FI-001 Mecânica Quântica I
Lista # 5

Prof. G. Cabrera

1. **Matriz Densidade**

   (a) Considere as seguintes matrizes e/ou operadores dados abaixo. Diga quais deles representan um operador Densidade (satisfazem todos os requisitos para ser um operador ou matriz densidade). Justifique a sua resposta.

   $$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 3/4 \end{pmatrix} \ ;$$

   $$\rho_2 = \frac{1}{3}\left|1\right\rangle\left\langle 1\right| + \frac{2}{3}\left|2\right\rangle\left\langle 2\right| + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\left|1\right\rangle\left\langle 2\right| + \left|2\right\rangle\left\langle 1\right|\right) \ ,$$

   com $(\left|1\right\rangle, \ \left|2\right\rangle)$ um par de kets ortonormais;

   $$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \ .$$

   (b) Dos operadores densidade aceitos acima, diga quais representam um ensemble puro e quais um ensemble misto. Para o caso do ensemble puro, encontre o ket estado que ele representa. Para ensembles mistos, encontre uma decomposição como soma de ensembles puros. $\square$

2. **Partículas de spin 1/2**

   Use a representação das matrizes de Pauli $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ para spin 1/2 nos problemas abaixo:

   $$\frac{2}{\hbar}\mathbf{S}_x = \boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{2}{\hbar}\mathbf{S}_y = \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{2}{\hbar}\mathbf{S}_z = \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Considere um ensemble puro de sistemas de spin 1/2 preparados de maneira idêntica. Suponha que os valores esperados $\langle S_x \rangle$ e $\langle S_z \rangle$ são conhecidos e também o sinal de $\langle S_y \rangle$. Mostre que esta informação é suficiente para determinar o estado quântico (encontre tal estado), não sendo necessário conhecer a magnitude de $\langle S_y \rangle$.

(b) Considere agora um ensemble misto (spin 1/2). Suponha que as médias sobre o ensemble $[S_x]$, $[S_y]$ e $[S_z]$ são dadas. Mostre que esta informação é suficiente para construir a matriz densidade que carateriza o ensemble. Falamos que um sistema não está polarizado quando

$$[S_x] = [S_y] = [S_z] = 0 \ .$$

Encontre a matriz densidade que carateriza esse ensemble e encontre no mínimo duas decomposições como somas de ensembles puros. □

3. **Ensemble misto.**

Para spin 1/2, considere o caso de um ensemble que representa um feixe parcialmente polarizado, con 75% para o estado $|S_z;+\rangle$ e 25% para $|S_x;+\rangle$.

(a) Encontre a matriz densidade expressada nas bases de S_z e de S_x respectivamente. Encontre os autovalores de $\boldsymbol{\rho}$ e uma decomposição em ensembles puros diferente das duas anteriores.

(b) Calcule os valores médios do spin e expresse o operador $\boldsymbol{\rho}$ na forma padrão

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2}\left(1 + \overrightarrow{\mathbf{m}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}\right) \ ,$$

onde $\overrightarrow{\mathbf{m}}$ é o vetor polarização. □

4. **Partículas de spin 1**

Considere agora um ensemble de sistemas de spin $J = 1$. A matriz densidade é construída como uma matriz de 3×3. Quantos parâmetros reais independentes precisamos para determinar o ensemble? Que outras grandezas físicas, além de $[J_x]$, $[J_y]$ e $[J_z]$, precisamos conhecer para caraterizar completamente o ensemble? Use a seguinte representação dos operadores de momentum angular que diagonaliza o operador J_z (com $\hbar = 1$):

$$J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \ J_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ J_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Encontre a álgebra induzida pelas matrizes acima, lembrando as relações de comutação do momento angular. Mostre que a forma mais geral da matriz densidade pode ser escrita como

$$\rho = \overrightarrow{\mathbf{P}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{J}} + \overrightarrow{\mathbf{J}} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{Q}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{J}} \ , \tag{1}$$

onde $\overrightarrow{\mathbf{P}} = (P_x, P_y, P_z)$ é um vetor real e $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}$ é um tensor de ordem dois, real e simétrico

$$\overleftrightarrow{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{pmatrix} \ .$$

Mostre que a condição de normalizaçaõ $Tr\ \rho = 1$ é uma condição sobre o traço da matriz de $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}$. A grandeza $\overrightarrow{\mathbf{P}}$ é chamada de momento dipolar e o tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}$ de momento quadrupolar. Mostre que a expansão (1) possue 8 parâmetros reais livres e construa explicitamente a matriz densidade para o ensemble (totalmente polarizado) correspondente a um estado puro com autovalor +1 para J_z. Expresse seu resultado na forma (1). □

