v_0 e submetido à ação de uma força dada pela Eq. (2.31) com $n \neq 1$. Determine o tempo necessário para a partícula parar, a distância percorrida até parar, verificando os comentários apresentados no último parágrafo da Seç. 2.4.

18. Uma partícula de massa m está sujeita à ação de uma força

$$F = -kx + kx^3/a^2$$

onde k e a são constantes.

a) Determine $V(x)$ e discuta os possíveis tipos de movimento que possam ocorrer.

b) Mostre que se $E = \frac{1}{4} ka^2$, a integral na Eq. (2.46) pode ser resolvida por métodos elementares. Determine $x(t)$ para este caso, escolhendo x_0 e t_0 de maneira conveniente. Mostre que os seus resultados concordam com a discussão qualitativa do item (a) para esta energia.

19. Uma partícula de massa m é repelida da origem por uma força inversamente proporcional ao cubo de sua distância à origem. Escreva e resolva a equação do movimen-

to, considerando que a partícula está inicialmente em repouso a uma distância x_0 da origem.

20. Uma massa m está conectada à origem por meio de uma mola de constante k, cujo comprimento, quando relaxada, é igual a 1. A força restauradora é aproximadamente proporcional à distância em que a mola foi esticada ou comprimida, admitindo-se que não seja esticada ou comprimida demais. Entretanto, quando a mola é comprimida demais, a força cresce rapidamente, de tal forma que é impossível comprimi-la até um tamanho menor do que a metade do seu comprimento, quando em repouso. Quando a mola é esticada num tamanho maior do que duas vezes o seu comprimento, quando relaxada, ela começa a enfraquecer, e a força restauradora torna-se igual a zero quando esticada em comprimentos muito grandes.

a) Determine uma função força $F(x)$ que represente este comportamento. (Uma mola real deforma-se, se esticada demais, de tal maneira que F se torna função da sua história anterior, mas você deve supor que F depende somente de x.)

b) Determine $V(x)$ e descreva os movimentos que podem ocorrer.

21. Uma partícula de massa m acha-se sob a ação de uma força cuja energia potencial é

$$V = ax^2 - bx^3.$$

a) Determine a força.

b) A partícula parte da origem $x = 0$ com velocidade v_0. Mostre que, se $|v_0| < v_c$, onde v_c é uma certa velocidade crítica, a partícula permanecerá confinada à região próxima da origem. Determine v_c.

22. Uma partícula alfa de um núcleo acha-se presa por um potencial cuja forma é mostrada na Fig. 2.10.

a) Descreva os possíveis tipos de movimento.

b) Escreva uma função $V(x)$ que tenha esta forma geral e tenha os valores $-V_0$ e V_1 em $x = 0$ e $x = \pm x_1$, determinando a força correspondente.

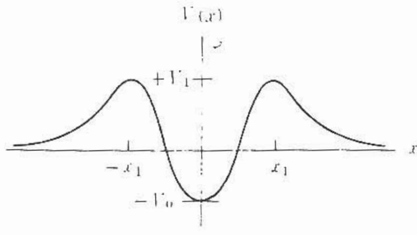

Fig. 2.10

23. Uma partícula está sujeita à ação da força

$$F = -kx + \frac{a}{x^3}.$$

a) Determine o potencial $V(x)$, descreva a natureza das soluções e determine a solução $x(t)$.

b) Você pode dar uma interpretação simples do movimento quando $E^2 \gg ka$?

24. Uma partícula de massa m está sujeita à ação de uma força dada por

$$F = B\left(\frac{a^2}{x^2} - \frac{28a^5}{x^5} + \frac{27a^8}{x^8}\right).$$

A partícula desloca-se somente ao longo do eixo dos x positivos.

a) Determine e esboce a energia potencial. (B e a são positivos.)

b) Descreva os tipos de movimento que podem ocorrer. Localize todas as posições de equilíbrio e determine a freqüência para pequenas oscilações, em torno de qualquer um dos pontos de equilíbrio estável.

c) Uma partícula inicia seu movimento em $x = 3a/2$ com uma velocidade $v = -v_0$, onde v_0 é positivo. Qual o menor valor de v_0 para o qual a partícula eventualmente pode escapar para uma distância muito grande? Descreva o movimento neste caso. Qual é a velocidade máxima que a partícula terá? Qual a sua velocidade em um ponto muito afastado do ponto de partida?

