FI-144 Teoria de Grupos
Primeiro semestre 2018
Lista de Exercícios #1

Guillermo Cabrera
cabrera@ifi.unicamp.br

Data de entrega: 26 de março de 2018
(entregar somente os itens marcados com *)

1. **Subgrupo invariante**

   Seja G um grupo finito e S um subgrupo de G. O subgrupo S é dito *invariante* se e somente se
   $$x\ S\ x^{-1} = S\ ,$$
   para todo $x \in G$.

   (a) Mostre que para um subgrupo invariante, os cogrupos esquerdos são idênticos com os cogrupos direitos.

   (b) Demonstre que um subgrupo invariante é formado por classes conjugadas completas. ■

2. Mostre que todo grupo cuja ordem é um número primo é um grupo *cíclico* (e portanto abeliano). ■

3. *Usando o Teorema de Lagrange, encontre todas as estruturas possíveis de um grupo de ordem 6. ■

4. * **Grupo $\mathbf{C}_{4v}$** (grupo do quadrado)

   O grupo do quadrado, ilustrado em aula, corresponde ao grupo de ponto $\mathbf{C}_{4v}$ gerado por uma rotação C_4 e um plano vertical de reflexão σ_V. Trabalhe com cuidado os detalhes e guarde os resultados, porque eles serão usados em futuras aplicações.

   (a) Genere o grupo completo, use a notação dos grupos de ponto. Encontre h (ordem do grupo) e determine todos os subgrupos não triviais. Indique os subgrupos invariantes (ver item **1** da lista, explique).

(b) Com ajuda do diagrama estereográfico, obtenha a tabela de multiplicação. ■

5. **Grupo gerado por matrizes.**

   Encontre o grupo gerado pelas matrizes abaixo :

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

   (a) Mostre que este grupo é isomorfo a um grupo de ponto cristalino e determine o grupo. Construa seu diagrama de projeção estereográfica (este pode ser útil para obter a tabela de multiplicação).

   (b) Determine a tabela de multiplicação.

   (c) Determine todos os subgrupos não triviais.

   (d) Determine todas as classes de elementos conjugados segundo a relação

$$b = x \cdot a \cdot x^{-1}$$

   (e) Determine todos os subgrupos invariantes.

   (f) Determine todos os cogrupos esquerdos e direitos para todos os subgrupos não triviais.

   (g) Para o grupo de matrizes, encontre todos os caracteres de Dirac e mostre que as matrizes têm forma diagonal, sendo múltiplos da identidade.

   (h) Determine a tabela de multiplicação dos caracteres de Dirac e mostre que ela implica em autovalores mais gerais que os obtidos no ponto anterior. Determine todos os autovalores dos caracteres de Dirac. ■

6. * Mostre que elementos de uma classe conjugada têm a mesma ordem. ■

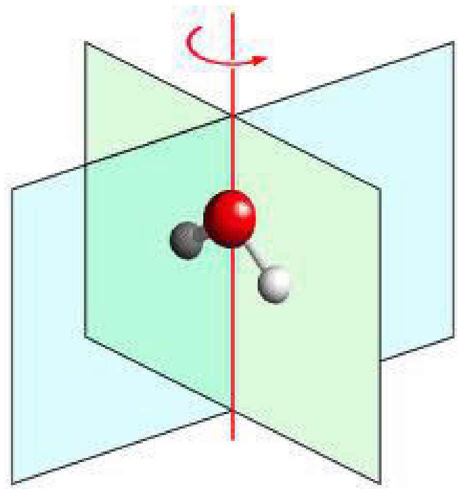
7. * Mostre que um grupo é Abeliano se, e somente se, a correspondência entre cada elemento e sua inversa é um isomorfismo. ■

8. Mostre que os grupos $\mathbf{S}_n$, quando n ímpar, são idênticos com os $\mathbf{C}_{nh}$. ■

9. Mostre que o grupo $\mathbf{D}_{1h}$ é idêntico com $\mathbf{C}_{2v}$. ■

10. * **Molécula de água.**

A figura anexa mostra um esquema da molécula de água e indica seus elementos de simetria:



(a) Determine o grupo de ponto que deixa a molécula invariante.

(b) Construa a sua tabela de multiplicação.

(c) A molécula de água é polar, com o oxigênio como centro da carga negativa da distribuição. Usando argumentos de simetria, indique a direção do vetor momento de dipolo. ■