FI-002 Mecânica Quântica II
Lista # 4

Prof. G. Cabrera
cabrera@ifi.unicamp.br

junho/julho de 2020

1. **Espalhamento por uma Esfera Dura**

   Consideramos duas partículas que interagem através de um potencial central fortemente repulsivo de amplitude $V_0 > 0$ e de alcance R :

$$V(r) = \begin{cases} V_0, \text{ para } r < R \\ \\ 0, \text{ para } r > R \end{cases} .$$

   (a) Calcule a amplitude de espalhamento $f(\vec{k}, \vec{k}')$ dentro da primeira aproximação de Born. Determine a seção eficaz diferencial de choque $\sigma(\theta, \varphi)$ e a seção de choque total σ_T. Lembre que para espalhamento elástico temos $\left|\vec{k}\right| = \left|\vec{k}'\right|$ e use a transferência de momentum $q = \left|\vec{k} - \vec{k}'\right|$ como variável de integração para a parte angular, com

$$q = 2k \sin\frac{\theta}{2} ,$$

   onde θ é o ângulo de espalhamento. Encontre as expressões de σ_T nos limites da baixas e altas energias.

   Mostre que f, e também a seção eficaz $\sigma(\theta, \varphi)$, divergem no limite de esfera dura $V_0 \to \infty$. Explique com argumentos qualitativos por quê a aproximação é falha.

   (b) Sabemos que $f(\vec{k}, \vec{k}')$ deve ser finita. Calcule agora $f(\vec{k}, \vec{k}')$ usando o método dos deslocamentos de fase para o caso $V_0 \to \infty$, e mostre que sempre temos um resultado finito. Encontre a seção eficaz no limite de baixas energias $kR \ll 1$. Calcule as contribuições de onda-s ($l = 0$) e de onda-p ($l = 1$). A contribuição adicional da onda-p, decresce ou aumenta a seção eficaz total?

   (c) Usando a equação de Lippmann-Schwinger, explique porque a primeira aproximação de Born é falha, ou mais geralmente, porque a série perturbativa não converge ou converge lentamente.

(d) Usando o fato que a função de onda não perturbada é uma onda plana $e^{i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{x}}$, escreva a equação de Lippmann-Schwinger no espaço $\overrightarrow{k}$ para

$$\phi^{(+)}_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{k'}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x \; e^{-i\overrightarrow{k'}\cdot\overrightarrow{x}} \; \psi^{(+)}_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x})$$

Definition 1 Amplitude modificada de espalhamento.

É definida por

$$\boxed{\tilde{\mathrm{f}}(\overrightarrow{k},\overrightarrow{k'}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3\mathrm{q} \; \mathrm{V}(\overrightarrow{q}) \; \phi^{(+)}_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{k'}\text{-}\overrightarrow{q}) \; .}$$

Encontre a equação integral satisfeita por $\tilde{f}(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k'})$.

(e) O modelo de esfera dura é bastante usado na teoria de bósons interagentes, no estudo de condensados de Bose-Einstein. Usualmente, o potencial de esfera dura é simulado por um potencial de contato (*pseudo-potencial*):

$$V(\vec{\mathbf{x}}) = A \; \boldsymbol{\delta}^{(3)}(\vec{\mathbf{x}}) \; , \tag{1}$$

onde A é uma constante. Ajuste a constante A, de maneira que a amplitude de espalhamento de (1), dentro da primeira aproximação de Born, coincida com a amplitude de onda-s para o método de ondas esféricas.

(f) Por quê a primeira aproximação de Born é válida no caso desse potencial (1)? ■

2. **Livro do Sakurai**

Resolva todos os problemas do Cap. 7 do livro do Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, edição revisada (1994), anexada nesta lista. ■

3. **Quantização do Átomo de Hidrogênio** *a la* **Bohr-Sommerfeld (**este problema é introdutório para a compreensão do Problema 12 do Cap.7, do Sakurai)

Na resolução deste problema, você pode seguir o livro de Goldstein (*Classical Mechanics*, segunda edição). O objetivo é ter uma imagem clara do conceito de degenerescência no caso clássico. Sabemos que o problema do átomo de hidrogênio tem uma simetria maior que a simetria de rotação em três dimensões (conservação do vetor de Runge-Lenz). Na velha Teoria Quântica, ressolvemos a equação de Hamilton-Jacobi usando as variáveis de *Ação* como momentos generalizados. A receita para quantizar é dada em termos destas variáveis (lembre que a constante fundamental $\hbar$ tem dimensão de ação). Definimos as variáveis de Ação como:

$$J_i = \oint \; p_i \; dq_i \; , \tag{2}$$

onde assumimos que o movimento é periódico e a integral é feita sobre o período. Distinguimos dois tipos de movimento periódico, o de *libração* (vibração) e o de *rotação*.