5. **Propriedades do Operador Densidade**

   Mostre, que em geral, temos a desigualdade abaixo:

$$\rho_{ii}\rho_{jj} \geq |\rho_{ij}|^2 \ . \tag{2}$$

   A partir da desigualdade (2), encontre uma condição necessária e suficiente para termos um ensemble puro. Aplique essa condição nas matrizes do problema 1 da lista. □

6. **Representação de Wigner**

   Considere o caso *1-dim*. Chamamos de representação de Wigner de um operador de uma partícula $\mathbf{\Omega}$, à função da coordenada e momentum definida por

$$\Omega_W(q,p) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \left\langle q - \frac{1}{2}y \,|\, \mathbf{\Omega} |\, q + \frac{1}{2}y \right\rangle\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}py\right)\ .$$

   Encontre a representação de Wigner de operadores usuais, como a energia cinética e potencial:

$$\mathbf{K} = \mathbf{p}^2 \diagup 2m,$$

$$\mathbf{V} = V\left(\mathbf{x}\right)\ ,$$

   onde $\mathbf{p}$ e $\mathbf{x}$ são os operadores de momentum e posição. Mostre que o valor médio de $\mathbf{\Omega}$ no ensemble definido por $\boldsymbol{\rho}$ é dado pela expressão

$$[\mathbf{\Omega}] = Tr\left(\boldsymbol{\rho}\mathbf{\Omega}\right) = \int dq \int dp\ \rho_W(q,p)\ \Omega_W(q,p)\ ,$$

   onde é feita uma integração sobre todo o espaço de fase (q,p) e $\rho_W(q,p)$ é a função de Wigner

$$\rho_W(q,p) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dy\ \left\langle q - \frac{1}{2}y \,|\, \boldsymbol{\rho} |\, q + \frac{1}{2}y \right\rangle\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}py\right)\ . \qquad \square$$

7. **Função de Wigner para o oscilador harmônico**

   Para o oscilador harmônico *1-dim*, encontre a função de Wigner associada ao estado fundamental e ao primeiro estado excitado. Comente seu resultado. □

8. **Função de Wigner negativa**

   Encontre a função de Wigner de um estado que é uma superposição de dois pacotes gaussianos centrados em $\pm c$:

$$\psi(q) = C \left\{ \exp\left[-\frac{(q-c)^2}{4a^2} \right] + \exp\left[-\frac{(q+c)^2}{4a^2} \right] \right\} \, , \tag{3}$$

   onde C é uma constante de normalização. Mostre que a função de Wigner de (3) possui, além dos picos em $\pm c$, um pico centrado em $q = 0$ modulado por um fator oscilatório (que toma valores negativos). Este último representa efeitos de interferência entre os dois pacotes gaussianos e não é eliminado no limite $c \to \infty$, quando os pacotes estão muito separados. □

9. **Traço parcial para spin 1/2**

   Considere um sistema de duas partículas de spin 1/2 no estado puro abaixo:

$$|\psi\rangle = \alpha \, |+-\rangle + \beta \, |-+\rangle \, ,$$

   onde + (−) significa spin para cima (baixo) e os coeficientes (α, β) são em geral complexos. Encontre o operador estado **reduzido** para o primeiro spin. Essa situação pode ser descrita por um ket-estado? Responda a mesma pergunta para os kets de duas partículas seguintes:

$$|\phi\rangle = \alpha \, |+-\rangle + \beta \, |++\rangle \, ,$$

$$|\chi\rangle = \alpha \, |+-\rangle + \beta \, |--\rangle \, . \qquad \square$$

10. **Sistema de partículas para spin 1/2**

    (a) Seja um sistema de duas partículas interagentes de spin 1/2 ($s_1 = s_2 = 1/2$). No caso não interagente é útil usar a base dos produtos

$$|s_1 s_2; m_1, m_2\rangle \equiv |s_1 m_1\rangle \, |s_2 m_2\rangle \quad ,$$

    mas sabemos que no caso interagente os spins individuais não são mais constantes de movimento. Neste caso é conveniente usar a base do spin total $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{s}}_1 + \vec{\mathbf{s}}_2$

$$|s_1 s_2; SM\rangle \quad .$$

    Determine todos os estados $|s_1 s_2; SM\rangle$ em termos da outra base $\{|s_1 s_2; m_1, m_2\rangle\}$, já seja usando o método dos operadores escadas $S_\pm$ ou tabelas para os coeficientes de Clebsch-Gordan.

