FI-001 Mecânica Quântica I
Prova # 2

Prof. G. Cabrera

13 de dezembro de 2021

Entrega: na mesma data.

Os problemas têm o mesmo peso.

1. **Operador Densidade para um sistema de dois estados**

   Seja um sistema de dois estados, com auto-kets da energia $(|1\rangle\,, |2\rangle)$, com autovalores $\hbar\omega_1$ e $\hbar\omega_2$ respectivamente.

   (a) Considere o ensemble misto no tempo $t = 0$, descrito por:

$$\boldsymbol{\rho}(0) \rightarrow \begin{cases} 25\% \text{ de mistura do estado } \left|\psi^{(1)}\right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |2\rangle\right) \ , \\[2ex] 25\% \text{ de mistura do estado } \left|\psi^{(2)}\right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |2\rangle\right) \ , \\[2ex] 50\% \text{ de mistura do estado } \left|\psi^{(3)}\right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + i\ |2\rangle\right) \ . \end{cases} \tag{1}$$

   Encontre a matriz do operador densidade $\boldsymbol{\rho}(0)$ em relação à base $(|1\rangle\,, |2\rangle)$.

   (b) Seja um observável $\mathbf{A}$ com a propriedade:

$$\mathbf{A}\,|1\rangle = |2\rangle \ , \qquad \mathbf{A}\,|2\rangle = |1\rangle \ .$$

   Encontre o valor médio $[\mathbf{A}]\,(t)$, dependente do tempo, do observável $\mathbf{A}$ en relação ao ensemble descrito em (1). Indique claramente qué versão estará usando (Schrödinger ou Heisenberg) no seu cálculo.

   (c) Encontre outra decomposição diferente de $\boldsymbol{\rho}(0)$ como soma de ensembles puros. Calcule a Entropia de von Neumann e mostre que não depende do tempo.

   Dica. Observe as propriedades gerais da equação de autovalores em dim 2, como polinômio característico da matriz. ■

2. **Sistema de duas partículas de spin 1/2**

Seja um sistema de duas partículas de spin 1/2 ($s_1 = s_2 = 1/2$). Neste caso, temos duas possibilidades de escolha das bases: a base dos produtos

$$|s_1 s_2; m_1, m_2\rangle \equiv |s_1 m_1\rangle \, |s_2 m_2\rangle \quad ;$$

e a base do spin total $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{S}}_1 + \vec{\mathbf{S}}_2$

$$|s_1 s_2; S, M\rangle \, .$$

(a) Definimos o operador $\mathbf{P}_{12}$ por

$$\mathbf{P}_{12} \equiv \frac{1}{2}\left[1 + \frac{4}{\hbar^2}\left(\vec{\mathbf{S}}_1 \cdot \vec{\mathbf{S}}_2\right)\right] \, . \tag{2}$$

Operando na base dos produtos $\{|s_1 s_2; m_1, m_2\rangle\}$, mostre que $\mathbf{P}_{12}$ troca os spins (por isso, recebe o nome de *operador de troca*).

(b) Considere os estados de duas partículas:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) \ , \\ |\beta\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Eles certamente são autoestados da componente $\mathbf{S}_z = \mathbf{S}_{1z} + \mathbf{S}_{2z}$ do spin total, com $M = 0$. Verifique se os estados de (3) também são autoestados de $\vec{\mathbf{S}}^2 = \left(\vec{\mathbf{S}}_1 + \vec{\mathbf{S}}_2\right)^2$, usando a identidade [obtida de (2)]:

$$\vec{\mathbf{S}}^2 = \vec{\mathbf{S}}_1^2 + \vec{\mathbf{S}}_2^2 + \hbar^2\left(\mathbf{P}_{12} - 1/2\right) \ ,$$

onde $\mathbf{P}_{12}$ é o operador de permutação dos spins. Classifique os estados ($|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$) com os números quânticos $|s_1 s_2; S, M\rangle$ de momentum angular total.

(c) Mostre que o estado $|\alpha\rangle$ é invariante por rotação (por ação de uma rotação arbitrária).

(d) Para $|\beta\rangle$, considere uma rotação infinitesimal de ângulo ε em torno do eixo x. Encontre, para o estado rodado, a probabilidade de permanecer no estado original $|\beta\rangle$, até segunda ordem em ε.

(e) Suponha que o Hamiltoniano de interação das partículas é dado por

$$\mathcal{H} = \frac{4\Delta}{\hbar^2}\left(\vec{\mathbf{S}}_1 \cdot \vec{\mathbf{S}}_2\right) \ , \tag{4}$$

com $\Delta > 0$. Diagonalize o Hamiltoniano (4) e encontre os autoestados do sistema. Qual base de estados é mais conveniente nesse processo? Diga qual é o estado fundamental. ■