

FI-004 Física Estatística I

Lista de Exercícios # 2

Guillermo Cabrera

Departamento de Física da Matéria Condensada
cabrera@ifi.unicamp.br

Agosto de 2016

1. Precessão de Larmor

O Hamiltoniano do spin de um elétron na presença de um campo magnético $\vec{B}$ é dado por:

$$\mathcal{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B},$$

onde $\vec{\mu} = -\left(\frac{|e|\hbar}{2mc}\right)\vec{\sigma}$ é o momento magnético do elétron. Use este Hamiltoniano para encontrar a equação da evolução (temporal) do operador estado ρ . Como ρ pode ser escrito em termos da polarização $\vec{M}$, encontre a equação de evolução para $\vec{M}$. Esta descreve a precessão de $\vec{M}$ com frequência ω_L (frequência de Larmor). Encontre ω_L . $\square$

2. Sistema de dois estados

Considere um sistema de dois estados onde o espaço de Hilbert é gerado pelos kets $(|1\rangle, |2\rangle)$. O Hamiltoniano do sistema acopla ambos estados, na forma:

$$\mathcal{H} = V_0 (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|),$$

onde, para fixar idéias, supomos $V_0 > 0$. Mostre que um estado arbitrário, preparado inicialmente como

$$|\psi(0)\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle,$$

é **reconstruído perfeitamente** no tempo de forma periódica. Encontre o período do movimento (período de Rabi). Este fenômeno é chamado de *recorrência quântica*. Discuta qualitativamente a situação, quando o número de graus de liberdade (dimensão do espaço de Hilbert) aumenta. $\square$

3. Equação de Liouville-von Neumann

O problema de spin 1/2 com campo magnético na direção transversa pode ser resolvido em forma exata para a equação de Liouville-von Neumann (LvN). Considere então a condição inicial de uma matriz densidade diagonal:

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix},$$

com $a > 0$. O Hamiltoniano tem a forma

$$\mathcal{H} = \mu_B B \sigma_x = \mu_B B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Integre a equação LvN em forma fechada. Interprete e discuta o resultado. $\square$

4. Entropia de informação (Shannon) versus Entropia de von Neumann

Seja um sistema caracterizado pelo operador densidade seguinte

$$\rho = w_1 |\alpha_1\rangle \langle \alpha_1| + w_2 |\alpha_2\rangle \langle \alpha_2|,$$

onde os estados ($|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle$) não são necessariamente ortogonais. Definimos a superposição dos estados como:

$$\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle \equiv m.$$

Compare as entropias de mistura de Shannon e de von Neumann. Mostre que elas coincidem quando $m = 0$. $\square$

5. A Entropia como uma grandeza extensiva

Considere um sistema composto de duas partes *independentes*, de maneira que os observáveis relativos aos subsistemas comutam entre si. Os estados do sistema completo podem ser escritos na forma de produtos (tensoriais) entre estados das partes:

$$|n_1 n_2\rangle = |n_1\rangle |n_2\rangle,$$

onde $\{n_1\}$ e $\{n_2\}$ referem-se a conjuntos de números quânticos para os subsistemas. O operador densidade, no caso geral, se expressa por

$$\rho = \sum_{n_1, n_2} |n_1 n_2\rangle w(n_1, n_2) \langle n_1 n_2|,$$

com os pesos $w(n_1, n_2)$ satisfazendo a condição de normalização

$$\sum_{n_1, n_2} w(n_1, n_2) = 1.$$

A independência estatística entre os sistemas implica na propriedade

$$w(n_1, n_2) = w(n_1)w(n_2).$$

Mostre que o operador densidade pode também ser escrito como um produto

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$$

e que a entropia de von Neumann $S = -k_B \text{Tr}(\rho \ln \rho)$ é aditiva, isto é

$$S = -k_B \text{Tr}(\rho \ln \rho) = -k_B \text{Tr}_1(\rho_1 \ln \rho_1) - k_B \text{Tr}_2(\rho_2 \ln \rho_2) = S_1 + S_2 ,$$

onde o subíndice no traço refere-se a tomar o traço sobre as variáveis do subsistema. $\square$

6. Entropia para spin 1/2

Sabemos que o operador densidade, para spin 1/2, tem a forma geral:

$$\rho = \frac{1}{2} (\mathbf{1} + m_x \sigma_x + m_y \sigma_y + m_z \sigma_z) , \quad (1)$$

onde as $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ são as matrizes de Pauli e o vetor $\vec{m} = (m_x, m_y, m_z)$ é a polarização. Calcule a entropia de von Neumann associada a ρ em função da polarização $\vec{m}$. Explique seu resultado com um gráfico. $\square$

7. Entropias de mistura

Sejam dois estados ortonormais $|\varphi_1\rangle$ e $|\varphi_2\rangle$ e considere ainda outro estado normalizado que é uma superposição linear dos dois:

$$|\varphi_3\rangle = c_1 |\varphi_1\rangle + c_2 |\varphi_2\rangle ,$$

com coeficientes lineares (c_1, c_2) . Considere o ensemble misto dado por:

$$\rho = p |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + p |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| + (1 - 2p) |\varphi_3\rangle\langle\varphi_3| ,$$

com $0 \leq p \leq 1/2$. Calcule as entropias de informação e de von Neumann e discuta como elas dependem dos coeficientes (c_1, c_2) . Faça um gráfico em função de p mostrando que a entropia de informação é sempre maior ou igual que a entropia de von Neumann. Encontre os valores máximos das entropias. $\square$

8. Equação de Bloch

Considere um operador densidade não normalizado função de um parâmetro $\beta > 0$:

$$\rho = \exp(-\beta H) ,$$

onde H é o Hamiltoniano e a constante de normalização é dada por

$$Z = \text{Tr} [\exp(-\beta H)] = \text{Tr} \rho .$$

Mostre que ρ satisfaz a equação abaixo, chamada Equação de Bloch:

$$\frac{\partial \rho(\beta)}{\partial \beta} = -H \rho(\beta) , \quad (2)$$

com a condição ‘inicial’

$$\rho(0) = 1 . \quad (3)$$

Essa condição significa que para $\beta \rightarrow 0$, obtemos o ensemble de ‘mistura máxima’. Usando um conjunto completo de estados $\{|n\rangle\}$ que diagonaliza o Hamiltoniano, encontre também o limite de $\beta \rightarrow \infty$. Para *1-dim*, represente o operador estatístico na representação de coordenadas e mostre que para a partícula livre, a equação (2) é um tipo de equação de difusão, identificando β com a variável temporal. Essa equação pode ser resolvida, por exemplo, usando a Transformada de Laplace e a condição (3). Mostre que os elementos não-diagonais $\langle x|\rho(\beta)|x'\rangle$ da Matriz Densidade mantém a coerência quântica sobre distâncias da ordem de

$$\Lambda = \left(\frac{h^2 \beta}{2\pi m} \right)^{1/2} .$$

Interprete o resultado desde o ponto de vista físico e finalmente encontre Z . $\square$

9. Oscilador Harmônico: Volume no Espaço de Fase

Considere um oscilador harmônico (clássico) de frequência angular ω (1 – dim). Encontre no espaço de fase a forma das ‘superfícies’ de energia constante igual a E . Encontre o ‘volume’ $\Omega(E)$ da região do espaço de fase com energia menor ou igual a E . Uma vez quantizado o sistema, encontre o número de estados quânticos $\Sigma(E)$ com energia menor ou igual a E . Mostre que se a energia é grande obtemos

$$\Sigma(E) \approx \Omega(E)/h ,$$

onde h é a constante de Planck. $\square$