25. A energia potencial para a força existente entre dois átomos, numa molécula diatômica, tem a seguinte forma aproximada:

$$V(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}},$$

onde x é a distância entre os átomos e a e b são constantes positivas.

a) Determine a força.

b) Supondo-se que um dos átomos seja muito pesado e permaneça em repouso enquanto o outro se move ao longo de uma linha reta, descreva os movimentos possíveis.

c) Determine a distância de equilíbrio e o período para pequenas oscilações, em torno da posição de equilíbrio, se a massa do átomo mais leve for m.

26. Ache a solução para o movimento de um corpo sujeito à ação de uma força linear repulsiva $F = kx$. Mostre que este tipo de movimento é o esperado em torno de um ponto de equilíbrio instável.

27. Uma partícula de massa m move-se num poço de potencial dado por

$$V(x) = \frac{-V_0 a^2(a^2 + x^2)}{8a^4 + x^4}.$$

a) Esquematize $V(x)$ e $F(x)$.

b) Discuta os movimentos que podem ocorrer. Localize todos os pontos de equilíbrio e determine a freqüência para pequenas oscilações em torno de qualquer um dos pontos de equilíbrio estável.

c) Uma partícula inicia o seu movimento a uma grande distância do poço de potencial com velocidade v_0, em direção ao poço. Quando passa pelo ponto $x = a$, sofre uma colisão com outra partícula, durante a qual ela perde uma fração α de sua energia cinética. Qual deve ser o valor de α para que a partícula permaneça presa no poço após a colisão? Qual o valor de α para que a partícula seja aprisionada num dos lados do poço de potencial? Determine os pontos de retorno do novo movimento se $\alpha = 1$.

28. Resolva a Eq. (2.65) usando cada um dos três métodos discutidos nas Seçs. 2.3, 2.4 e 2.5.

29. Derive as soluções (2.74) e (2.75) para um corpo em queda livre sujeito à ação de uma força de atrito proporcional ao quadrado da velocidade.

30. Um corpo de massa m sai do repouso impulsionada por um meio que exerce sobre ele um atrito de arrastamento (força) $be^{\alpha|v|}$.

a) Determine sua velocidade $v(t)$.

b) Qual a velocidade terminal?

c) Expanda o resultado obtido, em série de potências de t, mantendo termos até t^2.

d) Por que a solução não concorda com a Eq. (1.28), mesmo no caso de pequenos intervalos de tempo t?

31. Um projetil é disparado verticalmente para cima com velocidade v_0. Determine seu movimento, admitindo a existência de um atrito de arrastamento proporcional ao quadrado da velocidade (g constante).

32. Derive equações análogas às Eqs. (2.85) e (2.86) para o movimento de um corpo cuja velocidade é maior do que a de escape. [*Sugestão*. Faça senh $\beta = (Ex/mMG)^{1/2}$.]

33. Determine o movimento de um corpo projetado da Terra, na vertical, a velocidade igual à velocidade de escape. Despreze a resistência do ar.

34. A partir da igualdade $e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2$, obtenha as fórmulas para sen2θ e cos2θ em termos de senθ e cosθ.

35. Escreva cosθ de acordo com a fórmula (2.122) e derive a seguinte relação

$$\cos^3\theta = \tfrac{1}{4}\cos 3\theta + \tfrac{3}{4}\cos\theta.$$

36. Determine as soluções gerais das equações

a) $m\ddot{x} + b\dot{x} - kx = 0$,

b) $m\ddot{x} - b\dot{x} + kx = 0$.