FI-001 Mecânica Quântica I
Prova # 1

Prof. G. Cabrera

Data: 4 de outubro de 2021
Todos os problemas têm o mesmo peso.
Tempo: 2 horas

1 **Partícula de Spin 1/2**

Seja o espaço de spin 1/2 de dimensão 2, com a base normalizada $(|+>, \ |->)$ que diagonaliza o observável $\mathbf{S}_z$ do spin . A representação espectral do operador é:

$$\mathbf{S}_z = \frac{\hbar}{2} \left(|+\rangle\langle+| \ - \ |-\rangle\langle-| \right) \quad . \tag{1}$$

a) Considere neste espaço um par de estados

$$\begin{aligned} |\psi+\rangle &= \ \cos\left(\tfrac{\beta}{2}\right)|+\rangle + \ e^{i\alpha}\sin\left(\tfrac{\beta}{2}\right)|-\rangle \ , \\ |\psi-\rangle &= -e^{-i\alpha}\sin\left(\tfrac{\beta}{2}\right)|+\rangle + \cos\left(\tfrac{\beta}{2}\right)|-\rangle \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Verifique que estes *kets* são ortogonais e normalizados. Eles representam outra *base* possível do nosso espaço. Encontre então a matriz da **Transformação Unitária** que da a mudança da base. Isto é, encontre U tal que

$$\begin{aligned} |\psi+\rangle &= U\,|+\rangle \ , \\ |\psi-\rangle &= U\,|-\rangle \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Suponha que o estado inicial foi preparado como sendo $|\psi+\rangle$. Qual é a probabilidade de medir $\pm\hbar/2$ quando feita uma medição de S_z ?

b) As equações de autovalores

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_z\,|+\rangle &= \frac{\hbar}{2}\,|+\rangle \ , \\ \mathbf{S}_z\,|-\rangle &= -\frac{\hbar}{2}\,|-\rangle \ , \end{aligned} \tag{4}$$

podem ser convertidas em equações de autovalores para $(|\psi+>, \ |\psi->)$, operando com a transformação U em (4). Verifique então que os kets $(|\psi+>, \ |\psi->)$ são autoestados do operador $\mathbf{S}_n$ dado por

$$\mathbf{S}_n = U \circ S_z \circ U^\dagger$$

e encontre os autovalores. Encontre a representação matricial de $\mathbf{S}_n$ na base $(|+>,\ |->)$ e dê uma interpretação geométrica de $\mathbf{S}_n$ (Dica: represente a matriz de $\mathbf{S}_n$ usando as matrizes de Pauli). Encontre $\mathbf{S}_n$ e seus autokets $(|\psi+>,\ |\psi->)$, no caso particular de $\alpha = 0, \beta = \pi/2$. ■

2 **Translações em** *1-dim*

Considere uma translação finita $x' \to x' + a$, em *1-dim*

$$\mathcal{T}(a) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} pa\right) ,$$

onde p é o momentum linear. Queremos calcular o efeito da translação sobre o valor médio do operador posição $\mathbf{x}$. A notação de Dirac permite duas alternativas para o cálculo:

i) a translação afeta o ket-estado $|\alpha\rangle$ e não o operador posição

$$|\alpha\rangle \to \widetilde{|\alpha\rangle} = \mathcal{T}(a)\,|\alpha\rangle \ ,$$
$$\mathbf{x} \to \mathbf{x} \ ;$$

ii) o ket-estado fixo e a translação operando sobre a posição

$$|\alpha\rangle \to |\alpha\rangle \ ,$$
$$\mathbf{x} \to \widetilde{\mathbf{x}} = \mathcal{T}(a)^\dagger \mathbf{x}\ \mathcal{T}(a) \ .$$

Calcule $\langle \widetilde{\mathbf{x}} \rangle = \langle \mathbf{x} \rangle_{\widetilde{\alpha}}$ usando as duas alternativas acima. ■

FORMULÁRIO

A. **Matrizes de Pauli**

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

B. **Mudança da base**

Sejam dois conjuntos ortonormais completos:

$$\{|a'\rangle\}\,, \quad \{|b'\rangle\} \quad .$$

Sempre existe um operador unitário que transforma a base, isto é um operador U tal que

$$\left|b^{(j)}\right\rangle = U\left|a^{(j)}\right\rangle \ , \ j = 1, 2, ..., N.$$

Por construção o operador abaixo faz a mudança da base

$$U = \sum_k \ \left|b^{(k)}\right\rangle\left\langle a^{(k)}\right| .$$

C. **Identidade de Baker-Campbell-Haussdorff**

Sejam A e B dois operadores. Temos a identidade

$$\exp(A)\ B\ \exp(-A) = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + ...$$

■