A quantização de Bohr-Sommerfeld é feita (somente para movimento periódicos) segundo:

$$\begin{array}{l} J_i = 2\pi(n_i + 1/2)\hbar, \text{ para libração, com } n_i = 0, 1, 2, ... \\ J_i = 2\pi n_i \hbar, \text{ para rotação, com } n_i = 0, 1, 2, ... \end{array} ,$$

o que resulta em uma quantização da energia, pois o Hamiltoniano é escrito no esquema de Hamilton-Jacobi como uma função das variáveis de ação:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(J_1, J_2, ...).$$

Dito de outra maneira, resolver a equação de Hamilton-Jacobi é equivalente a encontrar a função geratriz W de uma transformação canônica onde todas as coordenadas são *ignoráveis* e a energia depende apenas dos momentos generalizados $(J_1, J_2, ...)$ definidos através de (2). As correspondentes coordenadas canônicas $(w_1, w_2, ...)$, chamadas de *variáveis angulares*, são obtidas da maneira corrente:

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}(J_1, J_2, ...),$$

sendo que as freqüências do movimento são obtidas através das equações de Hamilton:

$$\dot{w}_i = \nu_i(J_1, J_2, ...) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i}(J_1, J_2, ...).$$

No caso do átomo de hidrogênio, poderemos verificar que todas as freqüências associadas com a órbita de um estado ligado são iguais, e portanto a órbita é **fechada**. *Esta é a maneira de caraterizar a Degenerescência do problema do átomo de hidrogênio.* Ressolva então a equação de Hamilton-Jacobi para este problema. Discuta qual seria a degenerescência *normal* associada apenas com a simetria de rotação. Encontre a energia em função das variáveis de Ação e quantize. Discuta o resultado final. ■

4. **Álgebra de quaternions em Relatividade Especial**

Seja $x^\mu = (ct, \overrightarrow{\mathbf{x}})$ o quadrivetor que representa as coordenadas de um evento no espaço-tempo. Associamos a ele a matriz hermitiana seguinte:

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{X}^\dagger(x) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} ,$$

onde resulta que

$$\det[\mathbf{X}(x)] = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^2 .$$

(a) Mostre que uma transformação $\mathbf{W}$,

$$\mathbf{X}' = \mathbf{W} \circ \mathbf{X} \circ \mathbf{W}^\dagger ,$$

tal que

$$\det[\mathbf{W}] = 1 ,$$

representa uma transformação de Lorentz própria $({\Lambda^0}_0 > 0)$;

(b) Em particular, discuta as transformações abaixo

i.

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{com } \det[\mathbf{W}_1] = 1 \ ,$$

e (α, β) reais;

ii.

$$\mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \qquad \text{com } \det[\mathbf{W}_2] = 1 \ .$$

■

5. **Operadores de projeção**

Considere as seguintes matrizes

$$\mathbf{P}_{\pm} \equiv \frac{\mathbf{I} \pm \boldsymbol{\beta}}{2} \ .$$

(a) Escreva as matrizes na representação usual da álgebra de Dirac e mostre que elas são operadores de projeção. Mostre que esta propriedade é válida para qualquer representação da álgebra;

(b) Encontre as equações de autovalores de estes operadores (muito fácil!). Que interpretação física você sugere para eles? ■

6. **Momentum Angular na teoria de Dirac**

As relações de comutação entre as componentes do momentum angular orbital $\overrightarrow{\mathbf{L}}$ e o momentum linear $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ são um resultado fundamental da Mecânica Quântica. Lembremos que temos

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{p}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\mathbf{p}_k \ .$$

(a) Mostre que o momentum angular orbital $\overrightarrow{\mathbf{L}}$ de uma partícula livre de Dirac **não** é uma constante de movimento !