(b) Suponha que o Hamiltoniano de interação das partículas é dado por

$$\mathcal{H} = \frac{4\Delta}{\hbar^2}\left(\vec{\mathbf{s}}_1 \cdot \vec{\mathbf{s}}_2\right) \ , \tag{4}$$

com $\Delta > 0$. Diagonalize o Hamiltoniano (4) e encontre os autoestados do sistema. Qual base de estados é mais conveniente nesse processo? Diga qual é o estado fundamental.

(c) Agora definimos o operador P_{12} por

$$P_{12} \equiv \frac{1}{2}\left[1 + \frac{4}{\hbar^2}\left(\vec{\mathbf{s}}_1 \cdot \vec{\mathbf{s}}_2\right)\right] \ .$$

Operando na base $|\pm\rangle_1 |\pm\rangle_2$, mostre que ele troca os spins (recebe o nome de *operador de troca*). Encontre também as propriedades de transformação dos autoestados do Hamiltoniano (4) por P_{12}. □

11. **Matriz Densidade e Rotações (spin 1/2)**

(a) Para spin $s = 1/2$, a matriz densidade pode ser escrita sempre na forma:

$$\rho = \frac{1}{2}\left(1 + \vec{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \vec{\mathbf{a}}\right) \ , \tag{5}$$

onde $\vec{\mathbf{a}}$ é um vetor real e $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$ é a matriz de Pauli. O vetor $\vec{\mathbf{a}}$ é chamado de polarização do ensemble. Mostre que ele satisfaz

$$0 \leq |\vec{\mathbf{a}}| \leq 1 \ ,$$

e que o valor $|\vec{\mathbf{a}}| = 1$ corresponde ao **ensemble puro (**polarização completa).

(b) Considere agora a ação de uma rotação sobre a matriz (5), na forma:

$$\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}},\theta) \cdot \rho \cdot \mathcal{D}^{\dagger}(\hat{\mathbf{n}},\theta) \ ,$$

sendo $\hat{\mathbf{n}}$ o eixo da rotação e θ o ângulo de rotação. Mostre que a forma (5) é preservada e que o efeito líquido da rotação é rodar o vetor de polarização:

$$\vec{\mathbf{a}} \to \vec{\mathbf{b}} \ ,$$

onde $\vec{\mathbf{b}}$ é dado pela famosa fórmula de Rodrigues:

$$\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}}\ \cos\theta + (1 - \cos\theta)\left(\vec{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\right)\hat{\mathbf{n}} + \sin\theta\ \left(\hat{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{a}}\right) \ .$$

Mostre também que o caráter do ensemble é preservado, como tem que ser, com

$$\vec{\mathbf{b}}^2 = \vec{\mathbf{a}}^2 \ .$$

Dica. Use as propriedades da álgebra das matrizes de Pauli. □

12. **Adição de Momentos angulares: Modelo Vetorial**

Partindo dos estados com projeção máxima do momentum angular total, construa todo o espectro para a soma de dois momenta $\vec{J}_1$ e $\vec{J}_2$. Mostre que uma contagem adequada fornece os valores possíveis de j, com

$$j = |j_1 - j_2| \, , \; |j_1 - j_2| + 1, ..., \; j_1 + j_2 \; ,$$

que geralmente se escreve como a desigualdade triangular $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$.

□

4 **Adição do momentum orbital com o spin**

Para uma partícula de spin 1/2, desenvolva a teoria de adição do momentum angular orbital l, com o momentum angular de spin $s = 1/2$. Construa todos os coeficientes de Clebsch-Gordan e escreva explícitamente os estados com momentum angular total $\vec{J}$ e projeção J_z bem definidos. □

13. **Exemplo de adição**

Considere o caso $j_1 = j_2 = 1$. Encontre todos os estados $\{|jm >\}$, já seja usando o método dos operadores escadas $J_{\mp}$, ou usando as fórmulas recursivas para os coeficientes de Clebsch-Gordan. □

