FI-004 Física Estatística I
Lista de Exercícios # 3

Guillermo Cabrera
Departamento de Física da Matéria Condensada
cabrera@ifi.unicamp.br

Setembro de 2016

1. **Sistema de partículas dentro de uma caixa**

   Considere uma partícula livre dentro de uma caixa com paredes perfeitamente refletoras (condições livres de contorno). Encontre o número de estados quânticos $\Sigma(E)$, considerando a geometria de um cubo de lado L. Compare seu resultado com o correspondente volume do espaço de fase clássico. Obtenha também a densidade de estados $D(E)$. Compare com o caso de condições períodicas de contorno.

   Nota. Neste problema, $\Sigma(E)$ é o número de estados com energia $E_n < E$ e $D(E)$ é a derivada de $\Sigma(E)$ em relação à energia. $\square$

2. **Gás ideal no ensemble microcanônico**

   Considere o modelo de partícula livre para descrever un gás ideal de N partículas. Para a distribuição microcanônica, o problema se reduz a uma contagem dos estados acessíveis, através do cálculo da densidade de estados (caso quântico). O Hamiltoniano do sistema de N partículas não interagentes é dado por:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\overrightarrow{\mathbf{p}}^2}{2m} \,,$$

   com $3N$ graus de liberdade. Para o ensemble microcanônico, precisamos calcular o número de estados $\Gamma(E)$ entre uma hipersuperfície de energia E e outra de energia $E + \delta E$, no espaço de momentum. Para facilitar seu cálculo, suponha que as partículas livres estão dentro de uma caixa de volume V e assuma condições periódicas de contorno. Mostre, que no limite termodinâmico, a entropia não depende de δE e que obteríamos o mesmo resultado, calculando $\Sigma(E)$.

   Formulário:

Seja $\Omega_n(R)$ o volume de uma hiperesfera de dim n e raio R. A superfície $S_n(R)$ da esfera é obtida por derivação

$$S_n(R) = \frac{\partial}{\partial R}\Omega_n(R) \; .$$

Use o resultado conhecido de

$$\Omega_n(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \; ,$$

onde $\Gamma(x)$ é a função *Gamma* de Euler. □

3. **Sistema de N spins 1/2 independentes**

   Considere um sistema de N spins 1/2 não interagentes na presença de um campo magnético, onde o Hamiltoniano é dado por

   $$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\sigma}_z^{(i)} \; ,$$

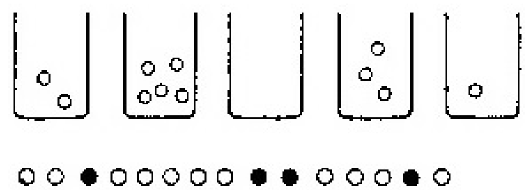
   com ω sendo a frequência de Larmor e $\boldsymbol{\sigma}_z^{(i)}$ o operador de Pauli do $i-$ésimo spin. Encontre a entropia S como função da energia E no limite de N muito grande. Encontre o valor máximo da entropia e o correspondente valor da energia. Interprete. Que acontece para estados de energia positiva? □

4. **Sistema de N osciladores clássicos.**

   Para um sistema de N osciladores clássicos, encontre o número de estados $\Sigma(E)$ para uma dada energia E. Use o resultado de um problema da lista anterior, para energias 'grandes'. Obtenha também a densidade de estados $D(E)$ e o número $\Gamma(E)$ de estados no intervalo $[E, E+\delta E]$, no mesmo regime, isto é quando E é muito grande. Derive a equação de estado para a energia, isto é uma relação entre a energia e a temperatura no caso clássico. Compare com o problema #5 do caso quântico e mostre que os resultados concordam no limite termodinâmico, para $E \gg \hbar\omega$. □

5. **Osciladores Harmônico Idênticos**

   Considere um sistema de N osciladores harmônicos idênticos ($1-$dim e não interagentes) de freqüência angular ω e energia total E. Calcule a entropia, a energia interna e a equação de estado para a temperatura. Para calcular o número de estados $\Gamma(E)$ para uma dada energia total, considere a figura abaixo, onde as caixas representam osciladores, as bolinhas brancas os quanta de energia e as bolinhas pretas, as paredes que separam as caixas. Essas paredes são necessárias, porque um dado oscilador poderia estar no estado fundamental, com zero quanta, como no caso da caixa 3 da figura. Uma dada configuração do sistema pode ser representada por uma cadeia linear de bolinhas brancas e pretas alternadas, seria bbpbbbbbppbbbpb... na figura, b para bolinha (branca) e p para parede (bolinha preta). Considere uma particular configuração com M quanta, distribuídos em N osciladores. O número de paredes é $(N-1)$.



□

6. **Problema de dois estados generalizado**

   Um sistema pode estar em dois estados quânticos de energia 0 e ϵ. As degenerescências dos estados são respectivamente g_1 e g_2. Encontre a entropia S como função da energia E no limite do número de partículas N muito grande. Analise essa dependência e mostre que existe uma região de 'temperatura negativa'. Discuta e interprete esse fato relacionando com propriedades do espectro de energia. □