(b) Definamos o operador vetorial

$$\overrightarrow{\mathbf{\Sigma}} \equiv \mathbf{I}_{2\times 2} \otimes \overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}} \ ,$$

onde $\mathbf{I}_{2\times 2}$ é a matriz identidade (2×2) e $\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}$ a matriz de Pauli. Mostre que também $\overrightarrow{\mathbf{\Sigma}}$ **não** é uma constante do movimento livre;

(c) Das relações de comutação acima, observe que

$$\overrightarrow{\mathbf{J}} \equiv \overrightarrow{\mathbf{L}} + \frac{\hbar}{2}\overrightarrow{\mathbf{\Sigma}}$$

sim é uma constante do movimento livre e interprete fisicamente este resultado;

(d) A interpretação acima pode ser facilitada pelas seguintes relações, que são de fácil demonstração

$$\vec{\mathbf{\Sigma}} \times \vec{\mathbf{\Sigma}} = 2i \vec{\mathbf{\Sigma}} \ ,$$

$$\vec{\mathbf{J}} \times \vec{\mathbf{J}} = i\hbar \vec{\mathbf{J}} \ .$$

Diga agora se você poderia afirmar que uma partícula de Dirac tem spin 1/2;

(e) Finalmente, demonstre que a componente do momentum linear $\vec{\mathbf{p}}$ na direção do spin $\vec{\mathbf{\Sigma}}$, isto é o operador $\left(\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{\Sigma}}\right)$, assim como $\left(\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{L}}\right)$, são separadamente constantes do movimento livre. O operador

$$\frac{\left(\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{\Sigma}}\right)}{|\vec{\mathbf{p}}|}$$

é chamado de *Helicidade*. ■

7. **A Paridade dos spinores:** P

Construa o operador Paridade P na Teoria de Dirac. A Paridade está associada à simetria por inversão espacial, onde temos a transformação

$$t' = t, \qquad \vec{\mathbf{x}'} = -\vec{\mathbf{x}} \ . \tag{3}$$

(a) Mostre que para termos invariância por (3), os campos eletromagnéticos devem transformar como

$$\vec{\mathbf{A}}'(\vec{\mathbf{x}'}, t') = -\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{x}}, t), \quad A_0'(\vec{\mathbf{x}'}, t') = A_0(\vec{\mathbf{x}}, t) \ .$$

Dessa forma, a dinâmica de uma partícula carregada no sistema invertido é a mesma que no sistema original (analise a força de Lorentz para a partícula);

(b) Proceda de maneira semelhante a como feito em aula para construir o operador conjugação da carga. Encontre como deveriam transformar as matrizes γ^μ para termos covariância da equação de Dirac por inversão espacial. Encontre as soluções do problema, isto é escreva P em termos das γ^μ. Note que sempre existe um fator de fase indeterminado. Quais os autovalores possíveis? Construa estados de paridade definida e diga como isto se reflete na representação bi-spinorial

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ -- \\ \chi \end{pmatrix} \ .$$

Em particular, considere o caso quando φ e χ são autoestados do momentum angular orbital.

(c) Considere agora o caso de soluções livres para energia positiva e negativa, com $\vec{\mathbf{p}} = 0$ (em repouso). Quais são as paridades desses estados?

(d) Voltemos agora para o problema de um potencial central $eA_0 = V(r)$, com $\overrightarrow{\mathbf{A}} = 0$. Mostre que a equação de Dirac pode ser escrita como

$$\chi = \frac{c}{E - V(r) + mc^2} \; (\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{p}})\, \varphi \; .$$

Assuma agora que φ representa um orbital s de spin para cima da forma

$$\varphi = R(r) \; \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; .$$

Mostre que χ representa uma onda cuja parte angular corresponde a um estado p, com $j = 1/2$. Construa explicitamente a parte orbital em termos de Harmônicos Esféricos e mostre que φ e χ têm paridades diferentes. ■

8. **Constantes do movimento na versão de Heisenberg**

Considere o caso livre como no Problema 6, com Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = c\,(\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{p}}) + mc^2 \boldsymbol{\beta} \; .$$

Encontre as equações do movimento para a posição $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ e a velocidade $\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{\mathbf{x}}$ e mostre que o operador velocidade não é conservado (!!). Isto contrasta com o operador momentum $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ que **sim** é uma constante do movimento junto com o Hamiltoniano $\mathcal{H}$. Integre formalmente a equação para a posição e interprete todos os termos que aparecem. ■

9. **Zitterbewegung**

Considere o caso mais geral de um pacote de ondas para a partícula livre , com ondas planas de energia positiva e negativa, da forma:

$$\begin{aligned} \psi(\overrightarrow{\mathbf{x}}, t) \;\; = \;\; & \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{mc^2}{|E|\, V}} \; C(\mathbf{p},\alpha) \; u^{(\alpha)}(\mathbf{p}) \; \exp\left(\frac{i\,\overrightarrow{\mathbf{p}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}}}{\hbar} - \frac{i\,|E|\,t}{\hbar}\right) + \\ & + \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{mc^2}{|E|\, V}} \; D(\mathbf{p},\alpha) \; v^{(\alpha)}(\mathbf{p}) \; \exp\left(\frac{i\,\overrightarrow{\mathbf{p}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}}}{\hbar} + \frac{i\,|E|\,t}{\hbar}\right) \; . \end{aligned} \qquad (4)$$