14. **Exercícios do capítulo 3 do livro do Sakurai (*MQM*)**

Ver páginas anexas. □

PROBLEMS

1. Find the eigenvalues and eigenvectors of $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Suppose an electron is in the spin state $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. If s_y is measured, what is the probability of the result $\hbar/2$?
2. Consider the 2×2 matrix defined by

$$U = \frac{a_0 + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}}{a_0 - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}},$$

where a_0 is a real number and $\mathbf{a}$ is a three-dimensional vector with real components.
   a. Prove that U is unitary and unimodular.
   b. In general, a 2×2 unitary unimodular matrix represents a rotation in three dimensions. Find the axis and angle of rotation appropriate for U in terms of a_0, a_1, a_2, and a_3.
3. The spin-dependent Hamiltonian of an electron-positron system in the presence of a uniform magnetic field in the z-direction can be written as

$$H = A\mathbf{S}^{(e^-)}\cdot\mathbf{S}^{(e^+)} + \left(\frac{eB}{mc}\right)\left(S_z^{(e^-)} - S_z^{(e^+)}\right).$$

Suppose the spin function of the system is given by $\chi_+^{(e^-)}\chi_-^{(e^+)}$.
   a. Is this an eigenfunction of H in the limit $A\to 0, eB/mc \neq 0$? If it is, what is the energy eigenvalue? If it is not, what is the expectation value of H?
   b. Same problem when $eB/mc \to 0, A \neq 0$.
4. Consider a *spin* 1 particle. Evaluate the matrix elements of

$$S_z(S_z+\hbar)(S_z-\hbar) \quad \text{and} \quad S_x(S_x+\hbar)(S_x-\hbar).$$

5. Let the Hamiltonian of a rigid body be

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{K_1^2}{I_1} + \frac{K_2^2}{I_2} + \frac{K_3^2}{I_3}\right),$$

where $\mathbf{K}$ is the angular momentum in the body frame. From this expression obtain the Heisenberg equation of motion for **K** and then find Euler's equation of motion in the correspondence limit.

6. Let $U = e^{iG_3\alpha}e^{iG_2\beta}e^{iG_3\gamma}$, where (α, β, γ) are the Eulerian angles. In order that U represent a rotation (α, β, γ), what are the commutation rules satisfied by the G_k? Relate **G** to the angular momentum operators.
7. What is the meaning of the following equation:
$$U^{-1}A_kU = \sum R_{kl}A_l,$$
where the three components of **A** are matrices? From this equation show that matrix elements $\langle m|A_k|n\rangle$ transform like vectors.
8. Consider a sequence of Euler rotations represented by
$$\mathscr{D}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) = \exp\left(\frac{-i\sigma_3\alpha}{2}\right)\exp\left(\frac{-i\sigma_2\beta}{2}\right)\exp\left(\frac{-i\sigma_3\gamma}{2}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\dfrac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\dfrac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin\dfrac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\dfrac{\beta}{2} \end{pmatrix}.$$
Because of the group properties of rotations, we expect that this sequence of operations is equivalent to a *single* rotation about some axis by an angle θ. Find θ.
9. a. Consider a pure ensemble of identically prepared spin $\frac{1}{2}$ systems. Suppose the expectation values $\langle S_x\rangle$ and $\langle S_z\rangle$ and the sign of $\langle S_y\rangle$ are known. Show how we may determine the state vector. Why is it unnecessary to know the magnitude of $\langle S_y\rangle$?
   b. Consider a mixed ensemble of spin $\frac{1}{2}$ systems. Suppose the ensemble averages $[S_x]$, $[S_y]$, and $[S_z]$ are all known. Show how we may construct the 2×2 density matrix that characterizes the ensemble.
10. a. Prove that the time evolution of the density operator ρ (in the Schrödinger picture) is given by
$$\rho(t) = \mathscr{U}(t, t_0)\rho(t_0)\mathscr{U}^\dagger(t, t_0).$$
    b. Suppose we have a pure ensemble at $t = 0$. Prove that it cannot evolve into a mixed ensemble as long as the time evolution is governed by the Schrödinger equation.
11. Consider an ensemble of spin 1 systems. The density matrix is now a 3×3 matrix. How many independent (real) parameters are needed to characterize the density matrix? What must we know in addition to $[S_x]$, $[S_y]$, and $[S_z]$ to characterize the ensemble completely?
12. An angular-momentum eigenstate $|j, m = m_{\max} = j\rangle$ is rotated by an infinitesimal angle ε about the y-axis. Without using the explicit form of the $d^{(j)}_{m'm}$ function, obtain an expression for the probability for the new rotated state to be found in the original state up to terms of order ε^2.

