FI-144 TEORIA DE GRUPOS
Lista # 4

Guillermo Cabrera

Entrega: 08 de junho de 2018
Só entregar os itens destacados com *

1. **Grupos Dobrados**
   Determine as estruturas de classes e as tabelas de carateres dos grupos dobrados:
   $$\overline{\mathbf{C}_3},\ \overline{\mathbf{D}_3},\ \overline{\mathbf{D}_4},\ \overline{\mathbf{T}_h}.$$
   Use as tabelas das representações de momentum angular inteiro e construa explicitamente as representações de 'spin'.

   (http://www.ifi.unicamp.br/˜cabrera/teaching/tabela.pdf) ■

2. **Momentum Angular arbitrário**

   Todas as representações irredútiveis de $SU(2)$ foram construídas usando os spinores generalizados
   $$f_m^{(j)} = \frac{u^{j+m}v^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}\ , \tag{1}$$
   onde $-j \leqq m \leqq j$ e (u,v) é o spinor fundamental de $SU(2)$. Estes $f_m^{(j)}$ operam como os kets $|jm\rangle$ para momentum angular arbitrário ($j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, ...$), onde (u,v) fazem o papel de 'coordenadas generalizadas'. O objetivo deste exercício é construir os operadores de momentum angular para a representação (1) dada acima. Considere unidades tais que $\hbar \equiv 1$.

   (a) Mostre que as componentes do momentum angular podem ser representadas como os operadores diferenciais abaixo:
   $$\begin{aligned} J_z &= \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right)\ , \\ J_+ &= u\frac{\partial}{\partial v}\ , \\ J_- &= v\frac{\partial}{\partial u}\ , \end{aligned} \tag{2}$$

onde os $J_\pm = J_x \pm iJ_y$ são os operadores 'escada'. Encontre a ação dos operadores de (2) sobre os spinores $f_m^{(j)}$ e calcule todas as relações de comutação entre eles, mostrando que de fato são operadores de momentum angular.

(b) Encontre o operador $\vec{\mathbf{J}}^2$ (chamado de Casimir na teoria dos grupos de Lie) e verifique que seus autovalores são $j(j+1)$. ■

3. * **Orbitais atômicos em Campo Cristalino: Efeitos de Spin-Órbita** *vs* **Campo Cristalino**

Considere os orbitais atômicos

$$^2\mathrm{D}, \quad ^2\mathrm{F} \tag{3}$$

de um elétron em um átomo. Queremos saber o efeito de um campo cristalino de simetria $\mathbf{T}_h$ sobre os orbitais de um átomo livre. Como temos apenas um elétron de spin 1/2, o momentum angular é semi-inteiro e será necessário considerar os grupos dobrados.

(a) Construa a tabela de carateres do grupo dobrado $\overline{\mathbf{T}_h}$. Note que $\overline{\mathbf{T}_h} = \mathbf{T} \times \{E, I\}$, onde I é a inversão espacial. Obtenha a tabela de $\mathbf{T}$ das notas de aula.

(b) Determine as regras de seleção para as transições dipolares elétricas (TDE) e magnéticas (TDM), para o átomo livre (sem acoplamento spin-órbita e sem campo cristalino);

(c) determine as TDE e TDM sem acoplamento spin-órbita e com campo cristalino de simetria $\mathbf{T}_h$ (considere as representações complexas conjugadas como sendo degeneradas);

(d) as TDE e TDM no caso com acoplamento spin-órbita e sem campo cristalino;

(e) as TDE e TDM no caso com campo cristalino de simetria $\mathbf{T}_h$ fraco e acoplamento spin-órbita forte;

(f) finalmente as TDE e TDM no caso com campo cristalino de simetria $\mathbf{T}_h$ forte e acoplamento spin-órbita fraco.

Dica. Como $\overline{\mathbf{T}_h} = \mathbf{T} \times \{E, I\}$, construa previamente o grupo dobrado $\overline{\mathbf{T}}$ e depois adicione a inversão . ■