Encontre a valor médio do operador velocidade $c\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}}$ para o pacote (4) acima e interprete o resultado. Integre em relação ao tempo para obter a média $\langle x_k \rangle$ da posição. Identifique os termos do Zitterbewegung e estime a freqüência do movimento. ■

10. **Covariância da equação de Dirac por uma transformação de Lorentz** (Ref.: *Relativistic Quantum Mechanics*, de Bjorken e Drell)

O símbolo $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$ (*delta slash*), é invariante de Lorentz apesar que as matrizes γ^μ não formam um quadrivetor. O objetivo deste exercício é encontrar a transformação S no espaço dos spinores induzida por uma transformação de Lorentz (TL) e obter a condição para a covariância da equação de Dirac.

(a) Considere para isso uma transformação de Lorentz genérica escrita na forma

$$x'^{\ \mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\overrightarrow{\mathbf{v}})\ x^{\nu}\ , \tag{5}$$

onde

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\overrightarrow{\mathbf{v}}) \cdot \Lambda^{\nu}{}_{\lambda}(\overrightarrow{-\mathbf{v}}) = \delta^{\mu}_{\lambda}\ ,$$

porque $\Lambda(\overrightarrow{-\mathbf{v}})$ é a inversa de $\Lambda(\overrightarrow{\mathbf{v}})$. Note que ∂_μ é um quadrivetor covariante, de maneira que ele transforma como

$$\partial'_{\mu} = \Lambda^{\sigma}{}_{\mu}(\overrightarrow{-\mathbf{v}})\ \partial_{\sigma}\ . \tag{6}$$

Veja a diferença entre (5) e (6). Seja $S(\Lambda)$ a transformação no espaço dos spinores:

$$\psi' = S(\Lambda)\ \psi\ ,$$

onde ψ' é a função de onda no sistema $\{x'\}$. Encontre a condição sobre as matrizes $\{\gamma^\mu\}$ para termos covariância de Lorentz.

Resposta:

$$S(\Lambda)^{-1} \cdot \gamma^{\mu} \cdot S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\sigma}(\overrightarrow{\mathbf{v}}) \cdot \gamma^{\sigma}\ . \tag{7}$$

(b) Considere agora a TL particular (*boost* na direção x):

$$\begin{aligned} x'^{\ 0} &= x^0\ \cosh\omega - x^1\ \sinh\omega, \\ x'^{\ 1} &= x^1\ \cosh\omega - x^0\ \sinh\omega, \\ x'^{\ 2} &= x^2, \\ x'^{\ 3} &= x^3, \end{aligned}$$

onde $\tanh\omega = |\overrightarrow{\mathbf{v}}|/c$. Construa primeiro, a transformação infinitesimal com $\omega \ll 1$ e depois a transformação finita $S(\Lambda)$. Verifique as relações (7). □

11. **Átomo de hidrogênio**

Resolva explicitamente, para estados ligados, as equações para a parte radial da equação de Dirac com um potencial de Coulomb (com a notação da Aula 5.4 em https://www.ifi.unicamp.br/~cabrera/teaching/aulas2019/aula%205.4%202019s1.pdf):

$$\left(E - mc^2 + \frac{Ze^2}{r}\right) G = \hbar c \left(-\frac{dF}{dr} + \frac{\kappa}{r} F\right)\ ,$$

$$\left(E + mc^2 + \frac{Ze^2}{r}\right) F = \hbar c \left(\frac{dG}{dr} + \frac{\kappa}{r} G\right)\ ,$$

onde $\kappa = \pm(j + 1/2)$. Primeiro estime o comportamento assintótico para $r \to \infty$. Depois exija que o comportamento em $r = 0$ seja regular e escreva as soluções para F e G como séries de potências. Mostre que para satisfazer a condição de contorno, as séries têm que ser finitas. Esta condição determina a quantização da energia. Obtenha todos os autovalores para o caso ligado. ■