13. Show that the 3×3 matrices G_i $(i = 1, 2, 3)$ whose elements are given by

$$(G_i)_{jk} = -i\hbar\varepsilon_{ijk},$$

where j and k are the row and column indices, satisfy the angular momentum commutation relations. What is the physical (or geometric) significance of the transformation matrix that connects G_i to the more usual 3×3 representations of the angular-momentum operator J_i with J_3 taken to be diagonal? Relate your result to

$$\mathbf{V} \to \mathbf{V} + \hat{\mathbf{n}}\delta\phi \times \mathbf{V}$$

under infinitesimal rotations. (*Note*: This problem may be helpful in understanding the photon spin.)

14. a. Let $\mathbf{J}$ be angular momentum. It may stand for orbital $\mathbf{L}$, spin $\mathbf{S}$, or $\mathbf{J}_{\text{total}}$.) Using the fact that $J_x, J_y, J_z (J_{\pm} \equiv J_x \pm iJ_y)$ satisfy the usual angular-momentum commutation relations, prove

$$\mathbf{J}^2 = J_z^2 + J_+ J_- - \hbar J_z.$$

b. Using (a) (or otherwise), derive the "famous" expression for the coefficient c_- that appears in

$$J_- \psi_{jm} = c_- \psi_{j,m-1}.$$

15. The wave function of a particle subjected to a spherically symmetrical potential $V(r)$ is given by

$$\psi(\mathbf{x}) = (x + y + 3z)f(r).$$

a. Is ψ an eigenfunction of $\mathbf{L}^2$? If so, what is the l-value? If not, what are the possible values of l we may obtain when $\mathbf{L}^2$ is measured?

b. What are the probabilities for the particle to be found in various m_l states?

c. Suppose it is known somehow that $\psi(\mathbf{x})$ is an energy eigenfunction with eigenvalue E. Indicate how we may find $V(r)$.

16. A particle in a spherically symmetrical potential is known to be in an eigenstate of $\mathbf{L}^2$ and L_z with eigenvalues $\hbar^2 l(l+1)$ and $m\hbar$, respectively. Prove that the expectation values between $|lm\rangle$ states satisfy

$$\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0, \qquad \langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{\left[l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2\right]}{2}.$$

Interpret this result semiclassically.

17. Suppose a half-integer l-value, say $\frac{1}{2}$, were allowed for orbital angular momentum. From

$$L_+ Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi) = 0,$$

we may deduce, as usual,

$$Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi) \propto e^{i\phi/2}\sqrt{\sin\theta}\,.$$

Now try to construct $Y_{1/2,-1/2}(\theta, \phi)$; by (a) applying L_- to $Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi)$; and (b) using $L_- Y_{1/2,-1/2}(\theta, \phi) = 0$. Show that the two procedures lead to contradictory results. (This gives an argument against half-integer l-values for orbital angular momentum.)

18. Consider an orbital angular-momentum eigenstate $|l=2, m=0\rangle$. Suppose this state is rotated by an angle β about the y-axis. Find the probability for the new state to be found in $m=0$, ± 1, and ± 2. (The spherical harmonics for $l=0$, 1, and 2 given in Appendix A may be useful.)
19. What is the physical significance of the operators

$$K_+ \equiv a_+^\dagger a_-^\dagger \quad \text{and} \quad K_- \equiv a_+ a_-$$

in Schwinger's scheme for angular momentum? Give the nonvanishing matrix elements of $K_\pm$.
20. We are to add angular momenta $j_1 = 1$ and $j_2 = 1$ to form $j = 2$, 1, and 0 states. Using either the ladder operator method or the recursion relation, express all (nine) $\{j, m\}$ eigenkets in terms of $|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$. Write your answer as

$$|j=1, m=1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0,+\rangle, \ldots,$$

where + and 0 stand for $m_{1,2} = 1, 0$, respectively.
21. a. Evaluate

$$\sum_{m=-j}^{j} |d_{mm'}^{(j)}(\beta)|^2 m$$

for *any* j (integer or half-integer); then check your answer for $j = \frac{1}{2}$.

b. Prove, for any j,

$$\sum_{m=-j}^{j} m^2 |d_{m'm}^{(j)}(\beta)|^2 = \frac{1}{2} j(j+1) \sin^2\beta + m'^2 \frac{1}{2}(3\cos^2\beta - 1).$$

