FI-002 Mecânica Quântica II
Prova # 3

Prof. G. Cabrera

Data: 22 de julho de 2020
Entrega até as 23:59 hrs

1. **Equação de Dirac**

   (a) **Paridade da equação de Dirac.**
   Escrevemos a equação de Dirac na forma

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\psi} = \left(c\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{p}} + mc^2\boldsymbol{\beta}\right)\boldsymbol{\psi} \ ,$$

   com as matrizes $\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}}$ e $\boldsymbol{\beta}$ dadas por

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 & \overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix},$$

   onde os 'elementos de matriz' representam blocos de 2×2, na notação bi-spinorial e $\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}$ é a matriz de Pauli. O operador *Paridade* $\mathbf{P}$, está associado à transformação

$$\mathbf{P}\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{x}} \mapsto \overrightarrow{\mathbf{x}'} = -\overrightarrow{\mathbf{x}} \\ t \mapsto t' = t \\ \boldsymbol{\psi} \mapsto \boldsymbol{\psi}_{\ P} \ . \end{cases}$$

   É claro que o operador momentum transforma como a coordenada:

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} \mapsto \overrightarrow{\mathbf{p}'} = \overrightarrow{-\mathbf{p}} \ ,$$

   o que pode ser visto claramente usando a representação de coordenadas, $\overrightarrow{\mathbf{p}} = i\hbar\nabla$.
   Impondo que a equação de Dirac seja invariante no sistema transformado, *i.e.* que seja satisfeita a mesma equação no sistema 'linha'

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\boldsymbol{\psi}_p(\overrightarrow{\mathbf{x}'},t') = \left(c\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{p}'} + mc^2\boldsymbol{\beta}\right)\boldsymbol{\psi}_p(\overrightarrow{\mathbf{x}'},t') \ ,$$

mostre que devemos ter (a menos de uma fase trivial)

$$\boldsymbol{\psi}_p(\overrightarrow{\mathbf{x}}, t) = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\psi}(-\overrightarrow{\mathbf{x}}, t) \ .$$

Representamos assim o operador *Paridade:* $\mathbf{P}\boldsymbol{\psi}(\overrightarrow{\mathbf{x}}, t) = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\psi}(-\overrightarrow{\mathbf{x}}, t)$.

(b) **Potencial central.**

Considere agora soluções estacionárias de energia E, na presença de um potencial central $V(r)$. Mostre que a equação de Dirac pode ser escrita como

$$\chi = \frac{c}{E - V(r) + mc^2} \ (\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{p}})\,\varphi \quad ,$$

onde temos usado a representação bi-spinorial

$$\boldsymbol{\psi} = \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \left(\begin{array}{c} \varphi \\ -- \\ \chi \end{array} \right) \ .$$

Assuma agora que φ representa um orbital s de spin para baixo ($\downarrow$) da forma

$$\varphi = R(r) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Mostre que χ representa uma onda cuja parte orbital corresponde a um estado p, mas com momentum angular total $j = 1/2$. Construa explicitamente χ em termo de Harmônicos Esféricos e dos spinores de spin 1/2. Por conveniência, use os operadores $(\sigma_+, \sigma_-, \sigma_z)$ do spin e a Tabela de coeficientes de Clebsch-Gordan para identificar os estados de momentum angular total (ver Formulário abaixo).

(c) **Acoplamento spin-órbita**

Mostre que φ e χ têm paridades diferentes, mas o spinor $\boldsymbol{\psi}$ de Dirac é um autoestado de energia E e **paridade definida**. Discuta a possibilidade de outros 'bons ' números quânticos em termo dos autovalores de $\vec{\mathbf{L}}$, $\vec{\mathbf{S}}$ e $\vec{\mathbf{J}}$. Veja a diferença com o caso não relativístico, onde um potencial central conserva o momentum angular orbital. ■

FORMULÁRIO

- Harmônicos Esféricos Y^l_m

$$\begin{aligned} Y^1_0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{z}{r}\right) \ , \\ Y^1_{\pm 1} &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(\frac{x \pm iy}{r}\right) \ . \end{aligned}$$

- Coeficientes de Clebsch-Gordan para $l = 1$ e $s = 1/2$

$\mathbf{1}\times\frac{1}{2}$						
$\mathbf{m}_l, \mathbf{m}_s \backslash$ **jm**	$\frac{3}{2}\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}-\frac{3}{2}$
$1, 1/2$	1	0	0	0	0	0
$1, -1/2$	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	0	0
$0, 1/2$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	0	0	0
$0, -1/2$	0	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	0
$-1, 1/2$	0	0	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	0
$-1, -1/2$	0	0	0	0	0	1

- Matrizes de Pauli

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = a_x\sigma_x + a_y\sigma_y + a_z\sigma_z = \frac{1}{2}\left(a_x - ia_y\right)\sigma_+ + \frac{1}{2}\left(a_x + ia_y\right)\sigma_- + a_z\sigma_z$$

$$\left(\vec{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \vec{\mathbf{a}}\right)\left(\vec{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \vec{\mathbf{b}}\right) = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} + i\vec{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\right)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$