PROBLEMS

1. The Lippmann-Schwinger formalism can also be applied to a *one-dimensional* transmission-reflection problem with a finite-range potential, $V(x) \neq 0$ for $0 < |x| < a$ only.
   a. Suppose we have an incident wave coming from the left: $\langle x|\phi\rangle = e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$. How must we handle the singular $1/(E - H_0)$ operator if we are to have a transmitted wave only for $x > a$ and a reflected wave and the original wave for $x < -a$? Is the $E \to E + i\varepsilon$ prescription still correct? Obtain an expression for the appropriate Green's function and write an integral equation for $\langle x|\psi^{(+)}\rangle$.
   b. Consider the special case of an attractive δ-function potential
   $$V = -\left(\frac{\gamma \hbar^2}{2m}\right)\delta(x) \quad (\gamma > 0).$$
   Solve the integral equation to obtain the transmission and reflection amplitudes. Check your results with Gottfried 1966, 52.
   c. The one-dimensional δ-function potential with $\gamma > 0$ admits one (and only one) bound state for any value of γ. Show that the transmission and reflection amplitudes you computed have bound-state poles at the expected positions when k is regarded as a complex variable.
2. Prove
   $$\sigma_{\text{tot}} \simeq \frac{m^2}{\pi \hbar^4}\int d^3x \int d^3x' V(r)V(r')\frac{\sin^2 k|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{k^2|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}$$
   in each of the following ways.
   a. By integrating the differential cross section computed using the first-order Born approximation.
   b. By applying the optical theorem to the forward-scattering amplitude in the *second*-order Born approximation. [Note that $f(0)$ is real if the first-order Born approximation is used.]
3. Consider a potential
   $$V = 0 \quad \text{for } r > R, \qquad V = V_0 = \text{constant} \quad \text{for } r < R,$$

where V_0 may be positive or negative. Using the method of partial waves, show that for $|V_0| \ll E = \hbar^2k^2/2m$ and $kR \ll 1$ the differential cross section is isotropic and that the total cross section is given by

$$\sigma_{\text{tot}} = \left(\frac{16\pi}{9}\right)\frac{m^2V_0^2R^6}{\hbar^4}.$$

Suppose the energy is raised slightly. Show that the angular distribution can then be written as

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A + B\cos\theta.$$

Obtain an approximate expression for B/A.

4. A spinless particle is scattered by a weak Yukawa potential

$$V = \frac{V_0 e^{-\mu r}}{\mu r}$$

where $\mu > 0$ but V_0 can be positive or negative. It was shown in the text that the first-order Born amplitude is given by

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2\mu}\frac{1}{[2k^2(1-\cos\theta)+\mu^2]}.$$

a. Using $f^{(1)}(\theta)$ and assuming $|\delta_l| \ll 1$, obtain an expression for δ_l in terms of a Legendre function of the second kind,

$$Q_l(\zeta) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_l(\zeta')}{\zeta-\zeta'}\,d\zeta'.$$

b. Use the expansion formula

$$Q_l(\zeta) = \frac{l!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2l+1)} \times\left\{\frac{1}{\zeta^{l+1}} + \frac{(l+1)(l+2)}{2(2l+3)}\frac{1}{\zeta^{l+3}} + \frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{2\cdot4\cdot(2l+3)(2l+5)}\frac{1}{\zeta^{l+5}} + \cdots\right\} \quad (|\zeta|>1)$$

to prove each assertion.

(i) δ_l is negative (positive) when the potential is repulsive (attractive).

(ii) When the de Broglie wavelength is much longer than the range of the potential, δ_l is proportional to k^{2l+1}. Find the proportionality constant.

5. Check explicitly the $x - p_x$ uncertainty relation for the ground state of a particle confined inside a hard sphere: $V = \infty$ for $r > a$, $V = 0$ for $r < a$. (*Hint*: Take advantage of spherical symmetry.)
6. Consider the scattering of a particle by an impenetrable sphere

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{for } r > a \\ \infty & \text{for } r < a. \end{cases}$$

   a. Derive an expression for the s-wave ($l = 0$) phase shift. (You need not know the detailed properties of the spherical Bessel functions to be able to do this simple problem!)
   b. What is the total cross section σ $[\sigma = \int (d\sigma/d\Omega)\, d\Omega]$ in the extreme low-energy limit $k \to 0$? Compare your answer with the geometric cross section πa^2. You may assume without proof:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2,$$

$$f(\theta) = \left(\frac{1}{k}\right) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l P_l(\cos\theta).$$