[*Hint*: This can be proved in many ways. You may, for instance, examine the rotational properties of J_z^2 using the spherical (irreducible) tensor language.]
22. a. Consider a system with $j = 1$. Explicitly write

$$\langle j=1, m' | J_y | j=1, m\rangle$$

in 3×3 matrix form.

b. Show that for $j=1$ only, it is legitimate to replace $e^{-iJ_y\beta/\hbar}$ by

$$1 - i\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)\sin\beta - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 (1 - \cos\beta).$$

c. Using (b), prove

$$d^{(j=1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos\beta) & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos\beta) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \cos\beta & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta \\ \left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos\beta) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos\beta) \end{pmatrix}.$$

23. Express the matrix element $\langle \alpha_2\beta_2\gamma_2 | J_3^2 | \alpha_1\beta_1\gamma_1 \rangle$ in terms of a series in

$$\mathscr{D}^j_{mn}(\alpha\beta\gamma) = \langle \alpha\beta\gamma | jmn \rangle.$$

24. Consider a system made up of two spin $\frac{1}{2}$ particles. Observer A specializes in measuring the spin components of one of the particles (s_{1z}, s_{1x} and so on), while observer B measures the spin components of the other particle. Suppose the system is known to be in a spin-singlet state, that is, $S_{\text{total}} = 0$.
    a. What is the probability for observer A to obtain $s_{1z} = \hbar/2$ when observer B makes no measurement? Same problem for $s_{1x} = \hbar/2$.
    b. Observer B determines the spin of particle 2 to be in the $s_{2z} = \hbar/2$ state with certainty. What can we then conclude about the outcome of observer A's measurement if (i) A measures s_{1z} and (ii) A measures s_{1x}? Justify your answer.
25. Consider a spherical tensor of rank 1 (that is, a vector)

$$V^{(1)}_{\pm 1} = \mp \frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}, \qquad V^{(1)}_0 = V_z.$$

Using the expression for $d^{(j=1)}$ given in Problem 22, evaluate

$$\sum_{q'} d^{(1)}_{qq'}(\beta) V^{(1)}_{q'}$$

and show that your results are just what you expect from the transformation properties of $V_{x,y,z}$ under rotations about the y-axis.
26. a. Construct a spherical tensor of rank 1 out of two different vectors $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$ and $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$. Explicitly write $T^{(1)}_{\pm 1,0}$ in terms of $U_{x,y,z}$ and $V_{x,y,z}$.
    b. Construct a spherical tensor of rank 2 out of two different vectors $\mathbf{U}$ and $\mathbf{V}$. Write down explicitly $T^{(2)}_{\pm 2, \pm 1, 0}$ in terms of $U_{x,y,z}$ and $V_{x,y,z}$.
27. Consider a spinless particle bound to a fixed center by a central force potential.

a. Relate, as much as possible, the matrix elements

$$\langle n', l', m'| \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm iy)|n, l, m\rangle \quad \text{and} \quad \langle n', l', m'|z|n, l, m\rangle$$

using *only* the Wigner-Eckart theorem. Make sure to state under what conditions the matrix elements are nonvanishing.

b. Do the same problem using wave functions $\psi(\mathbf{x}) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi)$.

28. a. Write xy, xz, and $(x^2 - y^2)$ as components of a spherical (irreducible) tensor of rank 2.

b. The expectation value

$$Q \equiv e\langle \alpha, j, m = j|(3z^2 - r^2)|\alpha, j, m = j\rangle$$

is known as the *quadrupole moment*. Evaluate

$$e\langle \alpha, j, m'|(x^2 - y^2)|\alpha, j, m = j\rangle,$$

(where $m' = j, j-1, j-2, \ldots$) in terms of Q and appropriate Clebsch-Gordan coefficients.

29. A spin $\frac{3}{2}$ nucleus situated at the origin is subjected to an external inhomogeneous electric field. The basic electric quadrupole interaction may by taken to be

$$H_{\text{int}} = \frac{eQ}{2s(s-1)\hbar^2}\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 S_x^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 S_y^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0 S_z^2\right],$$

where ϕ is the electrostatic potential satisfying Laplace's equation and the coordinate axes are so chosen that

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)_0 = 0.$$

Show that the interaction energy can be written as

$$A(3S_z^2 - \mathbf{S}^2) + B(S_+^2 + S_-^2),$$

and express A and B in terms of $(\partial^2\phi/\partial x^2)_0$ and so on. Determine the energy eigenkets (in terms of $|m\rangle$, where $m = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$) and the corresponding energy eigenvalues. Is there any degeneracy?