7. Use $\delta_l = \Delta(b)|_{b=l/k}$ to obtain the phase shift δ_l for scattering at high energies by (a) the Gaussian potential, $V = V_0 \exp(-r^2/a^2)$, and (b) the Yukawa potential, $V = V_0 \exp(-\mu r)/\mu r$. Verify the assertion that δ_l goes to zero very rapidly with increasing l (k fixed) for $l \gg kR$, where R is the "range" of the potential. [The formula for $\Delta(b)$ is given in (7.4.14)].
8. a. Prove

$$\frac{\hbar^2}{2m}\langle \mathbf{x}|\frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon}|\mathbf{x}'\rangle = -ik \sum_l \sum_m Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') j_l(kr_<) h_l^{(1)}(kr_>)$$

   where $r_<$ ($r_>$) stands for the smaller (larger) of r and r'.
   b. For spherically symmetric potentials, the Lippmann-Schwinger equation can be written for *spherical* waves:

$$|Elm(+)\rangle = |Elm\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} V |Elm(+)\rangle.$$

   Using (a), show that this equation, written in the $\mathbf{x}$-representation, leads to an equation for the radial function, $A_l(k; r)$, as follows:

$$A_l(k;r) = j_l(kr) - \frac{2mik}{\hbar^2} \times \int_0^{\infty} j_l(kr_<) h_l^{(1)}(kr_>) V(r') A_l(k;r') r'^2\, dr'.$$

By taking r very large, also obtain

$$f_l(k) = e^{i\delta_l}\frac{\sin\delta_l}{k}$$
$$= -\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)\int_0^\infty j_l(kr)A_l(k;r)V(r)r^2\,dr.$$

9. Consider scattering by a repulsive δ-shell potential:

$$\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)V(r) = \gamma\delta(r-R), \quad (\gamma > 0).$$

a. Set up an equation that determines the s-wave phase shift δ_0 as a function of k $(E = \hbar^2k^2/2m)$.

b. Assume now that γ is very large,

$$\gamma \gg \frac{1}{R}, k.$$

Show that if $\tan kR$ is *not* close to zero, the s-wave phase shift resembles the hard-sphere result discussed in the text. Show also that for $\tan kR$ close to (but not exactly equal to) zero, resonance behavior is possible; that is, $\cot\delta_0$ goes through zero from the positive side as k increases. Determine approximately the positions of the resonances keeping terms of order $1/\gamma$; compare them with the bound-state energies for a particle confined *inside* a spherical wall of the same radius,

$$V = 0, \quad r < R; \qquad V = \infty, \quad r > R.$$

Also obtain an approximate expression for the resonance width Γ defined by

$$\Gamma = \frac{-2}{[d(\cot\delta_0)/dE]|_{E=E_r}}$$

and notice, in particular, that the resonances become extremely sharp as γ becomes large. (*Note*: For a different, more sophisticated approach to this problem see Gottfried 1966, 131–141, who discusses the analytic properties of the D_l-function defined by $A_l = j_l/D_l$.)

10. A spinless particle is scattered by a time-dependent potential

$$\mathcal{V}(\mathbf{r},t) = V(\mathbf{r})\cos\omega t.$$

Show that if the potential is treated to first order in the transition amplitude, the energy of the scattered particle is increased or decreased by $\hbar\omega$. Obtain $d\sigma/d\Omega$. Discuss qualitatively what happens if the higher-order terms are taken into account.

11. Show that the differential cross section for the elastic scattering of a fast

electron by the ground state of the hydrogen atom is given by

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{4m^2e^4}{\hbar^4q^4}\right)\left\{1 - \frac{16}{\left[4+(qa_0)^2\right]^2}\right\}^2.$$

(Ignore the effect of identity.)

12. Let the energy of a particle moving in a central field be $E(J_1J_2J_3)$, where (J_1, J_2, J_3) are the three action variables. How does the functional form of E specialize for the Coulomb potential? Using the recipe of the action-angle method, compare the degeneracy of the central field and the Coulomb problems and relate it to the vector **A**.

    If the Hamiltonian is

    $$H = \frac{p^2}{2\mu} + V(r) + F(\mathbf{A}^2),$$

    how are these statements changed?

    Describe the corresponding degeneracies of the central field and Coulomb problems in quantum theory in terms of the usual quantum numbers (n, l, m) and also in terms of the quantum numbers (k, m, n). Here the second set, (k, m, n), labels the wave functions $\mathscr{D}^k_{mn}(\alpha\beta\gamma)$.

    How are the wave functions $\mathscr{D}^k_{mn}(\alpha\beta\gamma)$ related to Laguerre times spherical harmonics?